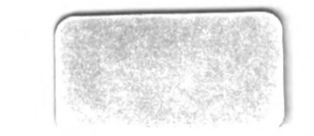
Archiv der Mathematik und Physik





ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Erster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1884.



Inhalts-Verzeichniss

des ersten Teils.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Mechanik.

Optik.

Litterarische Berichte.

(qudr. u. kub. Gl.). Weyr (proj. Geom.). Franz Meyer (Apol.). Kummell (align. cv. — th. err.). Fuhrmann (Kegschn.). Tamchyna (Beisp. Kegschn.). Böklen (anal. G.). Peschka (darst. G.). Marx (darst. G.).

IV. Bierens de Haan (Girard — Stevin — Spinoza). Mailly (Ac. Brux,). Heller (Gesch. Phys. II.). Fischer (Kepler). Lukas (Farr.). Geer (Snell). Boncompagni (Bull. XVI.). Günther (Geophys.). Wenz (m. Geogr.). Vodusek (Plan.). Peters Fixst.). Becker (Sonne). Valentiner (Kom.). Landenberger (Erdb.). Littrow (Kal. 84). Köppen (Ztschr. I.).

Berichtigungen
im LXX. Teile.

Seite	66	Zeile	4	v. ob.	hinzuzufügen	(15a)		
„	68	„	8	v. unt.	statt	(14)	setze	(15a)
„	102	„	2	„ „	„	die	„	der

I.

Mechanisch-graphische Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen.

Von

Carl Bartl,

weiland Lehrer an der Landesbürgerschule zu Hartberg (Steiermark).

Einleitung.

Lässt man bei geometrischen Constructionen nur die gegenseitigen Schnittpunkte von Geraden und Kreisen, und Kreisen untereinander als zulässig gelten (weil Gerade und Kreis die einzigen Gebilde sind, die sich nach ihrer Definition graphisch in continuo „genau" darstellen lassen), so sind die auf Ermittlung solcher Punkte gestützten Aufgaben mit ausschliesslicher Anwendung des Zirkels und Lineals gelöst. — Schon Descartes stellte in seiner 1637 erschienenen analytischen Geometrie für das Kriterium solcher in dieses Gebiet gehörigen Aufgaben die Bedingung auf, dass es möglich sein müsse, die Construction, unter zu Grundelegung eines Massstabes, auf die elementaren der vier Grundrechnungsoperationen, sowie jener des Quadratwurzelzeichens zurückführen zu können.

Dieser Bedingung wird Genüge geleistet bei Aufgaben 1ter, 2ter oder auch 2^nten Ordnung dann, wenn Letztere in solche 2ter Ordnung zerfallen, also die betreffende Bestimmungsgleichung 2^n Grases sich in lauter Gleichungen 2ten Grades spalten lässt *). Hierzu

*) Diese müssen selbstverständlich solche sein, deren Coefficienten rational sind, oder höchstens Quadratwurzeln enthalten.

gehören z. B. schon die Elementaraufgaben der Construction gemeinsamer Construction gemeinsamer Kreistangenten und jene von berührenden Kreisen an drei Geraden — mit 4 Lösungen —; dann die sogenannte ebene Berührungsaufgabe für Kreise — mit 8 Lösungen. Aus dem Gebiete der neueren Geometrie sind hieher zu rechnen die Collineationsaufgaben der Verzeichnung von Kegelschnittslinien aus 5 gegebenen Umfangsbestimmungsstücken, wenn darunter 2 Paare getrennter Punkte und Tangenten vorkommen mit 4 Lösungen etc. etc.

Aber jenes oben charakterisirte Gebiet der mit ausschliesslicher Anwendung des Zirkels und Lineals zu lösenden Aufgaben schliesst so manches nahe liegende, interessante, historische Problem aus (wie z. B. die Trisection des Winkels, das graphische Cubikwurzelziehen aus Streken und die damit zusammenhängenden Aufgaben aus der Stereometrie, Normalenprobleme für Kegelschnitte u. s. w.

Die Vorteile der Uebersichtlichkeit und Unmittelbarkeit jeder guten graphischen Lösung, gegenüber jener des Calculs, lassen selbst den bedeutenden und wesentlichen Nachteil, der auch bei den besten Zeicheninstrumenten und deren sorgfältigsten Behandlung auftretenden unvermeindlichen Fehler noch immer in den Hintergrund treten. Dieser Nachteil hat daher nur eine Aneiferung der Construction zur Folge, die graphischen Methoden zu verbessern und zu vereinfachen. Hieher gehören auch die Bestrebungen der Mechaniker, Instrumente herzustellen mit denen sich wenigstens annähernd so einfach und unmittelbar‘ wie der Kreis mittelst des Zirkels, nnn auch die Kegelschnittslinien graphisch verzeichnen liessen (man hat solche Instrumente wohl nicht ganz richtig mit dem Namen „Kegelschnittszirkel“ bezeichnet). Würden solch vollkommene Instrumente erfunden, so hätte man nun allerdings jenes Gebiet von Aufgaben, die sich nach mathematisch genauen Principien lösen lassen — als bedeutend erweitert anzusehen. Die Anforderungen aber, die man in Bezug auf Einfachheit, Genauigkeit und Verwendbarkeit für die verschiedensten Achsenverhältnisse der zu beschreibenden Kegelschnitte an solche Instrumente zu stellen hat, sind viel zu grosse, als dass sie so leicht zu erfüllen wären; und in der Tat hat sich auch bis jetzt noch keines der vorgeschlagenen mechanischen Hilfsmittel als für eine allgemeine Einführung brauchbar erwiesen, obwohl ein ziemlich vollkommener Ellipsograph, als für eine geschlossene Curve geltend, die meiste Aussicht hiezu hätte.

Das Bedürfniss einer graphischen Lösung der für die praktischen Zwecke mit genügender Genauigkeit zu construirenden Aufgaben dritter und vierter Ordnung macht sich immer noch fühlbar; dass

diess aber durch eine mechanische Beschreibung der Kegelschnitte zu erreichen sein wird, könnte wohl noch lange ein Wunsch der Constructeure bleiben.

Aufstellung des Grundverfahrens.

Führt man nebst dem Lineal und Zirkel noch den rechten Winkel (oder einen starren Winkel überhaupt) als neues Constructionsvehikel ein, so muss hiemit schon die Möglichkeit einer graphischen Behandlung von Aufgaben höherer Ordnung geboten sein. Denn, verwendet man einen rechten Winkel auf der Zeichenebene in der Weise, dass man ihn solange verschiebt bis gleichzeitig der eine Schenkel durch einen Fixpunkt K gehe, der Scheitel auf einer Leitgeraden LL sich befindet, während der andere Schenkel einen Grundkreis K berührt, so lässt sich der Effect dieses Anlegens eines rechten Winkels an die genannten Grundfactoren in zweierlei Weise interpretiren. Es bilden nämlich die Tangentenschenkel der „angelegten" rechten Winkel die vier gemeinschaftlichen Tangenten zwischen dem Grundkreis K und der durch Leitgerade L als Scheiteltangente und Fixpunkt F als Brennpunkt gegebenen Parabel; oder es repräsentiren die Lagen der Scheitelpunkte der rechten Winkel auf der Leitgeraden L die Durchschnittspunkte derselben mit der durch den Grundkreis K und den Fixpunkt F als Mittelpunkt der Lotstrahlen gegebenen, bekannten Kreisfusspunktscurve; (solche Tangenten an K beziehungsweise Schnittpunkte auf L können begreiflicher Weise paarig imaginär werden). Beide Erklärungen aber verificiren die eingangs gemachte Behauptung.

Die vorhin charakterisirte mechanische Verwendung des rechten Winkels zur graphischen Lösung von Aufgaben kann nur dann einen praktischen Wert erlangen, wenn in Folge der Einfachheit und Unmittelbarkeit der Methoden das Resultat mit jenem gewünschten Grad von Genauigkeit erhalten wird, welcher einem solchen nicht nachsteht, der bei den „nach mathematisch genauen" Principien gelösten Aufgaben erreicht wird. Dass dies möglich ist, lässt sich ohne Anstellung von Berechnungen über die Genauigkeitsverhältnisse selbst bei solchen Fällen, welche eine für die Anwendung des Grundverfahrens ziemlich ungünstige gegenseitige Lage der Grundfactoren aufweisen, durch Ausführung von Beispielen einfach und praktisch zeigen. In der Tat sind die Elementaroperationen, aus denen sich das Grundverfahren des „Anlegens eines rechten Winkels" zusammensetzt, sowohl einzeln, wie im Zusammenhange, als mechanische Operation genommen, leicht genau auszuführen.

Der rechte Winkel steht uns jederzeit zur Verfügung in einem geprüften Dreieckswinkel, welcher also die Winkelfläche der Zeichenebene deckt, oder indem man einen rechten Winkel an ein Lineal anlegt, wodurch sich ein solcher mit freigelassener Winkelfläche ergibt. Die passendste Form für vorliegenden Zweck kann aber leicht hergestellt werden, indem man auf einem Blatte gut transparenten Bauspapiers sich ein genaues rechtwinkliges Achsenkreuz verzeichnet, dessen Schnittpunkt durch ein Punktringelchen scharf markirt ist. In diesem primitiven Instrumente, das man beliebig auf dem Zeichenblatt verschieben kann, hat man alle vier Quadranten des Achsenkreuzes als „freie“ rechte Winkel zur Verfügung. — Im Grundverfahren hat man nun zunächst als Elementaroperation das Anlegen des einen Winkelschenkels an den Fixpunkt F — die primitivste Zeichenoperation; dann jene Bedingung der Berührung des zweiten Schenkels an den Grundkreis K, welche als Anlegen des Lineals an einen Punkt berührend an einen Kreis betrachtet werden muss. Diese letztere, in der Praxis von den Constructeuren nicht mit Unrecht stillschweigend als zulässig anerkannte und häufig angewendete Elementaroperation ist nichts anderes als die duale Operation zur Schnittbestimmung einer Geraden mit einem Kreise, und sollte deshalb wohl gebilligt werden *). Endlich als dritte Elementaroperation muss angesehen werden die Erfüllung der Bedingung, dass der Scheitelpunkt auf der Leitgeraden LL sich befinde — allerdings eine neue mechanische Operation, welche aber mit „guten“ rechten Winkeln (die man wohl ebenso berechtigtigt ist voraus zu setzen, als „gute“ Lineale, gute Zirkel), am besten jedoch mit dem früher erwähnten, „verschiebbaren“ Achsenkreuz mit der gewünschten Präcision gewiss leicht ausgeführt werden kann. Uebrigens ist das „Anlegen“ des rechten Winkel an die Grundfactoren immer noch eine einfachere, weniger Uebung erforderliche Operation als jene (auch zu den mechanischen Operationen zu rechnende) des Ablesens an einem Rechenschieber bei gegenteiliger Schieberstellung oder jene beim Gebrauche der graphischen Rechentafeln vorkommenden.

*) Hieher gehört auch das Anlegen eines Lineals berührend an zwei Kreise, dem dual gegenüber der Schnitt zweier Kreise steht, welch' letztere wieder zu den primitivsten Zeichenoperationen gehört. Der den ersteren der genannten Operationen zu machende Einwurf, dass dieselben unsicher werden, wenn der Punkt und Kreis, respective die beiden Kreise zum Anlegen eines Lineals zu nahe aneinander gelegen sind, trifft ganz in derselben Weise auch den allgemein zulässigen dualen Verfahren der Schnittbestimmung, wenn die schneidende Gerade eine dem Kreisradius nahe gleiche Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises besitzt oder beziehungsweise die beiden Schnittkreise sehr nahe aneinander liegende Mittelpunkte mit wenig verschieden langen Radien aufweisen.

Wie später gezeigt werden soll, besitzt das besprochene Grundverfahren auch Modificationen, welche für den Fall einer (für dessen Anwendung) ungünstigen Lage der Grundfactoren, die Genauigkeit des Resultats zu erhöhen im Stande sind — ein Kriterium, das jede zum graphischen Calcul gut verwendbare Methode besitzen soll.

Erweiterung des Grundverfahrens.

Eine nahe liegende Erweiterung für das bis nun besprochene Grundverfahren unter Voraussetzung obiger Grundfactoren besteht darin, dass man die Leitgerade LL durch einen Leitkreis L_k ersetzt. Dies muss consequenterweise gestattet sein, weil ein Kreis, so gut wie die gerade Linie, als scharf zu zeichnendes Gebilde anzusehen ist. Während also der eine Schenkel des „angelegten“ rechten Winkels durch den Fixpunkt F geht, befinde sich der Scheitel auf dem Umfange des Leitkreises L_k und berühre der andere Schenkel den Grundkreis K. Die Tangentenschenkel der möglichen Winkellagen repräsentiren nun hier die gemeinschaftlichen Tangenten zwischen dem Grundkreis und jenem Kegelschnitte, der den Fixpunkt F zu einem Brennpunkt und den durch F gehenden Durchmesser von L_k zur Hauptachse hat. Liegt F innerhalb des Kreises L_k, so ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse; für F ausserhalb gelegen — eine Hyperbel. Es gibt dann stets einen zu F bezüglich des Mittelpunktes von L_k symmetrisch gelegenen Punkt F', der in derselben Weise wie F als Fixpunkt verwendet werden kann und nun dieselben Tangentenschenkellagen wie F liefert. — Die zweite Interpretation des erweiterten Verfahrens ist auch wieder jener des Grundverfahrens analog. Es bilden nämlich hier die auf dem Leitkreis L_k erhaltenen Lagen der Scheitelpunkte der an die Grundfactoren angelegten rechten Winkel die Schnittpunkte von L_k mit der durch den Grundkreis K und Fixpunkt F als Mittelpunkt der Lotstrahlen gegebenen Kreisfusspunktscurve.

Es ist nun für das ursprüngliche und erweiterte Verfahren die Frage sehr nahe liegend, ob vielleicht durch Anwendung eines beliebig verschiebbaren starren Winkels φ (in derselben Weise wie bis jetzt der rechte Winkel benutzt wurde) sich nun Aufgaben von einem höheren Grade als die für das bisherige Verfahren angedeuteten — graphisch behandeln liessen.

Diese Frage beantwortet sich sofort als verneinend, wenn man nachstehende, einfache Betrachtung anstellt.

In Fig. 1. sei eine beliebige Leitcurve L_c gegeben, auf welcher sich der Scheitel S des Winkels φ bewege, während der eine Schenkel

stets durch den Fixpunkt F gehe, und der andere in einem beliebigen Momente der Bewegung die Lage TT angenommen hätte. Denkt man sich auf alle möglichen Lagen des zweiten der genannten Schenkel aus F die Perpendikel FR gefällt, so lässt sich der geometrische Ort der Punkte R sofort angeben. Während der Bewegung des Winkels φ beschreiben nämlich die Strahlen FS und FR zu einander congruente Strahlenbüschel um F als Träger. Da ferner die Strecken FS und FR für alle homologen Punkte der L_c und der in Rede stehenden Curve der R in dem constanten Verhältnisse $\frac{1}{\sin\varphi}$ stehen, so müssen die Punkte R eine zu L_c ähnliche Curve durchlaufen, deren homologen Punkte gegen jene der L_c um F als Centrum in der Winkelgrösse $(90^0 - \varphi)$ verdreht erscheinen. Das Aehnlichkeitsverhältniss von L_c zur Curve der R ist offenbar $\frac{1}{\sin\varphi}$. Es können demnach die Lagen der freien Schenkel TT auch erhalten werden in jenen eines beweglichen rechten Winkels, dessen einer Schenkel stets durch F geht, während der Scheitel die der Lage nach oben näher definirte, zu L_c ähnliche Curve der R durchläuft.

Dies Ergebniss für unsere mechanischen Verfahren angewendet, in welchen statt der allgemeinen Leitcurve L_c entweder Leitgerade oder -Kreis vorliegen, hat es also hier die Bedeutung des Ersatzes eines allgemeinen Winkels φ durch einen rechten, wenn nur Leitgerade respective Kreis „entsprechend" geändert werden. Diese Aenderung geschieht in dem Uebergange auf ein ähnliches Gebilde im Verhältnisse $1 : \sin\varphi$ bezüglich des Fixpunktes F als Centrum, und nachheriger Verdrehung um dasselbe in der Winkelgrösse $(90-\varphi)$ nach der Seite, wohin das Perpendikel aus F auf eine der Lagen des freien Schenkels von φ fällt, unter φ immer den spitzen von den bei S auftretenden Nebenwinkeln verstanden.

Umgekehrt lässt sich aber das hier gewonnene Resultat recht gut für eine Hilfsmethode bei unseren mechanischen Verfahren verwerten.

Denken wir uns, dass Leitgerade respective Leitkreis, dann Fixpunkt und Grundkreis in einer für das „Anlegen" eines rechten Winkels verhältnissmässig ungünstigen gegenseitigen Lage gegeben seien, so kann man stets die Anwendung des rechten Winkels durch jene eines beliebigen Winkels φ ersetzen, für welchen die neuen Leitfactoren gegen K und F günstiger gelegen sind. Die neuen Leitfactoren für φ ergeben sich aus jenen für den rechten Winkel nach der bereits oben aufgestellten Regel mit reciprokem Aehnlichkeitsverhältniss und entgegengesetztem Drehungssinn. Dabei kann der Winkel φ in seiner zweckmässigsten Form als das auf einem gut

transparenten Bauspapiere verzeichnete, schiefwinkelige, mit der Neigung φ versehene Achsenkreuz zur Ausführung der mechanischen Verfahren benutzt werden.

Man ersieht indes leicht, dass die besprochene Modificirung der Leitfactoren sich auf den, auch durch unser Resultat gewonnenen, bekannten Satz stützt, dass für einen Kegelschnitt der geometrische Ort der Fusspunkte der aus einem Brennpunkte auf dessen Tangenten unter constantem Winkel gezogenen Strahlen ein Kreis, respective für die Parabel eine Gerade (Tangente) ist.

Wenn nun auch eine solche Modificirung der gegebenen Leitfactoren behufs Anwendung eines Winkes φ aus Genauigkeitsrücksichten sich selten als gar so notwendig herausstellen wird *), so ist es doch als ein bedeutender Wert der mechanischen Verfahren anzusehen, wenn sie wie die anderen auf mathematisch genaue Principien basirbaren graphischen Methoden, Modificationen zur Verbesserung der Genauigkeit des zu erzielenden Resultates aufweisen.

Zum Schlusse mag noch auf eine weitere Consequenz hingewiesen werden, die sich aus dem Grundverfahren ableiten lässt. Ersetzt man nämlich von den bisher gegebenen Grundfactoren auch den Fixpunkt F durch einen Fixkreis F_k, so dass noch Grundkreis und Leitgerade oder Kreis als Grundfactoren gegeben sind, so wird entsprechend dem früheren der rechte Winkel an dieselben nun so „anzulegen“ sein, dass, während seine Scheitel sich auf der Leitgeraden oder dem Leitkreis befindet, seine beiden Schenkel Tangenten an F_k und K sein müssen. Die sich ergebenden Lagen des Scheitels des rechten Winkels auf den Leitfactoren müssen demnach angesehen werden als die Durchschnittspunkte der letzteren mit einer Art Fusspunktscurve, die sich aus Fixkreis F_k und Grundkreis K in der Weise ableitet, dass für jede Tangente des einen dieser Kreise, die Fusspunkte der hiezu senkrechten Tangenten des andern Kreises Punkte der Curve bilden. Diese Art der Verallgemeinerung des Grundverfahrens involvirt in der Tat die Behandlung von Aufgaben von einem höheren als dem vierten Grade.

*) Die Betrachtungen der Lagen- und Grössenverhältnisse der Grundfactoren unter Rücksicht auf die Genauigkeit des durch unsere mechanischen Verfahren zu erzielenden Resultates führen zu einem für dieselben recht günstigen Ergebniss. Während zuweilen der eine Schenkel des „angelegten“ rechten Winkels wegen zu schiefer Neigung zur Leitgeraden die Lage des Scheitels auf derselben nicht präcis genug angibt, ersetzt diesen Mangel sofort der andere, auf ihm senkrechte Schenkel. Die ungünstigste Stellung scheint einzutreten, wenn der Fixpunkt sehr nahe der Leitgeraden, beziehungsweise dem Leitkreise zu liegen kommt.

Da das hier gesetzte Ziel nur in einer graphischen Behandlung der kubischen und biquadratischen Gleichungen besteht, so genügt hiezu die Anwendung des ursprünglichen Grundverfahrens, wobei nur eine Leitgerade als Leitfactor gegeben ist, in ausreichender Weise, so dass es nicht notwendig wird, von dem ausführlich besprochenen erweiterten Verfahren oder der zum Schlusse angedeuteten Consequenz in der Folge einen Gebrauch zu machen.

Bemerkungen zur Behandlungsart des Themas.

Die Inangriffnahme des gestellten Problems erheischt vor Allem die Auffindung jener Beziehungen, welche zwischen den Bestimmungsstücken der Lagen- und Grössenverhältnisse unserer Grundfactoren und den mittelst der Anwendung des mechanischen Grundverfahrens erzielten Resultate, analytisch ausgedrückt, bestehen, um jene einfachsten auswählen zu können, die zu einem Vergleiche mit den zu lösenden Gleichungen sich am besten eignen. Aus solchen Vergleichungen sind die nötigen Daten zur Verzeichnung der Grundfactoren abzuleiten, auf welche das mechanische Verfahren angewendet, die verlangte Lösung der ursprünglich gegebenen Gleichungen erhalten werden muss.

Wenn nun durch diese Methode im Principe jedes Problem 3ter und 4ter Ordnung behandelt werden kann, nachdem bloss die hiezu nötigen analytischen Gleichungen aufzustellen sind, so wird man auch bei den zumeist eleganteren synthetischen Lösungen von Constructionsaufgaben, die in letzter Linie auf die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte basirt sind, für die graphische Behandlung den rechten Winkel gemäss dem Grundverfahren in Anwendung bringen können. Man hat dann im Allgemeinen das System besagter Hilfskegelschnitte in ein solches collinear verwandtes über zu führen, wo einem der Kegelschnitte ein Kreis entspricht (der dann als Grundkreis K zur Geltung kommt) und von der dem anderen verwandten Curve die Hauptachsen (beziehungsweise Brennpunkte) anzugeben sein werden. Die gemeinsamen Tangenten zwischen Kreis und dem letzt genannten Kegelschnitt sind dann in das ursprüngliche System zurückzuführen. Häufig gelingt durch zweckentsprechende Wahl von Collineationsachse und Centrum eine derartige Ausführung dieser Transformation, dass, während dem einen der ursprünglichen Kegelschnitte im neuen System ein Kreis entspricht, dem andern eine Parabel homolog ist, wodurch dann die Ermittlung der gemeinsamen Tangenten im ersten System auf das „Anlegen" eines rechten Winkels an Fixpunkt, Leitgerade und Grundkreis im zweiten System zurückgeführt erscheint.

Als ein hieher gehöriges Beispiel möge die graphische Bestimmung von $\sqrt[3]{y}$, unter y eine beliebige reelle Zahl oder eine Strecke verstanden, im Folgenden etwas näher besprochen werden.

Trägt man in Fig. 2. $Of = 1$ und $OF = y$ auf die Achsen auf, und wäre man im Stande den Linienzug $FGHf$ anzugeben, der bei G und H rechte Winkel aufweist, so erhielte man in der Strecke OH sofort die $\sqrt[3]{y}$. GH stellt aber nichts anderes vor als eine gemeinsame Tangente jener zwei Parabeln, die in O ihren gemeinschaftlichen Scheitel haben und deren Achsen respective Brennpunkte in Ox, Oy, resp. f, F sich befinden. GH steht nämlich gleichzeitig auf den Strahlen GF und HF senkrecht, welche man aus den Brennpunkten zu den Schnittpunkten der ersteren mit den Scheiteltangenten der Parabeln ziehen kann. Denkt man sich eine der Parabeln, z. B. jene mit dem Brennpunkt f, sehr genau construirt, so könnte mit Hilfe derselben und durch „Anlegen“ eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel durch F gehe, während der Scheitel auf der Ox sich befinde und der andere Schenkel die Parabel berühre, sofort die Lage der gemeinsamen Tangente GH und damit $OH = \sqrt[3]{y}$ erhalten werden. Bei Benutzung einer schon vorhandenen, sehr genau verzeichneten Parabel, deren Abstand des Brennpunktes vom Scheitel als Constructionseinheit genommen werden muss, lässt sich auf diese Weise für beliebige Werte von y unmittelbar die $\sqrt[3]{y}$ mit einer für das graphische Rechnen ausreichenden Genauigkeit herstellen. Graphische Methoden setzen ja oft Curven höherer Ordnung voraus, die erst mühsam construirt werden müssen, während hier nur eine genau verzeichnete Parabel verlangt wird.

Die oben definirte Lage der GH kann auch noch in anderer Weise aufgefasst werden.

Sind F und f die Träger zweier congruenter Strahlenbüschel, deren homologe Strahlen zu einander parallel laufen, so werden dieselben durch Ox und Oy in projectivischen Punktreihen geschnitten, deren Erzeugniss eine gleichseitige Hyperbel ist, die Ox und Oy zu Asymptoten hat, und deren reelle Achse, den Winkel FOf halbirend, die Länge $2a = \sqrt{2y}$ besitzt. Die Lage der Geraden GH bildet nun auch eine Tangente an diese Hyperbel und nach früher auch eine solche der oben bezeichneten Parabeln. Ersetzt man die Bedingung, dass GH Parabeltangente sein muss, durch jene des „Anlegens“ eines rechten Winkels ganz in derselben Weise wie früher, wobei also jetzt die gleichseitige Hyperbel von dem einen Winkelschenkel berührt werden muss, so erhält man in demselben die Lage von GH



und damit $\sqrt[3]{y}$. Dass auch hier wieder jede vorliegende gleichseitige Hyperbel zweckmässig verwendet werden kann, ist selbstverständlich; die Achse derselben repräsentirt dann die Strecke $\sqrt{2y}$, woraus sich die Massstabeinheit zum Messen von $\sqrt[3]{y}$ ableitet.

Wie sich die Bestimmung der gemeinsamen Kegelschnittstangente GH in beiden besprochenen Auffassungen zurückführen lässt auf jene zwischen einem Kreis und einen Kegelschnitt wurde schon für den allgemeinen Fall erörtert. — Die Durchführung derselben in dem vorliegenden, wo die gegebenen Kegelschnitte eine besonders günstige gegenseitige Lage besitzen, kann weiter keine Schwierigkeiten bieten.

Wird die Bestimmung der Hauptachsen (respective Brennpunkte) jenes Kegelschnitts des transformirten Systems, für welchen eben die gemeinsamen Tangenten mit dem Kreise durch „Winkelaulegen" erhalten werden, umständlich, so leidet hierunter die Genauigkeit des Schlussresultates wesentlich. Dies wird schon in unserm speciellen Fall bei Ermittlung von GH merklich fühlbar.

Nachdem die zur Ausführung von solchen Kegelschnitts-Transformationen nötigen Constructionen längst zu den bekannten gehören, das Problem des graphischen Kubikwurzelziehens aber später ohnehin durch zweckmässigere Verfahren gelöst wird, so kann die constructive Durchführung eines hieher gehörigen Beispieles demnach füglich unterbleiben.

Behandlung der kubischen Gleichungen.

Schneidet man die zwischen einem Kreise und einer Parabel möglichen vier Tangenten durch eine beliebige Transversale, so repräsentiren die Strecken von einem gegebenen Punkte derselben bis zu den erhaltenen Schnittpunkten mit den ersteren die vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung, die sich zur Berechnung jener Strecken aus den Tangentenbedingungen unter Voraussetzung der die Grösse und Lage des Kreises gegen Parabel und Transversale bestimmenden Dimensionen aufstellen lässt. Kreis, dann Scheitelangente und Brennpunkt der Parabel bilden beziehungsweise Grundkreis, Leitgerade und Fixpunkt für Anwendung des Grundverfahrens, wobei also die Tangentenschenkel der rechten Winkel jene gemeinsamen Curventangenten darstellen werden.

Soll nun aber durch einen solchen Transversalschnitt die Lösung von kubischen Gleichungen erzielt werden, so ist entweder eine jener vier gemeinschaftlichen Tangenten selbst als die bekannte Trans-

versale der übrigen drei zu nehmen, oder aber allgemeiner eine beliebig gelegte Transversale mit den vier gemeinschaftlichen Tangenten zu schneiden, von welchen jedoch eine, als durch die specielle Lage der Grundfactoren bekannt oder gegeben vorausgesetzt werden muss. Der dieser letzteren entsprechende Wurzelwert auf der Transversalen ist nun gleichfalls bekannt und repräsentiren die den übrigen entsprechenden, solche einer kubischen Gleichung. Zum vorliegenden Zwecke werden nur jene Transversalen brauchbar sein, für welche die aufgestellten Gleichungen der Schnittpunkte Coefficienten der Unbekannten aufweisen, die sich in einfachst möglicher Form aus den Grössen- und Lagendimensionen der Grundfactoren zusammensetzen. Der Spielraum in der Wahl bei der Lage der Grundfactoren und Transversalen ist wohl bedeutend und lässt sich von vorneherein auf die Existenz von mehr als einer Lösungsmethode einer Gleichung schliessen, so dass man für einen Specialfall mit Rücksicht auf Einfachheit und Genauigkeit wird auswählen können.

In der Theorie der kubischen Gleichungen bildet die Lösung der einen kubischen Gleichung

$$y^3 - a = 0, \quad \text{d. i.} \quad x = \sqrt[3]{a}$$

den Ausgangspunkt für jene der reducirten; bei der graphischen Behandlung ergiebt sich die Methode des Kubikwurzelziehens als ein specieller Fall der Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung oder indirect aus jener der reducirten. Die vollständigen Gleichungen können sofort in ihrer gegebenen Form zur Behandlung gelangen, ohne dass es nötig wird, wie dies bei der Auflösnng in gewöhnlicher Weise zu geschehen pflegt, dieselben vorher auf reducirte zu transformiren.

Die allgemeinste Form der vollständigen kubischen Gleichungen möge durch

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

dargestellt sein, wobei unter a, b und c nicht blos die numerischen Werte der Coefficienten, sondern auch ihre Qualitätswerte miteinbegriffen sein sollen. Bekanntlich hat diese Gleichung, je nachdem der Coefficienten-Ausdruck

$$\begin{vmatrix} (3b - a^2) & (9c - ab) \\ (9c - ab) & 4(3ac - b^2) \end{vmatrix} \begin{matrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

ist, beziehungsweise 1 reelle und 2 imaginäre, dann 3 reelle, darunter 2 gleiche oder 3 reelle von einander verschiedene Wurzeln (irruducibler Fall). Diese Unterscheidung wird jedoch bei der graphischen

Behandlung im Allgemeinen die Methode nicht beeinflussen. Alle kubischen Gleichungen besitzen wenigstens eine reelle Wurzel und muss dieselbe stets durch das mechanische Verfahren erhalten werden können, während die beiden anderen, wenn reell — auch direct, wenn imaginär — aber durch Lösung einer weiteren Aufgabe von der 2ten Ordnung sich ergeben müssen. In dem Falle zweier gleicher Wurzeln, lassen sich übrigens die Werte der Wurzeln rational durch die Coefficienten ausdrücken. Unter Voraussetzung, dass obiger Determinantenausdruck verschwindet, wird also die gleiche Wurzel

$$y_1 = y_2 = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{9c - ab}{3b - a^2}$$

und die davon verschiedene dritte Wurzel

$$y_3 = -(2y_1 + a) = \frac{9c - a(4b - a^2)}{3b - a^2}$$

Liefern diese Ausdrücke die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, so ist dies ein Zeichen vom Vorhsndensein dreier gleicher Wurzeln, deren Bestehen also an die Bedingungen geknüpft ist, dass

$$9c = ab \quad \text{und} \quad 3b = a^2$$

wird, womit das Gleichungspolynom in einen vollständigen Kubus übergeht, und die gleiche Wurzel den Wert

$$y_1 = y_2 = y_3 = -\frac{a}{3}$$

besitzt.

Behufs Aufstellung der analytischen Ausdrücke für die Transversalschnitte wird folgende Wahl des Achsensystems zweckentsprechend sein.

Wir haben nach früher eine gemeinschaftliche Kreis-Parabel-Tangente als bekannt vorauszusetzen und nehmen dieselbe (Fig. 3.) gleich zur y Achse, während wir den zum Berührungspunkt des Kreises gehörigen Durchmesser als Lage der x Achse wählen. Der Fixpunkt F, darauf bezogen, hätte die Coordinaten e und f, und die Leitgerade L muss in der Höhe f über dem Ursprung die y Achse schneiden, ist aber sonst in der unabhängigen Neigung φ gegen die x Achse vorauszusetzen. Der Kreisradius sei mit r bezeichnet.

Eine unbestimmte Kreistangente

$$\frac{y}{n} + \frac{x}{m} - 1 = 0$$

mit den Achsenabschnitten n und m, hat sich mit dem aus F darauf errichteten Lote

$$\frac{y}{m} - \frac{x}{n} + \left(\frac{e}{n} - \frac{f}{m}\right) = 0$$

auf der Leitgeraden L

$$y - \operatorname{tg}\varphi \, . \, x - f = 0$$

bedingungsweise in einem Punkte zu schneiden. Dies ist sofort in dem Verschwinden der Resultante dieses Gleichungssystems, also in

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n}, & \frac{1}{m}, & -1 \\ \frac{1}{m}, & \frac{-1}{n}, & \frac{e}{n} - \frac{f}{m} \\ 1, & -\operatorname{tg}\varphi. & -f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \frac{n}{m}, & -n \\ \frac{n}{m}, & -1, & e - f\frac{n}{m} \\ 1, & -\operatorname{tg}\varphi, & -f \end{vmatrix} = 0$$

ausgedrückt. Nach leichter Reduction und Auswertung der Determinante findet man für $\frac{a}{m}$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{n}{m} + \operatorname{tg}\varphi, & f - n \\ \frac{n}{m}\operatorname{tg}\varphi - 1, & e \end{vmatrix} = (e - f\operatorname{tg}\varphi + n\operatorname{tg}\varphi)\frac{n}{m} + e\operatorname{tg}\varphi + f - n = 0$$

Daraus und aus der Bedingung, dass n und m einer Kreistangente angehören, ergeben sich (zur Elimination von m) die beiden Werte für $\frac{n}{m}$ in

$$\frac{n}{m} = \frac{f + e\operatorname{tg}\varphi - n}{f\operatorname{tg}\varphi - e - n\operatorname{tg}\varphi} = \frac{n^2 - r^2}{2rn}$$

Ordnet man die letzte Gleichstellung nach n, so ergibt sich zunächst eine Bedingung hiefür in

$$n^3 - (f - e.\operatorname{ctg}\varphi + 2r.\operatorname{ctg}\varphi)n^3 + r(2f\operatorname{ctg}\varphi + 2e - r).n + r^2)(f - e\operatorname{ctg}\varphi) = 0 \quad (1)$$

Eine zweite resultirt durch Einführung der beiden Werte von $\frac{n}{m}$ in die Tangentengleichung

$$y + x\frac{n}{m} - n = 0$$

und erscheint nach Ordnung für n in der zweifachen Form

$$\left.\begin{array}{l}(x-2r)n^2+2ry.n-r^2.x=0\\ n^2-(y+x\operatorname{ctg}\varphi+f-e\operatorname{ctg}\varphi)n+[x(f\operatorname{ctg}\varphi+e)+y.(f-e\operatorname{ctg}\varphi)]=0\end{array}\right\}\quad(2)$$

Nimmt man daher obige Gleichung (1) am besten mit ersterer der letzten (2) zusammen und eliminirt daraus u, so muss sich als Ausdruck für die drei gemeinschaftlichen Tangenten zwischen Grundkreis und Parabel („LL, F“) ergeben.

Es wird nun nicht nötig die Elimination für den allgemeinsten Fall durchzuführen, weil für zweckentsprechende Transversalschnitte die Ausdrücke durch einfache Substitutionen erhalten werden können. Solche Transversalen, für welche voraussichtlich bemerkenswerte Ausdrücke sich ergeben dürften, entnimmt man aus den Tangentengleichungen (2). Diese liefern für die Schnittgeraden

$$x = 0,\quad x = 2r \quad \text{und} \quad (f-e\operatorname{ctg}\varphi)y+(f\operatorname{ctg}\varphi+e)x = 0$$

beziehungsweise die Werte für das zu eliminirende u in

$$n = y,\quad n = \frac{r^2}{y} \quad \text{und} \quad n = (y+x\operatorname{ctg}\varphi+f-e\operatorname{ctg}\varphi);$$

hievon wollen wir im Allgemeinen jedoch nur vom ersten, das ist dem Schnitt der y Achse Gebrauch machen und die letzteren nur für specielle Lagen von F und L später zur Anwendung bringen.

Die Gleichung für die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Tangenten (oder Tangenten-Schenkel der „angelegten“ rechten Winkel) mit der y Achse ist demnach, obige (1) in y geschrieben:

$$y^3-(f-e\operatorname{ctg}\varphi+2r\operatorname{ctg}\varphi)y^2+r(2f\operatorname{ctg}\varphi+2e-r)y+(f-e\operatorname{ctg}\varphi)r^2=0 \quad \text{(I)}$$

Vergleicht man dieselbe mit der vollständigen kubischen, so ergeben sich zur Berechnung der Grössen r, $\operatorname{ctg}\varphi$, e und f nur die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= -(f-e\operatorname{ctg}\varphi+2r\operatorname{ctg}\varphi)\\ b &= r(2f\operatorname{ctg}\varphi+2e-r)\\ c &= r^2(f-e\operatorname{ctg}\varphi)\end{aligned}$$

wobei also eine Unbekannte noch willkürlich anzunehmen bleibt. Als diese wird offenbar der Grundkreisradius r zu wählen sein, und man findet aus der ersten und dritten den Wert von

$$\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{c+ar^2}{2r^3}$$

wodurch sich zur Bestimmung von e und f aus den beiden letzten die Beziehungen herleiten

$$2r^3e-(c+ar^2)f=(b+r^2)r^2 \qquad \text{(g)}$$

$$(c+ar^2)e+2r^3f=2rc \qquad \text{(g')}$$

Statt dieselben nach e und f aufzulösen, kann man bemerken, dass sich $F(e, f)$ einfacher ergibt aus dem Schnitt der beiden durch die letzten Gleichungen repräsentirten, aufeinander senkrechten Geraden g und g'. Diese selbst werden am raschesten durch ihre Achsenschnitte $g_{x,y}$ und $g_{x,y}'$ zu verzeichnen sein. Um gleich für alle Fälle die Ausdrücke zusammenzustellen, hat man für die reducirten $a=0$ und für die einen kubischen Gleichungen $a=0$ und $b=0$ zu setzen; ausserdem dürfte es in den meisten Fällen vorteilhaft sein, den Grundkreisradius r gleich der Constructionseinheit zu wählen, wofür die Ausdrücke noch angegeben werden mögen.

A. Vollständige kub. Gleichungen.

r allgemein	und $r=1$
$g_x=\frac{b+r^2}{2r},\quad g_y=-\frac{(b+r^2)r^3}{c+ar^2}$	$g_x=\frac{b+1}{2},\quad g_y=-\frac{b+1}{a+c}$
$g_x'=\frac{2rc}{c+ar^2},\quad g_y'=\frac{c}{r^2}$	$g_x'=\frac{2c}{a+c},\quad g_y'=c$

Für obigen Wert von $\operatorname{ctg}\varphi$ kann man demnach einführen

$$\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{c+ar^2}{2r^3}=-\frac{c+a}{2}=\frac{g_x}{g_y}=-\frac{g_y'}{g_x'},$$

woraus man sogleich erkennt, dass die Leitgerade L entweder parallel läuft zu den bezüglich den Coordinatenachsen zur Geraden g zu verzeichnenden symmetrischen Linien oder aber auf jenen der Geraden g' senkrecht steht.

B. Reducirte kub. Gleichungen.

r allgemein	und $r=1$
$g_x=\frac{b+r^2}{2r},\quad g_y=-\frac{(b+r^2)r^2}{c}$	$g_x=\frac{b+1}{2},\quad g_y=-\frac{b+1}{c}$
$g_x'=2r,\quad g_y'=\frac{c}{r^2}$	$g_x'=2,\quad g_y'=c$
$\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{c}{2r^3}$	$\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{c}{2}$



C. Reine kub. Gleichungen oder $y = \sqrt[3]{-c}$.

$g_x = \frac{r}{2}, \quad g_y = -\frac{r^4}{c}$ | $g_x = \frac{1}{2}, \quad g_y = -\frac{1}{c}$

$g_x' = 2r, \quad g_y' = \frac{c}{r^2}$ | $g_x' = 2, \quad g_y' = c$

ctg φ wie oben.

Das ganze Verfahren zur graphischen Lösung von kubischen Gleichungen besteht zuerst in der Verzeichnung der Grundfactoren, an welche dann der rechte Winkel „anzulegen" ist, dessen Tangentenschenkel auf der y Achse die verlangten Wurzelwerte abschneidet.

Nach zweckmässiger Wahl in der Grösse des Grundkreises wird man den Fixpunkt F durch den Schnitt der beiden Geraden g und g' darstellen. Von den letzteren verzeichnet man zuerst die, einfachere Ausdrücke der Achsenschnitte aufweisende g', während g durch den Punkt g_x auf g' senkrecht zu führen ist und F bestimmt. Wird dessen Ordinate auf der y Achse irgendwie übertragen, so ist durch den erhaltenen Punkt (y Achsenschnitt) die Leitgerade nach der oben näher angegebenen Richtung zu führen, oder man kann auch den x Achsenschnitt der letztern bestimmen, wenn man die Grösse g_x auf der x Achse vom Abscissenpunkt e des Punktes F nach der dem Vorzeichen von g_x entgegengesetzten Richtung abträgt. Die Construction der Ausdrücke wird selbst bei allgemeinen r, die nicht in Masszahlen ausgedrückt zu werden brauchen, verhältnissmässig einfach und soll deshalb hier nicht weiter darauf eingegangen werden. Ergeben sich die Grundfactoren in einer für die Anwendung des mechanischen Verfahrens ungünstigen Lage, so kann dieselbe bei Aenderung des Wertes von r stets leicht behoben werden, was als Vorzug der Methode bezeichnet werden muss.

Schleifende, ungenaue Schnitte der Tangentenschenkel mit der y Achse werden eintreten bei extrem kleinen oder grossen Wurzelwerten (in Bezug auf die Grösse von r genommen). Um in solchen Fällen die Schnittpunkte genauer zu erhalten, wird man im ersteren den scharf bestimmten Berührungspunkt des Tangentenschenkels und Grundkreises mit dem Punkte $x = 2r$ verbinden und hiezu die Parallele durch den Kreismittelpunkt ziehen, welche nun unter sehr günstigem Winkel die y Achse im verlangten Punkte trifft. Im zweiten Falle — bei grossen Wurzelwerten — verzeichne man sich den zum Coordinatenursprung bezüglich des Tangentenschenkels symmetrisch gelegenen Punkt und hat dann durch denselben auf dessen Verbindungslinie mit dem x Achsenschnittpunkt des Tangentenschen-

kels eine Senkrechte zu errichten. Diese wird nun in einem doppelt so grossen Winkel als eben der Tangentenschenkel mit der y Achse einschliesst, die letztere im verlangten Punkte treffen. Sollte selbst dieser Winkel für die Genauigkeit des Schnittes noch zu klein sein, so ist er nach demselben Verfahren weiter zu verdoppeln u. s. f.

Zur Construction von $\sqrt[3]{-c}$ soll noch bemerkt werden, dass bei grossen Radicanden die Wahl von $r = 1$ unzweckmässig wird, und r als beliebig grosse ganze Zahl zu nehmen ist, wodurch ein genaueres Resultat erzielt werden kann. Die Fixpunkte F für sämmtliche Werte des Radicanden von $-\infty$ bis $+\infty$ liegen alle auf einem Kreise, der über die Punkte $x = \frac{r}{2}$ und $x = 2r$, als Durchmesserenden, beschrieben werden kann. Gleichzeitig wird man hier stets die graphische Probe über die Richtigkeit des Resultates durchführen (Fig. 4). Man hat behufs dessen den Punkt $y = \sqrt[3]{-c}$ mit Punkt $x = +1$ zu verbinden und hiezu durch den Punkt $y = +c$ die Parallele bis zur x Achse zu ziehen. Diese wird die Strecke $x = -\sqrt[3]{c^2}$ daselbst abschneiden. Bei richtiger Construction wird dann letztere Parallele lotrecht stehen auf der Verbindungslinie dieses Punktes $x = -\sqrt[3]{c^2}$ mit dem Punkte $y = \sqrt[3]{-c}$.

Ein Verfahren für das graphische Kubikwurzelziehen, bei welchem für beliebige Werte des Radicanden immer derselbe Fixpunkt für das mechanische „Winkelanlegen" zur Benutzung kommt, soll später indirect aus der Lösung einer reducirten Gleichung abgeleitet werden.

Darstellung der imaginären Wurzelwerte.

Einer wesentlichen Ergänzung bedarf vorstehende Lösungsmethode dann, wenn die gegebene kubische Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, indem es sich um die Darstellung der beiden übrigen imaginären Wurzeln handeln wird. Das Kriterium dieses Falles wurde schon oben angegeben und hiezu bemerkt, dass letztere Aufgabe nur mehr eine solche 2ter Ordnung ist, den reellen Wurzelwert, der immer durch das mechanische Verfahren gefunden werden kann, als bekannt voraussetzend. Werde derselbe mit w_1 bezeichnet, so ist das Gleichungspolynom durch $(y - w_1)$ teilbar, und der Quotient der Division ist die betreffende Gleichung 2ten Grades, deren Wurzeln die fehlenden der kubischen sind. Man hat also:

$$(y^3 + ay^2 + by + c) : (y - w_1) = y^2 + (w_1 + a)y + [w_1(w_1 + a) + b] = 0$$

da voraussetzungsgemäss

$$w_1^3 + aw_1^2 + bw_1 + c = 0$$

sein muss. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung, deren Coefficienten wir mit

$$w_1 + a = 2\alpha \quad \text{und} \quad (2w_1\alpha + b) = \beta^2$$

bezeichnen wollen, finden sich als complexe Zahlen, in Punkten der Ebene dargestellt, in welchen der Kreis aus dem Ursprung als Mittelpunkt mit dem Radius β beschrieben von der durch den Punkt $y = -\alpha$ zur x Achse gezogenen Parallelen geschnitten wird. In Fig. 3. ist das Beispiel der graphischen Lösung von

$$y^3 - y^2 + 5y - 33 = 0$$

durchgeführt und wurde nach Verzeichnung von F und L (bei der Annahme von $r = 2$) die reelle Wurzel $w_1 = +3$ erhalten. Somit ist

$$\alpha = +1, \quad \beta = \sqrt{11} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} w_2 \\ w_3 \end{matrix}\right\} = -1 \mp \sqrt{-10}$$

Für reducirte Gleichungen wird

$$\alpha = \frac{w_1}{2}, \qquad \beta = \sqrt{w_1^2 + b}$$

Für die reinen kubischen oder die Kubikwurzel ist dann

$$\alpha = \frac{w_1}{2}, \quad \beta = w_1$$

d. h. die Punkte w_1, w_2, w_3, welche die gleichnamigen Wurzelwerte darstellen, sind die Punkte der Dreiteilung des Kreises mit dem Radius w_1 aus O. In Fig. 4. kamen sie gleichfalls zur Verzeichnung.

Eine zweite Methode der Darstellung imaginärer Wurzelwerte, die mehr wissenschaftliches Interesse hat, soll an demselben Gleichungsbeispiele der obigen Fig. 3. nun in Fig. 5. durchgeführt werden. Man gelangt hiezu durch folgende Betrachtungen.

Nachdem durch das mechanische Verfahren aus K, L und F der reelle Wurzelwert, also Punkt w_1 abgeleitet wurde, hat man zu bedenken, dass die noch fehlenden Werte in den Schnittpunkten des imaginären Tangentenpaares zwischen Grundkreis und Parabel (LF) mit der transversalen y Achse repräsentirt sind. Dieses heisst mit anderen Worten, sucht man zuerst den reellen Contingenzpunkt dieser conjugirten Tangenten, so sind die Punkte, welche die imaginären Wurzelwerte darstellen, die beiden imaginären Doppelpunkte jener Punkteinvolution, die auf der y Achse durch eine Strahleninvolution erzeugt wird, welche für jenen Contingenzpunkt als Träger in Bezug auf einen der Kegelschnitte (Kreis oder Parabel) gegeben erscheint.

Die imaginären Doppelpunkte aber ersetzen sich durch reelle der Ebene, die zu beiden Seiten des Trägers (y Achse) als Mittelpunkte von rechtwinkligen Strahleninvolutionen auftreten, die zur Punkteinvolution perspectivisch liegen. Es kommt also zunächst darauf an jenen reellen Contingenzpunkt der beiden imaginären gemeinsamen Kreis-Parabeltangenten — wir wollen ihn mit ω bezeichnen — aus dem bekannten Contingenzpunkt w_1 abzuleiten.

Behufs dessen suche man den Schnittpunkt P der homologen (Berührungspunktsverbindungen) OT und O_pT_p, so ist derselbe der Schnittpunkt jener beiden gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Secanten, die als Collineationsachsen sowohl zu w_1 als auch ω als Centra einer collinear verwandten Zuordnung von Kreis und Parabel genommen werden können. Es muss daher die gemeinsame Polare pp des Punktes P in Bezug auf Kreis und Parabel jenen Punkt ω enthalten. Zieht man eine jener gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Secanten durch P, deren Richtung AX_∞ durch die Gegenachse uAX_∞ bestimmt ist (welche eine Kreistangente zu dem dem unendlichfernen Punkte u_∞ der Parabel entsprechenden Kreispunkte u sein muss), so schneidet dieselbe die vorhandenen Kreistangenten der w_1 in δ und δ'. Verzeichnet man sich die aus den letztern Punkten noch möglichen zweiten Kreistangenten und ordnet nun die Berührungspunkte s und q beziehungsweise jenen T_p und O_p zu, so müssen sich die Strahlen sT_p, s_pT, sowie qO_p auf der Polaren pp im fraglichen Contingenzpunkte ω schneiden; s_p ist nämlich der dem Kreispunkte s homologe Parabelpunkt und fällt hier zufällig mit dem Parabelscheitel zusammen.

Nachdem ω gefunden ist, gibt das rechtwinklig entsprechende Strahlenpaar der Involution d. i. ωoR, $\omega R'$ die beiden entsprechenden Punkte R und R', über welche als Durchmesserenden der Kreis $\varkappa$ zu verzeichnen kommt. Ein zweites Punktepaar würde gleichfalls einen solchen Kreis liefern, der wie $\varkappa$ jene imaginär ersetzenden, reellen Punkte der Ebene enthalten müsste. Einfacher werden dieselben aus dem Involutionscentrum J abgeleitet, da sie im Schnitte des Kreises $\varkappa$ mit der Senkrechten w_1Jw_2 durch J geführt, gleichfalls sich ergeben müssen. Das Involutionscentrum J aber bestimmt sich durch den Strahl Jwi, welcher dem durch ω zur y Achse parallel gezogenen Strahl der Involution homolog ist; der Punkt i auf der x Achse gelegen — ist der Pol dieses Strahles als Polare bezüglich des Kreises.

Die erhaltenen Punkte w_2 und w_3 sind die Träger jener rechtwinkligen, zur Punkteinvolution perspectivisch liegenden Strahleninvolution, und zugleich die graphische Darstellung der complexen Werte der noch fehlenden imaginären Wurzeln unserer gegebenen kubischen Gleichung.

Das vorstehende Verfahren kann auch in dem Falle angewendet werden, wenn die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat und einer oder zwei dieser Werte sich durch das mechanische Verfahren ungenau ergeben würden.

Man kann jedoch in einem solchen Falle zur genaueren Bestimmung einer der Wurzeln eine aus der Theorie der kubischen, für reducirte Gleichungen geltende Relation benutzen. Verlegt man nämlich den Ursprung O, d. i. den Anfangspunkt der Zählung um die Grösse $\left(-\frac{a}{3}\right)$ nach O', so werden bekanntlich für den neuen Anfangspunkt O' die Wurzelwerte zu solchen einer reducirten Gleichung und für diese gilt der Satz, dass die algebraische Summe je zweier Wurzeln gleich ist dem Entgegengesetzten der dritten. Sind also zwei von den Wurzelwerten genau, so lässt sich darnach der dritte, unsichere corrigiren.

Transversalschnitte für specielle Lagen der Grundfactoren.

Obwohl im Vorstehenden das Problem der mechanisch-graphischen Lösung der kubischen Gleichungen im Allgemeinen und Speciellen durchgeführt erscheint, sollen hier doch noch einige Transversalschnitte hervorgehoben werden, welche bei besonderen Lagen von L und F gegen K bemerkenswerte Resultate liefern, die sich zwar weniger für vollständige, aber recht gut für reducirte kubische Gleichungen verwenden lassen.

Lässt man die Leitgerade L mit der y Achse zusammenfallen, so ist in obige Gleichung (1)

$$\operatorname{ctg}\varphi = 0$$

einzuführen, wodurch sie übergeht in

$$n^3 - fn^2 + r(2e - r)n + fr^2 = 0 \tag{3}$$

und mit

$$(x - 2r)n^2 + 2ry\,n - r^2x = 0 \tag{2}$$

zusammen zu nehmen ist, um die unbestimmte Grösse n zu climiniren. Dies kann wieder im Besonderen geschehen für $x = 0$ und $x = 2r$, welche beziehungsweise liefern $n = y$ und $n = \frac{r^2}{y}$. Darnach werden die Ausdrücke für den y Achsenschnitt, respective den der parallelen Kreistangente

$$y^3 - fy^2 + r(2e - r)y + fr^2 = 0 \tag{4}$$

$$y^3 + (2e - r)\frac{r}{f}y^2 - r^2y + \frac{r^4}{f} = 0 \tag{5}$$

Mit ersterem lassen sich Gleichungen behandeln von der Form

$$y^3 - ay^2 \pm by + c = 0$$
$$y^3 + ay^2 \pm by - c = 0$$

mit letzterem die unter die Gruppen

$$y^3 \pm ay^2 - by \pm c = 0$$

gehörigen bei beliebiger Variation der Vorzeichen von a und c. Hiebei sind aber unter a, b und c nur die numerischen Werte der Coefficienten verstanden. Gleichzeitige Aenderung dsr Vorzeichen von a und c in die entgegengesetzten und die Beibehaltung des Zeichens von b involvirt nur den Uebergang zu einer Gleichung mit den numerisch gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Wurzeln der ursprünglichen.

Die Vergleiche der allgemeinen Formen mit (4) und (5) ergeben Relationen, aus denen sich die Bestimmungsgrössen r, e und f leicht durch die bekannten Coefficienten a, b und c reell ausdrücken lassen. Es möge jedoch nur darauf hingewiesen werden, da die Ausführung weiter keine Schwierigkeiten bietet. Uebrigens lassen sich diese Resultate nicht so zweckmässig anwenden, als jene, welche sich bei der allgemeinen Lage von L ergaben. Diese Bemerkung gilt übrigens auch für die wenigen noch später zu entwickelnden allgemeinern Fälle.

Specialisirt man die Abscisse des Fixpunktes F auf $e = \frac{r}{2}$, so ergibt sich für den Ausdruck (5) die reducirte kubische Gleichung

$$y^3 - r^2 y + \frac{r^4}{f} = 0 \qquad \text{(II)}$$

die für unsern Zweck sofort verwendbar ist.

Die Ausdrücke für andere Transversalschnitte leiten sich aus dem Eliminationsresultat von n aus obigen Gleichungen (3) und (2) ab. Dasselbe ist dargestellt in:

$$\begin{vmatrix} 1 & -f & r(2e-r) & fr^2 & 0 \\ 0 & 1 & -f & r(2e-r) & fr^2 \\ 0 & 0 & x-2r & 2ry & -r^2x \\ 0 & x-2r & 2ry & -r^2x & 0 \\ x-2r & 2ry & -r^2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & 0 & -e & f & 0 \\ 0 & e & 0 & 2e-r & f \\ 0 & y & r & 2y & -x \\ 0 & r & y & x & 0 \\ x-2r & y & r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder durch eine Determinante niedrigerer Ordnung ausgedrückt in

$$\begin{vmatrix} r & y & 2r-x \\ ex+fy & fr & rx \\ r(f+y) & (ex+fy)-r(2e-r) & 2ry \end{vmatrix} = 0$$

Für $y = 0$ bekommt man die Schnitte mit der x Achse in der Gleichung:

$$x^3 - 2\frac{r}{e}(2e-r)x^2 + \frac{r^2}{e^2}[(2e-r)^2 - f^2]x + 2\frac{r^3}{e^2}f^2 = 0$$

Transformirt man dieselbe von x auf $\frac{r}{e}\eta$, so folgt die einfachere

$$\eta^3 - 2(2e-r)\eta^2 - [f^2 - (2e-r)^2]\eta + 2ef^2 = 0 \qquad (6)$$

Die Wurzeln η sind dann die Ordinaten in den x Achsenschnittpunkten bis zu der durch den Ursprung gehenden Geraden

$$\eta = \frac{e}{r}x$$

Der Ausdruck (6) kann wieder dienen allgemeine Gleichungen von der Form

$$\eta^3 \pm a\eta^2 - b\eta \pm c = 0$$

zu behandeln, wobei beliebige Variation der Vorzeichen von a und c gestattet ist.

Setzt man in (6) wieder Abscisse $e = \frac{r}{2}$, so erhält man die reducirte Gleichung

$$\eta^3 - f^2\eta + f^2 r = 0 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{x}{2} \qquad \text{(III)}$$

also für die x Achse:

$$x^3 - 4f^2x + 8f^2r = 0$$

Es mag noch der Ausdruck für die Schnittpunkte einer Transversalen aufgestellt werden, die durch den Mittelpunkt des Kreises gehend, senkrecht steht auf des letzteren Verbindungslinie mit dem Fixpunkte F; eine solche ist in Fig. 6. verzeichnet.

Die auf der Transversalen vom Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt o zu zählenden, durch die Tangenten abgeschnittenen Strecken seien mit z bezeichnet, der Neigungswinkel der Transversalen zur x Achse mit α, die Strecke oF mit s und das Transversalenstück vom Mittelpunkt des Kreises bis zur y Achse mit t. Dann sind in obige Determinante folgende Substitutionen einzuführen:

$$y = z\sin\alpha, \quad r - e = f\sin\alpha, \quad f = s\cos\alpha$$
$$x = r + z\cos\alpha, \quad ex + fy = r(e + z\cos\alpha)$$

Hebt man die Factoren r weg und zieht die dritte von der ersten Colonne ab, so wird:

$$\begin{vmatrix} z\cos\alpha & z\sin\alpha & r - z\cos\alpha \\ -s\sin\alpha & s\cos\alpha & r + z\cos\alpha \\ s\cos\alpha - z\sin\alpha & s\sin\alpha + z\cos\alpha & 2z\sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 0 & r - z\cos\alpha \\ 0 & s & r + z\cos\alpha \\ s & z & 2z\sin\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Führt man schliesslich noch

$$t = \frac{r}{\cos\alpha}$$

ein, so folgt die letzte Form und ihre Auswertung in

$$\begin{vmatrix} z & 0 & t-z \\ 0 & s & t+z \\ s & z & 2z\operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix} = z^3 + (t - 2s\operatorname{tg}\alpha)z^2 - s^2z + s^2t = 0 \qquad (7)$$

Aus t, s und α lässt sich sofort wieder

$$r = t\cos\alpha, \quad f = s\cos\alpha, \quad e = r - f\sin\alpha$$

durch Construction herstellen.

Der Ausdruck (7) kann wieder mit der allgemeinen Form

$$z^3 \pm az^2 - bz \pm c = 0$$

für beliebige Vorzeichen von a und c verglichen werden und liefert einen immer angebbaren Winkel α, sowie s und t reell durch a, b und c ausgedrückt.

Zum Uebergang auf eine reducirte Gleichung hat man wieder in (7)

$$t = 2s\operatorname{tg}\alpha \quad \text{oder} \quad r = 2s\sin\alpha = 2(r-e) \quad \text{d. i.} \quad e = \frac{r}{2}$$

zu specialisiren und erhält damit:

$$z^3 - s^2z + s^2t = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Zur Anwendung dieser Gleichung dürfte sich die Anordnung in Fig. 7. eignen, welche aus Fig. 6. durch Rechtsdrehung um den Winkel $(90 + \alpha)$ entstanden ist. In Fig. 7. ist also die y Achse Transversale, F liegt auf der x Achse, während eine Kreistangente von x Achsen-Neigung α als Leitgerade L auftritt. Bei der Construction wird man t und $2s$ auf die Achsen von O aus auftragen, um in der Verbindungslinie der erhaltenen Punkte die Leitgerade L darzustellen. An dieselbe ist der Grundkreis K berührend (aus dem Mittelpunkte O) zu beschreiben. F befindet sich im Abstande s vom Mittelpunkte.

Die bis jetzt erhaltenen reducirten Gleichungen haben als charakteristisches Merkmal den negativen Coefficienten der ersten Potenz der Unbekannten. Damit sind also alle Fälle erledigt, die unter die Form

$$y^3 - py \pm q = 0$$

gehören, wobei die doppelten Vorzeichen des letzten Teiles gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Wurzeln entsprechen. Da den

absoluten Werten von p und q keine Schranken gesetzt sind, so ist auch der Fall mit zwei gleichen, und der irreducible mit drei verschiedenen reellen Wurzeln miteinbegriffen. Die erhaltenen Gleichungen haben auch das Gemeinsame der vorauszusetzenden Bedingung, dass die Abscisse von F d. i.

$$e = \frac{r}{2}$$

zu nehmen ist.

Werden unsere Resultate der obigen Form, die als gegebene, aufzulösende Gleichung gilt, gegenüber gestellt, so bekommt man für die Construction der Grundfactoren folgende Werte der hiezu nötigen Dimensionen, und zwar

bei (II) $y^3 - r^2 y + \frac{r^4}{f} = 0, \qquad r = \sqrt{p}, \quad f = \frac{r^4}{q} = \frac{p^2}{q}$

bei (III) $\eta^3 - f^2 \eta + f^2 r = 0, \qquad f = \sqrt{p}, \quad r = \frac{q}{f^2} = \frac{q}{p}$

bei (IV) $z^3 - s^2 z + s^2 t = 0, \qquad s = \sqrt{p}, \quad t = \frac{q}{p}$

Eine zweite besondere Lage der Grundfactoren geht aus der allgemeinen hervor, indem man F in die x Achse versetzt. Darnach ist in Gleichung (1) das $f = 0$ zu setzen, wodurch sie übergeht in

$$n^3 - (2r - e) \operatorname{ctg} \varphi \, n^2 + r(2e - r) n - r^2 e \operatorname{ctg} \varphi = 0 \tag{8}$$

Diese haben wir wieder behufs Elimination von n mit obiger Gleichung (2) zusammenzuhalten.

Die einfachsten hervorzuhebenden Transversalschnitte sind auch hier wieder

für $x = 0$, wodurch $n = y$

„ $x = 2r$, „ $n = \frac{r^2}{y}$

einzusetzen kommt. Damit werden aus (8) die folgenden:

$$y^3 - (2r - e) \operatorname{ctg} \varphi \, y^2 + r(2e - r) y - r^2 e \operatorname{ctg} \varphi = 0 \tag{9}$$

$$y^3 + \frac{r - 2e}{e} r \operatorname{tg} \varphi \, y^2 + \frac{2r - e}{e} r^2 y - \frac{r^4}{e} \operatorname{tg} \varphi = 0 \tag{10}$$

Von diesen ist jedoch nur erstere (9) verwendbar zur Behandlung der vollständigen Gleichungen von der Form

$y^3 + ay^2 + by - c = 0$ und $y^3 + ay^2 - by + c = 0$

$y^3 - ay^2 + by + c = 0$ $\qquad$ $y^3 - ay^2 - by - c = 0$

Die andern Fälle bei positivem b sind nur bedingungsweise zu lösen möglich. Es muss nämlich numerisch genommen

$$c > ab$$

sein, damit das r aus dem Vergleiche der Coefficientenausdrücke sich ergeben kann. Die Ausdrücke für r, e und $\operatorname{ctg}\varphi$ durch a, b und c sind überhaupt weniger einfach zu construiren und das erste allgemeine Verfahren vorzuziehen.

Bei Specialisirung von $e = 2r$ folgt aus (9):

$$y^3 + 3r^2y - 2r^3 \operatorname{ctg}\varphi = 0 \qquad \text{(V)}$$

und bei jener von $e = \frac{r}{2}$ aus (10):

$$y^3 + 3r^2y - 2r^3 \operatorname{tg}\varphi = 0 \qquad \text{(VI)}$$

Diese reducirten Gleichungen sind für complementäre Winkel φ einander gleich, so dass für $e = 2r$ und einem bestimmten φ auf der y Achse dieselben Wurzelwerte erscheinen als für $e = \frac{r}{2}$ und dem Winkel $(90 - \varphi)$ auf der parallelen Tangente $x = 2r$. Es braucht demnach nur der Ausdruck (V) weiters berücksichtigt zu werden.

Derselbe löst nun die reducirten Gleichungen von der Form

$$y^3 + py \pm q = 0$$

mit charakteristisch positivem p, und erhält man beim Vergleiche mit (V) sofort:

$$r = \sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2r^3}{q} = \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}}$$

Die Gleichungen dieser Gruppe haben bekanntlich bei beliebigen numerischen Werten von p und q stets eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Von Interesse ist die Ausnützung der Gleichung (V) zur Aufstellung eines besonderen, indirecten Verfahrens des Kubikwurzelziehens aus einer beliebigen reellen Grösse, das gegenüber dem bereits oben durchgeführten zweckmässige Constructionsvorteile gewährt.

Graphisches Kubikwurzelziehen.

Zur Einfachheit der Ableitung des Verfahrens können wir im Folgenden den Grundkreisradius $r = 1$ setzen und erhalten damit

$$y^3 + 3y - 2 \operatorname{ctg}\varphi = 0 \qquad \text{(V')}$$

so dass

$$p = 3, \quad q = 2 \operatorname{ctg} \varphi$$

wird. Lösen wir diese Gleichung trigonometrisch auf und nennen den ersten Hilfswinkel χ, den zweiten ψ, so folgt bei unseren Coefficienten p und q nach bekannten Formeln:

$$\operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{d. i.} \quad \chi = \varphi$$

somit

$$\operatorname{ctg} \psi = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}$$

und die reelle Wurzel

$$w_1 = 2 \operatorname{ctg} 2\psi$$

Setzen wir φ in der Form

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = z$$

unter z eine beliebige reelle Zahl verstanden, voraus, so können wir w_1 sehr leicht durch das mechanische Verfahren erhalten und kennen also damit ψ. Darnach ist in

$$\operatorname{ctg} \psi = \sqrt[3]{z}$$

die verlangte Kubikwurzel gefunden.

Es ist demnach nur nötig die Construction so anzuordnen, dass man bei constantem Grundkreis und unverändertem Fixpunkt für beliebig viele gegebene Zahlen oder Strecken z sowohl die Wurzelwerte einfach finden, als auch gleichzeitig am Resultate eine graphische Genauigkeitsprobe anstellen kann. Diesen Zweck dürfte das Arrangement in Fig. 8. erfüllen.

An den Grundkreis, mit dem Radius $r = 1$ beschrieben, ziehen wir durch den Scheitel O die Achse der y oder wie sie in der Figur bezeichnet wurde, als jene der $\sqrt[3]{z}$ und durch den scharf markirten, höchsten Punkt H die zur x Achse parallele Horizontalachse der z. O und H sind die Anfangs-Zählpunkte für die bezeichneten Grössen ihrer Achsen. Nun trage man auf der obern Horizontal-Achse von H aus $+z$ nach rechts und, zum Zwecke der später durchgeführten Probe, dasselbe von O aus auf der y Achse nach abwärts auf. Hernach lege man die Tangente durch den ersteren Punkt $+z$ an den Kreis, so ist damit sofort der oben definirte Winkel φ bestimmt. Es ist also nur die Leitgerade L durch O parallel zur letzten Tangente zu ziehen. Zeichnet man überdies an den Grundkreis noch die parallele zweite Tangente, so schneidet diese offenbar $\frac{-1}{z}$ von H aus gerechnet links auf der Achse ab. Nun „legen" wir durch F



an L und K den rechten Winkel „an", so erhalten wir durch den Tangentenschenkel auf der y Achse sofort in $\overline{Ow_1}$ die Strecke $w_1 = 2 \operatorname{ctg} 2\psi$ markirt. Werden schliesslich zur Verbindungslinie w_1F die parallelen Tangenten an den Kreis gezogen, so liefern diese die Strecken $\operatorname{ctg}\psi = \sqrt[3]{z}$ und $-\operatorname{tg}\psi = -\sqrt[3]{\frac{1}{z}}$ auf der y Achse. Die Endpunkte der Strecken sind mit ihren Werten für den Anfangszählpunkt O benannt, daher obige Bezeichnung der y Achse. Behufs der Genauigkeitsprobe hat man den Punkt $\sqrt[3]{z}$ mit dem Kreismittelpunkt o zu verbinden und hiezu die Parallele durch den untern Punkt z (der y Achse) sowohl, als jenen $-\sqrt[3]{\frac{1}{z}}$ zu ziehen, welche auf der x Achse die Strecken $\sqrt[3]{z^2}$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{z^2}}$, von O aus gerechnet, abschneiden müssen. Ist das Resultat genau, so muss die Verbindungslinie $(\sqrt[3]{z}, \sqrt[3]{z^2})$ auf diesen eben gezogenen Parallelen nun auch genau senkrecht stehen. Die Parallele, die man dann durch den Punkt $\sqrt[3]{\frac{1}{z^2}}$ zur obbenannten Verbindungslinie zieht, wird auf der y Achse $\frac{1}{z}$ markiren, von dessen Uebereinstimmung mit jenem der Horizontalachse man sich zu überzeugen hat. Da durch dieses Probeverfahren auf der x Achse die Quadrate der Kubikwurzeln erhalten wurden, so ist dieselbe in der Figur darnach bezeichnet worden.

Jene Punkte der Ebene, welche die noch fehlenden complexen Werte der Kubikwurzeln darstellen, liegen bekanntlich für alle $+z$ auf den beiden Strahlen, welche mit der $+y$ Achse als dritten die Dreiteilung des vollen Winkels um O bilden und zwar in einer Entfernung von O gleich dem reellen Werte von $\sqrt[3]{z}$.

Sind die gegebenen Werte von z numerisch sehr gross oder sehr klein, so wird auch φ sehr klein und L für das „Anlegen" des rechten Winkels ungünstig ausfallen. Man hat dann statt z nur $\frac{1}{n^3}z$ aufzutragen, unter n eine beliebige rationale, ganze oder gebrochene Zahl > 1 verstanden und erhält bei günstiger Wahl von n immer gute Verhältnisse für die Ausführung der Construction. Die daraus erhaltene Wurzel ist dann der $n$te Teil von $\sqrt[3]{z}$. Aber auch bei Werten von z, die sehr nahe der Einheit sind, wird eben φ sehr nahe an 90° und das Verfahren wieder unsicher, und wird man, um dem auszuweichen, den Coefficienten $n < 1$ zu nehmen haben.

Anmerkung. Mit dem graphischen Kubikwurzelziehen sind die Lösungen mancher Aufgaben aus der Stereometrie verknüpft: so die Verwandlungen von Polyedern in inhaltsgleiche Würfel, das verallgemeinerte Deli'sche Problem der Bestimmung einer Dimension jenes fraglichen Körpers, welcher bei beliebig normirtem Inhaltsverhältniss einem gegebenen Körper ähnlich sei, u. s. w.

Aus den Tafeln folgert man leicht die näherungsweisen trigonometrischen Tangenten der Centriwinkel einer 7, 11 und 13 Teilung des Kreisumfanges mit nachstehend angegebenen linearen Fehlern der Teilungssehnen:

Es ist $\operatorname{tg}\frac{360}{7} = \sqrt[3]{2}$ bei einem Sehnenfehler von $+\frac{1}{434}$

„ „ $\operatorname{tg}\frac{360}{11} = \sqrt[3]{\frac{1}{3\frac{3}{4}}}$ „ „ „ „ $-\frac{1}{645}$

„ „ $\operatorname{tg}\frac{360}{13} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ „ „ „ „ $-\frac{1}{234}$

Die Radicanden sind eben für die Anwendung bei beliebigen Kreisen ohne Voraussetzung eines Massstabes leicht herzustellen.

Bei den vollständigen kubischen Gleichungen wurde noch auf einen besonderen Transversalschnitt hingewiesen, der dort durch die Gleichung

$$x(e+f\operatorname{ctg}\varphi)+y(f-e\operatorname{ctg}\varphi) = 1$$

charakterisirt ist und für n als Substitutionswert in (1) ergab:

$$n = f - e\operatorname{ctg}\varphi + y + x\operatorname{ctg}\varphi$$

Für unsere Specialisirung, wo F auf der x Achse liegt, hat man für die Transversale, da jetzt $f = 0$ ist, die Gleichung

$$y = x\operatorname{tg}\varphi$$

d. i. aber unsere Leitgerade L selbst.

Nennen wir die Strecken, die auf derselben durch die Scheitelpunkte der anzulegenden rechten Winkel — gezählt vom Ursprung aus — markirt werden, z, so hat man zunächst zu setzen

$$x = z\cos\varphi, \quad y = z\sin\varphi$$

und erhält damit

$$n = \frac{z - e\cos\varphi}{\sin\varphi}$$



Für die folgenden Betrachtungen wollen wir die bisherige positive mit der negativen Seite der x Achse vertauschen, haben also in obiger Gleichung (8) das $+r$ durch $-r$ zu ersetzen, wodurch sie übergeht in

$$n^3 + (2r + e)\operatorname{ctg}\varphi\, n^2 - r(2e + r)n - r^2 e \operatorname{ctg}\varphi = 0 \qquad (8')$$

Entwickelt man von dem Substitutionsresultate der Grösse n nur die Teile mit z^2, so lassen sie sich in den Ausdruck zusammenziehen

$$\frac{2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}(r - e)z^2$$

woraus man die weitere Bedingung

$$e = +r$$

entnimmt, für welche der Ausdruck des Transversalschnittes sich in einer reducirten kubischen Gleichung darstellen wird. Darnach ist in (8′) zu setzen für

$$n = \frac{z - r\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Nach leichten Reductionen folgt der einfache Ausdruck

$$z^3 - 3r^2z + 2r^3\cos\varphi = 0 \text{ *)} \qquad \text{(VII)}$$

der mit der allgemeinen Form

$$z^3 - pz + q = 0$$

verglichen für r und φ die Werte

$$r = \sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \cos\varphi = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}} = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 : \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

---

*) Kürzer als durch alle diese Specialisirungen erhält man diesen Ausdruck durch die Auffassung, dass die Strecken z nichts anderes sind als die Radienvectoren für die Punkte der durch Grundkreis und Fixpunkt F gegebenen Kreisfusspunktscurve bezogen auf ein Polarcoordinatensystem. Die Polarachse desselben verbindet den Kreismittelpunkt mit F dem Mittelpunkt der Lotstrahlen, und der Pol des Systems ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreise. Für ein rechtwinkliges Achsensystem mit dem Pol des obigen Systems als Ursprung und der Polarachse als positiver Seite der x Achse wird die Gleichung der Kreisfusspunktscurve bekanntlich

$$[y^2 + (x - e)^2]r^2 = [y^2 + (x + r)(x - e)]^2$$

woraus durch Uebergang auf das Polarsystem (z, φ) die Polargleichung — mit obiger übereinstimmend — sich in

$$z^3 - 3r^2z + 2z^3\cos\varphi = 0$$

ergibt.

liefert. Daraus erkennen wir aber sofort die Einschränkung in den Werten der Coefficienten durch die Bedingung

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

wenn ein Winkel φ möglich sein soll. Obiger Ausdruck (VII) eignet sich daher ausschliesslich zur Behandlung des irreduciblen Falles der reducirten kubischen Gleichungen. In Folge des einfachen Zusammenhanges dieses Falles mit der „Dreiteilung des Winkels" kann die erhaltene Gleichung (VII) mit Vorteil zur Behandlung dieses Problems ausgenützt werden.

Trisection des Winkels.

Setzt man wieder den Grundkreisradius $r = 1$ und führt den Winkel $\alpha = 180 - 2\varphi$ ein, so geht (VII) über in

$$z^3 - 3z + 2\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \qquad \text{(VII')}$$

$(-\alpha)$ ist dann, wie aus Fig. 9. ersichtlich, nichts anderes als der Centriwinkel des Grundkreises, der über jenen Bogen aufsteht, den die Leitgerade mit der Neigung φ von diesem Kreise abschneidet. Darnach sind die Wurzeln dieser Gleichung nach der bekannten trigonometrischen Lösung

$$w_1 = -\text{chord}\left(\frac{360 + \alpha}{3}\right); \quad w_2 = \text{chord}\frac{\alpha}{3}; \quad w_3 = \text{chord}\left(\frac{360 - \alpha}{3}\right)$$

Wir erhalten demnach direct von einem Winkel α die Sehnen seines dritten Teiles, des Drittels seines Explementes und des um einen ganzen Umfang vermehrten Winkels — für den Grundkreis. Da alle drei Wurzeln der reducirten kubischen Gleichung in diesem Falle reell sein müssen, so kann für den ungünstigen Fall einer sich ungenau ergebenden Wurzel, dieselbe nach der algebraischen Summe der beiden anderen corrigirt werden.

Verlängert man den schiefen Schenkel von α über den Mittelpunkt hinaus, so erhält man von der positiven x Achse an gerechnet den Winkel $180 - \alpha$, der nun ebenso behandelt werden kann, wie früher α, so dass der zugehörige Winkel φ jetzt in $(90 + \varphi)$ überging. Dann erhalten wir auf der neuen Leitgeraden L', welche den Endpunkt des Winkel-Schenkels $(180 - \alpha)$ mit O verbindet, offenbar sofort durch „Anlegen" des rechten Winkels die Wurzelwerte der Gleichung (VII') für diesen Winkel in

$$w_1' = \text{chord}\left(\frac{540 - \alpha}{3}\right); \quad w_2' = -\text{chord}\left(\frac{180 - \alpha}{3}\right)$$

$$w_3' = -\text{chord}\left(\frac{180 + \alpha}{3}\right)$$

Um weitere Eigenschaften der Figur nachzuweisen, denke man sich in einem Halbkreise des Grundkreises aus den Endpunkten seines Durchmessers die erhaltenen Wurzelwerte w und w' als Sehnen aufgetragen, so müssen folgende Paare dieser Werte als (rechtwinklige) Supplementarsehnen sich zusammenfügen, nämlich

$$\begin{array}{lllll}
\text{chord}\left(180 - \frac{\alpha}{3}\right) & \text{und} & \text{chord}\,\frac{\alpha}{3} & \text{d. i. } w_1' & \text{und } w_2 \\
\text{chord}\left(120 + \frac{\alpha}{3}\right) & ,, & \text{chord}\left(60 - \frac{\alpha}{3}\right) & ,, \ w_1 & ,, \ w_2' \\
\text{chord}\left(120 - \frac{\alpha}{3}\right) & ,, & \text{chord}\left(60 + \frac{\alpha}{3}\right) & ,, \ w_3 & ,, \ w_3'
\end{array}$$

und die Winkel, welche dann diese Supplementarsehnen mit dem Durchmesser bilden, müssen dann beziehungsweise sein

$$\begin{array}{llll}
\text{für } w_1' & \text{Winkel } \frac{\alpha}{6}, & \text{für } w_2 & \left(90 - \frac{\alpha}{6}\right) \\
,, \ w_1 & ,, \ \left(30 - \frac{\alpha}{6}\right), & ,, \ w_2' & \left(60 + \frac{\alpha}{6}\right) \\
,, \ w_3 & ,, \ \left(30 + \frac{\alpha}{6}\right), & ,, \ w_3' & \left(60 - \frac{\alpha}{6}\right)
\end{array}$$

Da aber in unserer Figur die beiden Leitgeraden L und L' aufeinander senkrecht stehen, ferner von O aus auf denselben, vermöge des mechanischen Verfahrens, die in Rede stehenden Wurzelwerte bis zu den gleichbezeichneten Punkten gerechnet, abgeschnitten erhalten werden, so müssen umgekehrt die von F ausgehenden Schenkel der „angelegten" rechten Winkel zwischen den rechtwinkligen Leitgeradenachsen L und L' Strecken gleich dem Durchmesser des Grundkreises aufweisen, das heisst, man hat

$$\overline{w_1'w_2} = \overline{w_1w_2'} = \overline{w_3w_3'} = 2r$$

und die Winkel in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken, deren Katheten die besagten Wurzelwerte sind und deren Hypotenuse stets gleich $2r$ vom Grundkreise ist, müssen die in der Figur eingezeichneten Werte haben, welche aus obiger Zusammenstellung zu entnehmen waren.

Aus den Dreiecken

$$(F, O, \text{beziehungsweise } w_1, w_2, w_3, w_1', w_2', w_3')$$

entnehmen wir mit Rücksicht, dass $\varphi = 90 - \frac{\alpha}{2}$ ist, die Neigungen der aus F ausgehenden Schenkel der „angelegten" rechten Winkel zur x Achse, die in der Figur eingezeichnet wurden. Die zu ihnen parallel gezogenen Kreisdurchmesser verbinden die Berührungspunkte paralleler Tangentenschenkel und sind zugleich Teilungslinien für die Trisection der Winkel

$$(180 - \alpha) \text{ und } (360 + \alpha), \text{ dann } (360 - \alpha) \text{ und } (180 + \alpha),$$
$$\text{endlich } (540 - \alpha), \ \alpha$$

von denen w und w' die Sehnen ihrer dritten Teile sind. Das Verfahren bietet gewiss ausreichend viele Genauigkeitsproben.

Die Anordnungen in Fig. 10 und 11 sind für die Trisection beliebig veränderlicher α und ihrer Supplemente getroffen, wenn zugleich sämmtliche Teilungslinien direct durch das „Winkelanlegen" sich ergeben sollen. Dazu bedarf es dreier Leitgeraden durch O. Die erste L_1 geht parallel zum schiefen Schenkel des gegebenen Winkels; die beiden anderen L_2, L_3 beziehungsweise durch die Endpunkte p_2, p_3 eines zu L_1 parallelen Kreisdurchmessers.

Zu den Verfahrungsweisen des graphischen Kubikwurzelziehens und der Trisection des Winkels möge die Bemerkung gestattet sein, dass nach verzeichneten Grundfactoren zur mechanischen Lösung der Aufgabe der Gebrauch des Zirkels entfällt und lediglich nur „Winkelanlegen" und Parallelverschiebungen angewendet werden, was zur Raschheit der Ausführung beiträgt.

Dass sich, sowie aus den letzten reducirten Gleichungen (V) und (VII) auch aus den früheren (II) bis (IV), Constructionsverfahren für das Kubikwurzelziehen und die Trisection des Winkels ableiten liessen, zeigen die Ausdrücke der trigonometrischen Lösung jener Gleichungen. Eben daraus wird man aber auch erkennen, dass die aus diesen Ausdrücken folgenden Constructionen niemals so einfach, als die oben durchgeführten sich gestalten können, weshalb deren Aufstellung nur ein müssiges Unternehmen wäre.

Anmerkung. Eine Trisection von $\varphi = 120^0$ führt zur 9 Teilung des Kreisumfangs.

Nützt man ferner eine ältere, bekannte Construction der näherungsweisen Verzeichnung eines regulären 11 Eckes aus einer Seite, welche auf die 6 Teilung des Winkels von 60^0 basirt ist, entsprechend



aus und umformt dieselbe, so ergibt sich die in Fig. 12. dargestellte näherungsweise Teilung des Kreisumfanges in 11 gleiche Teile. — Der mit $\frac{r}{2}$ zum gegebenen Kreise concentrisch beschriebene K ist Grundkreis, F Fixpunkt und L Leitgerade, welch letztere die verlängerte Sehne des Centriwinkels von 75^0 ist. „Legt" man an diese Grundfactoren den rechten Winkel „an", so trifft dessen Tangentenschenkel den unter 30^0 gezogenen Kreisdurchmesser in δ und die Verbindungslinie δF schneidet auf dem Kreise vom Anfangspunkte A gerechnet den angenäherten 11ten Teil des Kreisumfanges ab. Eine einfache Berechnung ergab einen linearen Sehnenfehler der Näherung von $\left(-\frac{1}{220}\right)$

Sieht man in obiger Fig. 9. die beiden Leitgeraden L und L_1 als rechtwinkliges Achsenpaar der Ebene an, so ist F ein beliebiger Punkt in einem Quadranten, und in der Figur ist die Lösung folgender planimetrischer Aufgage gegeben:

„Durch einen gegebenen Punkt sind drei Gerade so zu ziehen, dass sie innerhalb rechtwinkliger Achsen gleiche Strecken von der Länge der doppelten Entfernung des Punktes vom Achsenmittelpunkt aufweisen."

Die Halbirungspunkte jener Strecken liegen auf einem Kreise, der aus O, durch F gehend, beschrieben wird. Verbindet man einen derselben mit O, so ergibt sich durch Betrachtung der Winkel, die in dem rechtwinkligen Dreieck auftreten, das aus den Achsen und der betreffenden Strecke gebildet wird, der Zusammenhang unserer Aufgabe mit jener der Trisection des Winkels LOF.

Zu den Fig. 10 und 11 kann man noch die Bemerkungen machen, dass sich die Tangentenschenkel der obern und untern rechten Winkel bei Anwendung von L_1 beziehungsweise mit den Fixpunktschenkeln der rechten Winkel bei den Benutzungen von L_3 und L_2 respective in den Punkten u und v schneiden, welche auf dem Kreisdurchmesser — der Neigung α gegen die x Achse — liegen müssen. Diese Bedingung kann als Genauigkeitscontrolle des Verfahrens dienen. Es wird genügen dieselbe an Fig. 10. und Punkt u nachzuweisen.

Durch Anwendung der Leitgeraden L_3 ist der Winkel $(1'ox)$ in der Linie $(2'o)$ halbirt worden. Zu letzterer ist der Fixpunktschenkel der an L_3, F, K „angelegten" rechten Winkel parallel, somit hat man

$$ot \parallel O1' \parallel Fu \text{ und wegen } \overline{OF} = \overline{oO} \text{ auch } \overline{u1'} = \overline{1't}$$

Demnach ist

Wkl. $(uo1')$ = Wkl. $(1'ot)$, also Wkl. (uox) = 3. Wkl. $(2'ox)$

oder die Linie uo muss mit dem Schenkel Bo des gegebenen Winkels zusammenfallen, d. h. der durch den Fixpunktschenkel des rechten Winkels bei Anwendung von L_3 auf der Tangente in $2'$ erhaltene Punkt „u“ auf Bo liegen.

Man kann demnach die zweiten Teilungslinien auch aus u, v oder $1'$, 1 ableiten durch die Parallelen zu Fu, $1'O$ resp. Fr, $1O$, aber damit werden eben die Teilungslinien nicht von einander unabhängig erhalten wie bei Anwendung von L_3 und L_2.

Mit unseren Hilfsmitteln sind wir auch im Stande die Werte der Kubikwurzel einer gegebenen complexen Zahl darzustellen. Es ist dies in Fig. 13. durchgeführt.

Es sei eine complexe Zahl

$$P = y + ix$$

gegeben und der Punkt der Ebene, welcher sie repräsentirt, gleich bezeichnet. Dann kommt die Aufgabe der Darstellung der Kubikwurzeln aus dieser Zahl darauf hinaus, zwischen dem Anfangspunkte $y = +1$ und dem Punkte P gebrochene Linienzüge mit 2 Ecken so einzuschalten, dass die drei aufeinanderfolgenden Dreiecke, welche respective von den Seiten des Linienzuges und den Verbindungsstrahlen der Ecken sowie der Punkte $(+1)$ und P mit dem Mittelpunkte O gebildet werden, einander ähnlich sind. Hiebei sind die Seiten des Linienzuges zu einander, sowie jene Verbindungsstrahlen einander homolog. Der erste Eckpunkt eines solchen Linienzuges — von $+1$ gerechnet — stellt dann $\sqrt[3]{P} = p_1, p_2, p_3$, der zweite $\sqrt[3]{P^2} = p_1^2, p_2^2, p_3^2$ dar. Es ist möglich diese Bedingung der Linienzüge auf dreifache Weise zu erfüllen, die den drei Wurzelwerten entsprechen. Was zunächst die Mittelpunktsstrahlen anbelangt, auf denen die dieselben darstellenden Punkte liegen müssen, so wird durch jene der Werte p_1, p_1^2 der Winkel $yOP = \varphi$ in drei Teile geteilt, wie es der Bedingung entspricht. Um die Strahlen für die beiden andern Werte zu erhalten sind die dritten Teile des einmaligen und zweimal genommenen Umfangs d. i. $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ zweimal nacheinander an $\frac{\varphi}{3}$ und $\frac{2\varphi}{3}$ anzufügen. Die Entfernungen der fraglichen Punkte von O ergeben sich aber als

$$\sqrt[3]{OP} = Op_1 = Op_2 = Op_3 \text{ und } \sqrt[3]{\overline{OP}^2} = Op_1^2 = Op_2^2 = Op_3^2$$

$$OP = \sqrt{y + ix}$$

d. h. sind auf den Kreisen der Punkte p_1, p_1^2 gelegen.

Sucht man dieselben Wurzelwerte zur conjugirten Zahl

$$P' = y - ix$$

von P, so erkennt man sofort, dass sich auch zu jedem der früheren Werte ein conjugirter findet, d. h. zu jedem Eckpunkt der Linienzüge ein ihm symmetrischer bezüglich der y Achse als Symmetrale.

Denkt man sich die beiden conjugirten Zahlen P und P' als Radicanden für die Wurzelausdrücke der Cardanischen Auflösungsformel einer kubischen Gleichung, so müssen zur Bildung der reellen Wurzeln dieser Gleichung bekanntlich die einander conjugirten Kubikwurzelwerte für P mit jenen für P' zusammen genommen werden. Dies gibt die doppelten reellen Grössenteile solcher Wertepaare. Wir können aber die Wurzeln einer solchen Gleichung direct durch unser mechanisches Verfahren erhalten, indem wir den Kreis durch p_1, p_2, p_3 als Grundkreis, F in der Distanz $\overline{OF} = 2\overline{Op_1} = 2\overline{OA}$ als Fixpunkt und die durch A zum Strahle OP parallel gezogene L als Leitgerade nehmen, worauf die mit den durch p_1, p_2 und p_3 erhaltenen Werte Aw_1, Aw_2 und Aw_3 übereinstimmen. Dieser Fall kann eben als ein Beispiel für die gegenseitige Prüfung der Fundamental-Constructionen des Kubikwurzelziehens und der Trisection des Winkels gelten.

Man könnte nun auch jede reducirte kubische Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

bei beliebigen Vorzeichen und numerischen Werten von p und q, überhaupt durch die Construction der Cardanischen Formel lösen und hätte nur die Kubikwurzeln aus den Werten der Unbekannten von

$$x^2 + qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

zu bestimmen und die drei Werte der ersten mit jenen der zweiten entsprechend zusammen zu nehmen. Die beiden reellen geben auch die reelle Wurzel der kubischen Gleichung. Um auch die imaginären zu erhalten, dürfen nur jene complexen Werte der Kubikwurzeln zusammengefasst werden, deren Product gleich jenem der reellen Werte ist. Auch diese Untersuchung kann bekannter Massen graphisch vorgenommen werden.

Aber sowol letzt erwähnte Auflösungsart, als etwa jene der Construction der Wurzelausdrücke, wie sie sich aus einer trigonometrischen Lösung der kubischen Gleichungen ergeben, empfehlen sich weniger, als jene im Texte durchgeführten, die einfacher zum Ziele führen.

Behandlung der biquadratischen Gleichungen.

Sollen wir durch Transversalschnitte von den vier gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Tangenten die Wurzelwerte einer biquadratischen Gleichung erhalten, so können wir ein Achsensystem in Bezug auf Grundkreis und Fixpunkt ganz ebenso wie bei den kubischen Gleichungen wählen, wobei wir dieselbe Bezeichnung der Grössen beibehalten, und nur der Leitgeraden L haben wir eine allgemeine, durch keine Bedingung eingeschränkte Lage zu geben. Die Lagenverhältnisse der Grundfactoren zeigt darnach (Fig. 14.), in welcher L auf der y Achse $+k$ abschneidet und unter φ gegen die x Achse geneigt ist. Ihre Gleichung wird

$$y - x \operatorname{tg} \varphi - k = 0.$$

Damit ändert sich die dritte Zeile der bei den kubischen Gleichungen aufgestellten Bedingungsdeterminante auf

$$\left| 1, \quad -\operatorname{tg}\varphi, \quad -k \right|$$

und die Determinante geht über in:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{m} & -1 \\ \frac{1}{m} & \frac{-1}{n} & \left(\frac{e}{n} - \frac{f}{m}\right) \\ 1 & -\operatorname{tg}\varphi & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{n}{m} & -n \\ \frac{n}{m} & -1 & \left(e - f\frac{n}{m}\right) \\ 1 & -\operatorname{tg}\varphi & -k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{n}{m} + \operatorname{tg}\varphi & k - n \\ \frac{n}{m}\operatorname{tg}\varphi - 1 & \frac{n}{m}(k-f) + e \end{vmatrix} = 0$$

Da der Bedingung einer Kreistangente gemäss

$$\frac{n}{m} = \frac{n^2 - r^2}{2rn}$$

sein muss, und wir kürzehalber $(k - f) = \delta$ nennen wollen, so ergibt die Auswertung von

$$\begin{vmatrix} (n^2 - r^2) + 2rn \operatorname{tg}\varphi & 2rn(k-n) \\ (n^2 - r^2)\operatorname{tg}\varphi - 2rn & (n^2 - r^2)\delta + 2ern \end{vmatrix} = 0$$

die nach n geordnete Gleichung, die wir wegen Beibehaltung des y Achsenschnittes gleich in y schreiben wollen:

$$y^4 + 2r\frac{e - f\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2r}{+2r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta}y^3 + 2r^2\frac{2(e\,\mathrm{tg}\,\varphi + f) - r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta}{2r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta}y^2$$

$$-2r^3\frac{e - f\,\mathrm{tg}\,\varphi}{2r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta}y + \frac{\delta r^4}{2r\,\mathrm{tg}\,\varphi + \delta} = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

Behufs Behandlung der vollständigen biquadratischen Gleichung

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0,$$

in welcher wieder unter a, b, c und d nicht die numerischen, sondern auch die Qualitätswerte der Coefficienten verstanden sein sollen, hat man die letztern den entsprechenden von (VIII) gleichzusetzen und erhält vier Gleichungen für die 5 Grössen r, δ, φ, e und f, wobei wir wieder r willkürlich annehmen können. Das erhaltene Gleichungssystem ist ohne Schwierigkeiten aufzulösen und ergibt folgende rationalen Werte der obigen Bestimmungsgrössen:

$$\delta = \frac{-4d}{c + ar^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2(d - r^4)}{r(c + ar^2)}$$

während e und f wieder durch die Gleichungen

$$r(c + ar^2)f + 2(d - r^4)e = r[3d - r^2(b + r^2)] \qquad \text{(g)}$$

$$2(d - r^4)f - r(c + ar^2)e = -2r^2c \qquad \text{(g')}$$

sich darstellen lassen.

In einem concreten Falle wird man nach Annahme von r wieder zunächst $F(e, f)$ durch den Schnitt der beiden auf einander stehenden, durch (g) und (g') repräsentirten Geraden g und g' bestimmen. Hierauf sucht man δ und findet $k = f + \delta$, durch welchen Punkt der y Achse — wie aus $\mathrm{tg}\,\varphi$ ersichtlich — die Leitgerade L parallel, respective senkrecht zu den symmetrischen Linien der g beziehungsweise g' für die Coordinatenachsen als Symmetralen, zu legen sein wird. Die Geraden g und g' werden aber am einfachsten durch ihre Achsenschnittpunkte angegeben, wobei zu beachten ist, dass sie aufeinander senkrecht stehen. Die Werte für diese Achsenabschnitte sollen noch für vollständige und reducirte Gleichungen, bei allgemeinem r und für $r = 1$ im Folgenden angeführt werden:

A. Vollständige biquad. Gleichungen.

r allgemein und $r = 1$

$$g_x = \frac{3d - r^2(b + r^2)}{2(d - r^4)}r \qquad g_y = \frac{3d - r^2(b + r^2)}{c + ar^2}$$

$$g'_x = \frac{2rc}{c + ar^2} \qquad g'_y = \frac{-cr^2}{d - r^4}$$

$$g_x = \frac{3d-(b+1)}{2(d-1)} \qquad g_y = \frac{3d-(b+1)}{a+c}$$

$$g'_x = \frac{2c}{n+c} \qquad g'_y = \frac{-c}{d-1}$$

B. Reducirte biquad. Gleichungen.

$$g_x = \frac{3d-r^2(b+r^2)}{2(d-r^4)}r \qquad g_y = \frac{3d-r^2(b+r^2)}{c}$$

$$g'_x = 2r \qquad g'_y = \frac{-cr^2}{d-r^4}$$

$$g_x = \frac{3d-(b+1)}{2(d-1)} \qquad g_y = \frac{3d-(b+1)}{c}$$

$$g'_x = 2 \qquad g'_y = \frac{-c}{d-1}$$

Nachdem im Allgemeinen die Auffindung der reellen Wurzeln durch das mechanische Verfahren ermöglicht ist, werde noch zur Vervollständigung jene der imaginären Wurzeln besprochen. Das Vorhandensein von solchen, wollen wir consequenterweise auch graphisch ermitteln. Zu dem Zwecke verzeichne man sich separat eine möglichst genaue Parabel P, die für Untersuchung beliebig vieler Fälle genügt. Aus den gegebenen Gleichungen leite man die Grundfactoren her, und aus diesen übertrage man den Grundkreis K ähnlich so in die Figur der Parabel P nach k, wie er gegenüber jener durch Leitgeraden L und Fixpunkt F bekannter Massen gegebenen Parabel im Systeme der Grundfactoren gelegen ist. Ein Blick auf k und P belehrt uns, ob 4 reelle oder 1 Paar oder 2 Paare imaginärer Tangenten zwischen diesen Gebilden gemeinschaftlich zu legen möglich sind. Dem entspricht dann auch das Vorhandensein eben solcher Wurzeln der betreffenden biquadratischen Gleichung.

Ist ein Paar imaginärer Wurzeln vorhanden, so ist ihre Aufsuchung bekanntlich eine Aufgabe 2ter Ordnung.

Es sei das Trinom

$$y^2 + my + n = (y - w_1)(y - w_2)$$

d. i. dem Producte der Wurzelfactoren der erhaltenen reellen Wurzeln w_1 und w_2, wobei also

$$m = -(w_1 + w_2), \quad n = w_1 w_2$$

wird, so ist das gegebene Gleichungspolynom durch dieses Trinom teilbar und der Quotient wird einfach

$$y^2 + (a-m)y + \frac{d}{n} = 0$$

da in Folge der Voraussetzung dann

$$n(a-m) = c - m\frac{d}{n} \quad \text{und} \quad d = a[(b-n) - m(a-m)]$$

werden muss. Der gleich Null gesetzte Quotient liefert aufgelöst die fehlenden imaginären Wurzeln — wie es bei den kubischen Gleichungen der Fall war und durchgeführt wurde. Man kann aber auch — ganz in derselben Weise wie dort — die Ermittlung der imaginären Wurzeln auf jene der imaginären Doppelpunkte einer auf der Transversalen yO auftretenden Punkteinvolution zurückführen, wobei im Allgemeinen der Contingenzpunkt der reellen Tangenten nicht mehr auf der Transversalen zu liegen kommt. Die Anführung eines Beispieles kann wegen der völligen Gleichförmigkeit mit jenem bei den kubischen Gleichungen erledigten Falle hier füglich unterbleiben.

Sind nun 2 Paare imaginärer und zwar ungleiche Wurzeln vorhanden, so ist dies der einzige Fall, der sich direct nicht behandeln lässt.

Man wird der Ermittlung eines solchen Wurzelpaares durch die mühsam aufzustellenden Gleichungen für u und v, die sich aus dem Substitutionsresultate von $y = u + iv$ nach Trennung der reellen und imaginären Teile ergeben — jedenfalls das Zurückgehen auf die bekannte kubische Resolvente vorziehen. Nennen wir die Wurzeln der letzteren z_1, z_2 und z_3, so lässt sich die reelle durch das mechanische Verfahren finden, woraus sich die beiden imaginären bekanntermassen ableiten. Zur Aufstellung der Wurzelwerte der biquadratischen Gleichung sind die Quadratwurzeln aus obigen Werten nach dem Schema

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} \mp \sqrt{z_3} & w_3 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3} \\ w_2 &= +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3} & w_4 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \mp \sqrt{z_3} \end{aligned}$$

zusammenzunehmen, wobei entweder die oberen oder die unteren Zeichen des letzten Teiles gelten, wenn der Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten jener aus der gegebenen vollständigen biquadratischen Gleichung abgeleiteten reducirten entweder positiv oder resp. negativ ist.

Sind die beiden Paare der imaginären Wurzeln aber gleich, so ist deren Aufsuchung eine Aufgabe 2ter Ordung, die später noch einmal berührt wird.

Noch besonders zu besprechen sind die

Fälle mit gleichen Wurzeln.

Durch die Behandlung dieser Fälle für biquadratische Gleichungen sind offenbar auch jene der kubischen erledigt, von denen betreffenden Ortes nur das analytische Kennzeichen ihres Vorhandenseins angegeben wurde.

Hat die gegebene biquadratische Gleichung

1) ein Paar gleicher Wurzeln, so berührt der Grundkreis die Parabel (LF) nur einmal nach 1ter Ordnung.

2) Für 2 Paare gleicher Wurzeln, die α) reell oder β) imaginär sein können, wird die Parabel vom Grundkreis doppelt berührt und zwar in reellen resp. imaginären Punkten *).

3) Der Grundkreis wird zum Osculationskreis der Parabel, wenn die gegebene Gleichung drei gleiche Wurzeln besitzt.

4) Endlich ist K Osculationskreis im Scheitel der Parabel, wenn die betreffende biquadratische Gleichung vier gleiche Wurzeln aufweist. K geht dann am Scheitel mit der Parabel eine Berührung dritter Ordnung ein.

Die Constatirung dieser Fälle wird auf graphischem Wege naturgemäss etwas unsicher, da Parabel und Kreis Berührungen 1ter, 2ter und 3ter Ordnung eingehen werden. Hier wird dann in bestimmter Weise das analytische Kriterium für die Gleichungscoefficienten den Fall entscheiden, und dann die graphische Darstellung die Auffindung der Wurzeln leicht ermöglichen.

Unter Voraussetzung der Normalform

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

wo unter a, b, c und d auch die Vorzeichen einbegriffen sind, bestehen für das Eintreten der einzelnen Fälle folgende analytische Kriterien für die Coefficienten, denen gleich die entsprechenden Bemerkungen über die graphische Bestimmung der Wurzelwerte angeschlossen werden mögen:

---

*) Ist statt einer Kreistangente eine Gerade in allgemeiner Lage als Transversale gegeben, so ist der Fall von 2 Paaren gleicher reeller Wurzeln auch möglich, wenn die Transversale mit einer der 3 Diagonalen des vollständigen Vierseits aus den gemeinsamen Kreis-Parabel-Tangenten zusammenfallen würde. In unserm Falle können gleiche Wurzelpaare nur für doppelte Berührung von Kreis und Parabel eintreten.

Ad 1). Ein Paar gleicher Wurzeln ist vorhanden für die Erfüllung der Bedingung

$$\begin{vmatrix} 8b - 3a^2 & 6c - ab & 16d - ac \\ 6c - ab & (4d + 2ac - b^2) & 6ad - bc \\ 16d - ac & 6ad - bc & 8bd - 3c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Sind die beiden ungleichen Wurzeln imaginär', so ist deren Bestimmung die bekannte Aufgabe zweiter Ordnung.

Ad 2). Bestehen die Wurzeln aus zwei Paaren gleichen, reellen oder imaginären Werten, so müssen die Gleichungen stattfinden:

$$a^3 - 4ab + 8c = 0$$
$$c^2 - a^2 d = 0$$

und die Auffindung der Wurzeln reducirt sich auf eine Aufgabe zweiter Ordnung. Ihre Werte erscheinen in den Formen:

$$w_{1,3} = w_{2,4} = \tfrac{1}{4}[-a \pm \sqrt{3a^2 - 8b}] = \tfrac{1}{4}\left[-a \pm \sqrt{c\left(\frac{e}{d} - \frac{16}{a}\right)}\right],$$

woraus man sogleich die Bedingung für das Reell- oder Imaginärsein entnimmt.

In der graphischen Darstellung muss dann der Kreis der Parabel doppelt berührend einbeschrieben, also der Mittelpunkt auf der Parabelachse gelegen sein. Sei p der Halbparameter der Parabel, gleich der doppelten Entfernung des Fixpunktes von der Leitgeraden, dann r der Grundkreisradius, so muss

für reelle Wurzeln $r > p$
„ imaginäre „ $r < p$

sein. In beiden Fällen findet man die immer reelle Sehne der Berührungspunkte zwischen Kreis und Parabel, indem man in der Entfernung p vom Kreismittelpunkt (gegen den Parabelscheitel hin gemessen) eine Parallele zur Scheiteltangente L zieht. Der Pol dieser Sehne bezüglich Parabel oder Kreis ist auf der Parabelachse gelegen und zugleich Schnittpunkt der reellen oder imaginären gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspunkten. Um ihn zu erhalten, hat man nur vom Brennpunkt F die Entfernung bis zum Kreismittelpunkt in entgegengesetzter Richtung auf die Parabelachse zu übertragen. Die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten auf der transversalen y Achse stellen jeder ein Paar gleicher Wurzeln dar. Deren Auffindung ist in dem Falle, als sie imaginär sind, schon bei Gelegenheit der Darstellung der imaginären Wurzeln der kubi-



schen Gleichungen gezeigt worden. Unter Voraussetzung obiger Bedingungen ist das ursprüngliche Gleichungspolynom das vollständige Quadrat von:

$$y^2 + \frac{a}{2}y + \frac{c}{a}$$

und die Wurzeln dieses gleich Null gesetzten Ausdruckes sind zugleich die verlangten der gegebenen biquadratischen Gleichung

Ad 3). Die Gleichung 4ten Grades besitzt drei gleiche Wurzeln, wenn ihre Coefficienten die Bedingung erfüllen:

$$\begin{vmatrix} 10b - 3a^2 & 12c - ab & 12d \\ 3ab & 5b^2 - 36d & 6(bc - 3ad) \\ 6 & 3a & b \end{vmatrix} = 0$$

Die gleiche Wurzel $w_{1,2,3}$ hat dann den Wert:

$$w_{1,2,3} = \frac{3}{2} \frac{3a^2c - ab^2 - 2bc}{4b^2 - 9ac}$$

und steht mit der vierten, ungleichen Wurzel im einfachen Zusammenhang durch die Relation:

$$3w_1 + w_4 + a = 0$$

Da sich die Wurzeln aus den Coefficienten der Gleichung rational darstellen, so können selbe auf einfachem Wege ohne das mechanische Verfahren ermittelt werden.

Der Grundkreis K (Fig. 15.) ist in diesem Falle Osculationskreis der Parabel F, L, also sein Mittelpunkt o der Krümmungsmittelpunkt eines Parabelpunktes dessen Krümmungsradius r bekannt ist. Schneidet man mit der Grösse $\frac{3}{2}r$ aus o nach der entgegengesetzten Seite der Parabelachse auf der Directrix DD der Parabel den Punkt N ab (der auf der Figur nicht ausdrücklich bezeichnet ist), so erhält man in ON die Parabelnormale für den Krümmungsmittelpunkt o und im Schnitte P mit dem Kreise K den betreffenden Berührungs- (resp. Schnitt-) Punkt des Osculationskreises und der Parabel. Die Tangente in P repräsentirt drei gemeinschaftliche Kreis-Parabel-Tangenten und schneidet auf der y Achse vom Ursprung genommen die dreifache Wurzel $w_{1,2,3}$ ab. Die Wurzel w_4 bestimmt sich daraus am einfachsten mit Hilfe obiger Relation.

Die nach folgender Bemerkung ermittelte 4te gemeinschaftliche Kreis-Parabel-Tangente mag zur Genauigkeitscontrolle des bisher Erhaltenen dienen. Der Grundkreis K und die Parabel F, L sind zueinander collinear verwandt für die Tangente im Osculationspunkte P

als Collineationsachse und ein noch unbestimmtes Centrum, das aber in diesem Falle bekanntlich auf der Collineationsachse gelegen sein muss. Ausserdem liegt es auf einem Verwandtschaftsstrahl. Der dem Osculationspunkte P des Kreises diametral gegenüberliegende Punkt u ist mit dem unendlich entfernten Punkt homolog, mithin schneidet die durch u auf die Leitgerade L errichtete Senkrechte auf der Tangente von P das fragliche Collineationscentrum ω ab. Durch ω lässt sich die letzte gemeinschaftliche Kreis-Parabeltangente genau legen und schneidet auf der y Achse w_4 ab.

Ad 4). Der äusserste Fall von vier gleichen Wurzeln tritt ein, wenn das Gleichungspolynom eine vollständige 4te Potenz des Wurzelfactors ist, also die Coefficienten die Bedingungen erfüllen:

$$8b = 3a^2, \quad 16c = a^3, \quad d = \left(\frac{a}{4}\right)^4,$$

wobei die Wurzel selbst den Wert

$$w_{1,2,3,4} = \frac{-a}{4} = w$$

besitzt. Der Grundkreis K berührt die Parabel im Scheitel nach 3ter Ordnung und hat den Radius

$$r = p,$$

während die Leitgerade L, als Scheiteltangente, die vier gemeinschaftlichen Kreis-Parabel-Tangenten repräsentirt und auf der y Achse den Wurzelwert w abschneidet.

Schlussbemerkungen.

1. Auf eine wesentliche Erweiterung der in vorliegender Arbeit ausgeführten Lösungsmethoden höherer Gleichungen soll im Folgenden noch aufmerksam gemacht werden.

Bis jetzt sind hauptsächlich jene Gleichungen 3ten und 4ten Grades hervorgehoben worden, deren Coefficienten der Potenzen der Unbekannten in Zahlenwerten gegeben waren. Bei der analytischen Behandlung von Aufgaben 3ter und 4ter Ordnung gelangt man aber zu solchen Gleichungen des entsprechenden Grades deren Coefficienten als Ausdrücke von der 1ten bis 3ten respective 1ten bis 4ten Dimension sich aus den Angabsstrecken darstellen.

Die entwickelten Lösungsmethoden können aber auch für solche, durchaus homogene Ausdrücke enthaltenen Gleichungen unverändert angewendet werden. Es ergibt sich dieses leicht aus der Betrachtung

der Ausdrücke für die Grundfactoren *e*, *f*, *k* (respective δ) und ctg φ, welche bei wirklicher Wahl von *r* als Strecke, mit Rücksicht der Dimensionen der Gleichungscoefficienten durchaus homogene Ausdrücke der ersten, beziehungsweise nullten Dimension werden, sowie aus dem Umstande, dass bei der ganzen Ableitung die eingeführten Grössen sowohl Angabsstrecken einer Aufgabe 3ter oder 4ter Ordnung, als auch solche bedeuten können, die mit Zugrundelegung einer Massstabeinheit, die gegebenen Zahlenwerte einer Gleichung solchen Grades repräsentiren. Die Ausdrücke für die Grundfactoren setzen sich aus den Gleichungscoefficienten rational zusammen, sind also eindeutig bestimmbar, nachdem die Coefficienten aus den Angabsstrecken der Aufgabe hergestellt wurden.

Darnach kann man also die analytische Lösung jeder Aufgabe 3ter oder 4ter Ordnung constructiv ausführen. Dies ist in der Tat in der vorstehenden Abhandlung mit den beiden Fundamentalproblemen — der „Trisection des Winkels" und des „graphischen Kubikwurzelziehens" (welches ja geometrisch aufgefasst gleich ist der Verwandlung eines Parallelepipeds in einen volumgleichen Würfel) — in der einfachsten Weise durchgeführt worden. Der gleiche Weg dürfte noch für manche von derlei Aufgaben der passendste sein. Im Allgemeinen muss man jedoch zugestehen, dass diese Methode häufig an einer Umständlichkeit und geringen Uebersichtlichkeit leiden wird. Eine befriedigende, rein geometrische Lösung der Aufgaben 3ter und 4ter Ordnung vermögen nur die Lehren der neueren Geometrie zu liefern, mit deren Ausführungen man das in vorliegender Arbeit angewendete, mechanische Verfahren vereinen kann.

Eine auf rein geometrische Entwicklungen basirte Lösung des behandelten Hauptproblemes hat in genialer Weise Chasles in seiner Abhandlung „Construction des racines des équations du troisième et quatrième degré" veröffentlicht im Journal des mathematiques, publié par Liouville t. XX. pag. 329 geliefert. Er führte die Aufgabe auf jene der Bestimmung der Schnittpunkte eines gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes mit einem anderen, durch fünf Punkte gegebenen, zurück.

Auch Dr. Herm. Kortüm weist auf eine Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen mittelst Construction hin. Es geschieht dies in seinen „zwei Abhandlungen über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades" (Bonn 1869), worin die Aufgabe gelöst wurde, die Bestimmung der Durchschnittspunkte zweier, durch je 5 Punkte gegebener Kegelschnitte zurückzuführen auf jene zwischen einem Kreise und einem ein für allemal gezeichnet vorliegenden Kegelschnitte. In den Lösungsmethoden vorstehender Arbeit ist der unbedingt notwendige Kegelschnitt stets eine Parabel, die dann durch

das angewendete, mechanische Grundverfahren ersetzt wurde. Dies ergab eben den für die praktischen Zwecke ziemlich directen Weg, der mit Berücksichtigung der beschriebenen Hilfsconstructionen auch immer ausreichend genaue Resultate liefern wird.

2. Will man das in vorliegender Arbeit angewendete mechanische Verfahren mittelst des rechten Winkels nicht als zulässig gelten lassen, so ist doch in der ganzen Durchführung auch schon die Lösung mittelst einer einfachen Hilfscurve mit inbegriffen.

Es wurde schon bei Aufstellung jenes Grundverfahrens bemerkt, dass der durch dasselbe auf der Leitgeraden erhaltene Scheitelpunkt des beweglichen rechten Winkels eben nichts anderes ist als der Durchschnitt jener Geraden mit der Kreisfusspunktscurve, die durch den Grundkreis K und Fixpunkt F als Strahlenmittelpunkt gegeben erscheint.

Das in der Nähe jenes fraglichen Schnittpunktes verlaufende Curvenstück kann mit grosser Schärfe, also der Punkt selbst ausreichend genau ermittelt werden und ist dann in der auseinandergesetzten Weise zur Bestimmung der fraglichen Wurzelwerte der gegebenen Gleichung entsprechend auszunützen.

II.

Ueber ein Problem der Curventheorie.

Von

R. Hoppe.

Das Problem, um welches es sich handelt, lautet folgendermassen.

Zwischen den Winkeln, welche die Tangente, Hauptnormale und Binormale einer gesuchten Curve mit irgendwelchen festen Geraden bilden, ist eine Relation gegeben; man soll, bei willkürlich bleibendem, beliebig zu ergänzendem Bogenelement, den entwickelten analytischen Ausdruck der Curve finden.

Die Relation kann eine primitive oder eine Differentialgleichung sein; dagegen darf sie das Bogenelement nicht enthalten, weil sonst 2 Relationen zur Bestimmung erfordert würden.

Die Aufgabe ist dann gelöst, wenn die Richtungscosinus der Tangente f, g, h als Functionen eines Parameters bekannt sind, indem alsdann für beliebiges Bogenelement ∂s die Werte der Coordinaten

$$x = \int f \partial s; \quad y = \int g \partial s; \quad z = \int h \partial s$$

daraus hervorgehen.

Die Lösung ist leicht und bekannt erstens, wenn nur die Neigung einer der 3 begleitenden Axen, d. h. der Tangente, Haupt- oder Binormale, gegen 2 feste Gerade in der Relation vorkommt, weil dann ihre Richtung vollständig bestimmt ist; zweitens, wenn die bestimmende Relation sich nur auf eine feste Gerade bezieht.

Seien bezeichnet die Richtungscosinus der

Tangente	durch	f,	g,	h
Hauptnormale	„	f',	g',	h'
Binormale	„	l,	m,	n

Nimmt man die feste Gerade zur x Axe, so ist gegeben die allgemeine Relation:

$$f^2+f'^2+l^2=1$$

die der besondern Aufgabe entsprechende

$$F(f, f', l)=0$$

und eine beliebig gewählte

$$af+bf'+cl=\varphi$$

wodurch f, f', l als Functionen des Parameters φ bestimmt sind und, wenn F linear oder rein quadratisch, so wie auch in manchen andern Fällen, dargestellt werden können. Kennt man dann entweder f', g', h' oder l, m, n oder f, f', l, so kann man, wie in T. LVI. S. 59 gezeigt, leicht f, g, h finden.

Die nächste Erweiterung der Aufgabe würde sein, wenn beide Schenkel der durch Relation verbundenen Winkel verschieden sind.

Zur Orientirung beschreiben wir um einen festen Punkt O mit der Linieneinheit als Radius eine Kugel und ziehen die Radien OT, OH, OB, OX, OM in den Richtungen der Tangente, Hauptnormale, Binormale und der 2 festen Geraden, deren Ebene wir zur xy Ebene und deren erstere wir zur x Axe nehmen.

Die gegebene Relation denken wir aufgelöst durch Darstellung der 2 Winkel, welche zwei der 3 ersten Geraden mit je einer der 2 letzten bilden, als Functionen eines Parameters. Die Combination ergibt 3 verschiedene Aufgaben mit folgenden respectiven Daten:

	constant		variabel	
I.	$XM=\alpha$;	$TH=R$;	$\cos XT=f$;	$MH=\lambda$
II.	$XM=\alpha$;	$HB=R$;	$\cos XB=l$;	$MH=\lambda$
III.	$XM=\alpha$;	$TB=R$;	$\cos XT=f$;	$MB=\mu$

In allen 3 Fällen hat man ein sphärisches Viereck mit 4 gegebenen Seiten. Das fünfte Bestimmungsstück muss durch die Variationsgesetze, also durch Differentialrelationen ersetzt werden.

Wir beginnen mit der Bestimmung des Vierecks

$$THMX$$

darin sind

$$\cos XH = f' \text{ und } MT = \varphi$$

unbekannt. Trägt man auf dem (wo nötig verlängerten) Normalbogen XM den Quadranten $XY = R$ ab und zieht YT, YH, so wird

$$\cos YT = g; \quad \cos YH = g'$$

und man hat:

$$hf' - fh' = m$$

Multiplicirt man mit h und beachtet, dass

$$h^2 = 1 - f^2 - g^2; \quad -hh' = ff' + gg' \tag{1}$$
$$m^2 = 1 - g^2 - g'^2$$

ist, so erhält man:

$$(1-g^2)f' + fgg' = \pm\sqrt{1-f^2-g^2}\sqrt{1-g^2-g'^2} \tag{2}$$

woraus:

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \frac{g'}{f'} = \frac{(1-g^2)g'}{-fgg' \pm \sqrt{1-f^2-g^2}\sqrt{1-g^2-g'^2}} \tag{3}$$

Dies ist die Differentialgleichung für den Fall, wo $XM = R$ ist, wo also M mit Y zusammenfällt, so dass f und g' gegeben sind. Ihre Integration ergibt g, und nachher Gl. (2) f'; h und h' sind sodann nach Gl. (1) bekannt, und durch die Werte von f, g, h ist die Aufgabe gelöst.

Um von diesem Specialfall auf die allgemeine Aufgabe überzugehen, wo λ statt g' gegeben ist, betrachten wir die sphärischen Dreiecke

$$YMH, \quad YXT, \quad MXT, \quad TMH$$

in welchen folgende Winkel sich über XY zu 2R ergänzen:

$$XMT + TMH + HMY = 2R \tag{4}$$

In Dreieck MXT und YXT hat man:

$$\cos(MXT) = \frac{\cos\varphi - f\cos\alpha}{\sqrt{1-f^2}\sin\alpha} = \frac{g}{\sqrt{1-f^2}}$$

woraus:

$$\cos\varphi = f\cos\alpha + g\sin\alpha$$

ausserdem:

$$\cos XMT = \frac{f - \cos\alpha\cos\varphi}{\sin\alpha\sin\varphi} = \frac{f\sin\alpha - g\cos\alpha}{\sin\varphi}$$

in Dreieck TMH:

$$\cos TMH = -\cot\lambda\cot\varphi$$

in Dreieck YMH:



$$\cos HMY = \frac{g' - \sin\alpha\cos\lambda}{\cos\alpha\sin\lambda} \tag{5}$$

woraus weiter:

$$\sin XMT = \frac{\sqrt{1-f^2-g_2}}{\sin\varphi}$$

$$\sin TMH = \frac{\sqrt{\sin^2\lambda - (f\cos\alpha + g\sin\alpha)^2}}{\sin\lambda\sin\varphi}$$

und findet nach Gl. (5) mit Anwendung von Gl. (4):

$$g' = \sin\alpha\cos\lambda + \{(f\cos\alpha + g\sin\alpha)(f\sin\alpha - g\cos\alpha)\cos\lambda \tag{6}$$

$$+ \sqrt{1-f^2-g^2}\sqrt{\sin^2\lambda - (f\cos\alpha + g\sin\alpha)^2}\}\,\frac{\cos\alpha}{1-(f\cos\alpha+g\sin\alpha)^2}$$

Substituirt man diesen Ausdruck für g' in Gl. (3), so geht sie in diejenige Gleichung über, deren Integration die erste der 3 Aufgaben löst. Sie ist demnach stets eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, deren Coefficienten von beiden Variabeln f, g abhangen.

Das Vorzeichen der Quadratwurzeln muss in dem Sinne doppelt bleiben, dass die Lösung sich über beide Vorzeichen erstreckt. Da sich keine gegebene Grösse auf die z Axe bezieht, so besteht die Curve aus 2 symmetrischen Zweigen zu beiden Seiten der xy Ebene.

Die Lösung der ersten Aufgabe liefert zugleich die der zweiten: man braucht nur die Tangente mit der Binormale zu vertauschen, da beide in reciproker Beziehung stehen. Es ist also nur l, m für f, g zu substituiren, während f', g' unverändert bleiben. Einen Vorzeichenwechsel erleiden nur h, h', n, die nicht vorkommen.

Bei der dritten Aufgabe ist in Gl. (3) nur für g' der Wert

$$g' = \sqrt{1-g^2-m^2}$$

zu substituiren, so dass sie lautet:

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \frac{1-g^2}{-fg \pm m\sqrt{\dfrac{1-f^2-g^2}{1-g^2-m^2}}}$$

Ist dann m als Function von f gegeben, so erhält man durch Integration g, also die fertige Lösung für den Fall $\alpha = \mathrm{R}$, wo M in Y fällt.

In der allgemeinen Aufgabe III. ist μ statt m gegeben. Die für die erste Aufgabe construirte Figur nebst der trigonometrischen Rechnung passt vollkommen auch hier. Die Binormale tritt an die

Stelle der Hauptnormale, also in der Figur B an die Stelle von H, und in Gl. (6) m und μ an die Stelle von g' und λ.

Fassen wir die Resultate zusammen, so hat sich folgendes ergeben.

Sind die 2 Winkel, welche 2 begleitende Axen einer Curve einzeln mit 2 festen Geraden bilden, gegebene Functionen von einander, so hängt die Darstellung der Curve von der Integration einer Gleichung der Form

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \psi(f, g)$$

ab, wo ψ eine algebraische Function bezeichnet, die im allgemeinen 3 irrationale Quadratwurzeln, zum Teil in einer vierten involvirt, enthält, während im Falle, wo die 2 festen Geraden normal zu einander sind, nur 2 irrationale, nicht involvirte Quadratwurzeln vorkommen.

Die drei, den Combinationen der 3 begleitenden Axen entsprechenden Aufgaben lassen sich wieder als Specialfälle einer allgemeinern Aufgabe betrachten, indem man statt der 2 begleitenden Axen zwei mit dem begleitenden Axensystem fest verbundene Gerade als Schenkel der gegebenen Winkel annimmt. Auch diese allgemeinere Aufgabe würde sich durch Substitution auf die Aufgabe I. zurückführen lassen, worauf ich hier nicht eingehe.

III.

Ueber die Bestimmung der Unterscheidungscharaktere für die Kegelschnitte, wenn die Gleichungen derselben in trimetrischen Liniencoordinaten gegeben sind.

Von

A. Ehlert.

In Salmon's „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“ Artikel 318, Aufgabe 5 findet sich die Methode angedeutet, nach welcher man für eine in trimetrischen Liniencoordinaten gegebene Kegelschnittsgleichung die Unterscheidungscharaktere für die Ellipse, Hyperbel und Parabel feststellen kann. Dieselbe Methode dient aber auch, wie in der folgenden Darstellung gezeigt werden soll, zu einer sehr einfachen Ableitung der Bedingungen, unter welchen die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$\alpha_{11}\xi_1^2+\alpha_{22}\xi_2^2+\alpha_{33}\xi_3^2+2\alpha_{23}\xi_2\xi_3+2\alpha_{31}\xi_3\xi_1+2\alpha_{12}\xi_1\xi_2=0$$

ein Punktepaar, einen Kreis und eine gleichseitige Hyperbel repräsentirt.

Bezeichnen s_1, s_2 und s_3 die Seitenstrecken des Fundamentaldreiecks, so stellt die Gleichung:

$$s_1x_1\xi_1+s_2x_2\xi_2+s_3x_3\xi_3=0$$

für constante x_i und variabele ξ_i die Gleichung des x_i, dagegen für constante ξ_i und variabele x_i die Gleichung der Geraden ξ_i dar.

Soll der Punkt

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0$$

auf der Curve

$$\Sigma \equiv \alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + 2\alpha_{31}\xi_3\xi_1 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 = 0$$

liegen, so müssen die beiden von ihm ausgehenden Tangenten zusammenfallen d. h. die beiden Wurzeln der in Bezug auf $\xi_1 : \xi_3$ quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned}&\frac{\xi_1^2}{\xi_3^2}(\alpha_{11}\alpha_2^2 + \alpha_{22}\alpha_1^2 - 2\alpha_{12}\alpha_1\alpha_2)\\ &\quad + 2\frac{\xi_1}{\xi_3}(\alpha_{22}\alpha_1\alpha_3 - \alpha_{23}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_{31}\alpha_2^2 - \alpha_{12}\alpha_2\alpha_3)\\ &\quad + (\alpha_{22}\alpha_3^2 + \alpha_{33}\alpha_2^2 - 2\alpha_{23}\alpha_2\alpha_3) = 0\end{aligned}$$

welche durch Elimination von ξ_2 aus jenen beiden Gleichungen entsteht, müssen gleich sein. Dies ist aber der Fall, wenn die Bedingung:

$$\begin{aligned}&(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2)\alpha_1^2 + (\alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2)\alpha_2^2 + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)\alpha_3^2\\ &\quad + 2(\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_2\alpha_3\\ &\quad + 2(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{31})\alpha_3\alpha_1\\ &\quad + 2(\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{33}\alpha_{12})\alpha_1\alpha_2 = 0\end{aligned}$$

erfüllt ist, wie sich nach einigen Umformungen leicht ergiebt.

Bezeichnen nun A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31} und A_{12} die auf die respectiven Elemente α_{11}, α_{22}, α_{33}, α_{23}, α_{31} und α_{12} bezogenen Minoren oder Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{31} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{23}, & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

so kann jene Bedingung, unter welcher der Punkt

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0$$

auf dem Kegelschnitt $\Sigma = 0$ liegt, in der bequemeren Form:

$$1) \quad A_{11}\alpha_1^2 + A_{22}\alpha_2^2 + A_{33}\alpha_3^2 + 2A_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2A_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2A_{12}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

dargestellt werden, welches die bekannte Gleichung desselben Kegelschnitts in trimetrischen Punktcoordinaten ist.

Soll der Punkt

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0$$

zugleich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene, für welche $\frac{\xi_1}{\xi_3} = 1$ und $\frac{\xi_2}{\xi_3} = 1$ ist, liegen, so muss

2) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \text{ sein.}$$

Man erhält also durch Elimination von α_3 aus den beiden Gleichungen 1) und 2) die quadratische Gleichung:

3) $$(A_{11} + A_{33} - 2A_{31})\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 + 2(A_{33} - A_{23} - A_{31} + A_{12}).\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + A_{22} + A_{33} - 2A_{23} = 0$$

zur Bestimmung der beiden Punkte, welche zugleich dem Kegelschnitt $\Sigma = 0$ und der unendlich fernen Geraden der Ebene angehören. Diese beiden Schnittpunkte sind folglich reell, imaginär oder fallen in einen Punkt zusammen, je nach dem die beiden Wurzeln jener quadratischen Gleichung 3) reell, imaginär oder einander gleich sind, d. h. je nachdem

$$(A_{33} - A_{23} - A_{31} + A_{12}) - (A_{11} + A_{33} - 2A_{21})(A_{22} + A_{33} - 2A_{23}) > 0, \quad < 0 \quad \text{oder} \quad = 0 \text{ ist.}$$

Die Grösse:

$$(A_{33} - A_{23} - A_{31} + A_{12}) - (A_{11} + A_{33} - 2A_{31})(A_{22} + A_{33} - 2A_{23})$$

lässt sich aber umformen in

$$-[(A_{22}A_{33} - A_{23}^2) + (A_{33}A_{11} - A_{31}^2) + (A_{11}A_{22} - A_{12}^2) + 2(A_{31}A_{12} - A_{11}A_{23}) + 2(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{31}) + 2(A_{23}A_{31} - A_{33}A_{12})]$$

oder in

$$-[A_{11}' + A_{22}' + A_{33}' + 2A_{23}' + 2A_{31}' + 2A_{12}']$$

wo A_{11}', A_{22}', A_{33}', A_{23}', A_{31}', A_{12}' die auf die respectiven Elemente A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31} und A_{12} bezogenen Minoren der Determinante des adjungierten Systems

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{31} \\ A_{12}, & A_{22}, & A_{23} \\ A_{31}, & A_{23}, & A_{33} \end{vmatrix}$$

sind. Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Determinanten ist aber

$$\Delta' = \Delta^2$$

und

$$A_{11}' = \alpha_{11} . \Delta \qquad A_{23}' = \alpha_{23} . \Delta$$
$$A_{22}' = \alpha_{22} . \Delta \qquad A_{31}' = \alpha_{31} . \Delta$$
$$A_{33}' = \alpha_{33} . \Delta \qquad A_{12}' = \alpha_{12} . \Delta$$

Daher ist jene Grösse:

$$(A_{33} - A_{23} - A_{31} + A_{12})^2 - (A_{11} + A_{33} - 2A_{31})(A_{22} + A_{33} - 2A_{23})$$
$$= -\Delta(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12})$$

und es ergiebt sich:

Die allgemeine Gleichung in trimetrischen Liniencoordinaten $\Sigma = 0$ stellt

1) eine Hyperbel dar, wenn die Discriminante der gegebenen Gleichung und die Coefficientensumme entgegengesetzte Vorzeichen haben;

2) eine Ellipse dar, wenn die Discriminante der gegebenen Gleichung und die Coefficientensumme dieselben Vorzeichen besitzen.

Die beiden Schnittpunkte des Kegelschnitts $\Sigma = 0$ mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene fallen in einen Punkt zusammen, wenn

$$\Delta(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12}) = 0$$

d. h. wenn entweder

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12} = 0$$

oder wenn

$$\Delta = 0 \quad \text{ist.}$$

Da die unendlich entfernte Gerade der Ebene für alle Parallelen derselben Ebene Tangente ist, so muss die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts $\Sigma = 0$, wenn dieselbe eine Parabel repräsentiren soll, durch die Coordinaten der unendlich entfernten Geraden, für welche $\frac{\xi_1}{\xi_3} = 1$ und $\frac{\xi_2}{\xi_3} = 1$ ist, erfüllt werden, d. h. es muss

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12} = 0 \quad \text{sein.}$$

Die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ stellt daher eine Parabel dar, wenn die Coefficientensumme der Gleichung den Wert Null hat.

Eine homogene Gleichung zweiten Grades in trimetrischen Liniencoordinaten kann überhaupt nur eine Hyperbel, Ellipse, Parabel oder ein Punktepaar repräsentiren. Geht man aber von der Gleichung eines Punktepaares in trimetrischen Liniencoordinaten

$$(\alpha_1'\xi_1 + \alpha_2'\xi_2 + \alpha_3'\xi_3) . (\alpha_1''\xi_1 + \alpha_2''\xi_2 + \alpha_3''\xi_3) = 0$$

zur entsprechenden Gleichung in trimetrischen Punktcoordinaten über, so erhält man bekanntich das Quadrat der Gleichung der Verbindungsgeraden jener beiden Punkte α_i' und α_i''. Dies ist der analytische Ausdruck für die geometrische Wahrheit, dass durch ein nicht zusammenfallendes Punktepaar stets eine Gerade bestimmt ist, oder dass von solchen Punkten, die in der Verbindungsgeraden jenes Punktepaares liegen, die beiden an die Curve d. h. an das Punktepaar gezogenen Tangenten zusammenfallen. Das Punktepaar stellt also gleichzeitig ein anderes geometrisches Gebilde, nämlich seine Verbindungsgerade, dar. In diesem Sinne ist es gestattet, von den Durchschnittspunkten eines Punktepaares mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene zu sprechen. Es sind die beiden zusammenfallenden Punkte, in denen die zweimal gerechnete Verbindungsgerade die unendlich entfernte Gerade der Ebene schneidet. Dieser Schnittpunkt ist in der Tat der einzige Punkt auf der unendlich fernen Geraden, von welchen aus die beiden Tangenten an das Punktepaar zusammenfallen.

Das Zusammenfallen der beiden Schnittpunkte kann aber nur unter der Bedingung $\Delta = 0$ stattfinden, denn jenes andere Kriterium

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12} = 0$$

gilt, wie schon angezeigt wurde, nur für die Parabel.

Es stellt daher die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ ein Punktepaar dar, wenn die Discriminante der Gleichung den Wert Null hat. Für die trimetrischen Coordinaten des Schnittpunktes dieses Punktepaares (d. h. seiner Verbindungsgeraden) mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene hat man daher aus der Gleichung 3)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12}}{A_{11} + A_{33} - 2A_{31}}$$

und

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 = \frac{A_{31} + A_{12} - A_{11} - A_{23}}{A_{11} + A_{33} - 2A_{31}}$$

Daher ist die Gleichung dieses Durchschnittspunktes

$$(A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})\xi_1 + (A_{11} + A_{33} - 2A_{31})\xi_2 + (A_{31} + A_{12} - A_{11} - A_{23})\xi_3 = 0$$

Diese Gleichung kann aber auch in den beiden Formen

$$(A_{12} + A_{23} - A_{22} - A_{31})\xi_1 + (A_{31} + A_{12} - A_{11} - A_{23})\xi_2 + (A_{22} + A_{11} - 2A_{12})\xi_3 = 0$$

und

$$(A_{33}-A_{22}-2A_{23})\xi_1+(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})\xi_2$$
$$+(A_{12}+A_{23}-A_{22}-A_{31})\xi_3=0$$

geschrieben werden, da die früher bewiesene Identität

$$(A_{22}+A_{33}-2A_{23})(A_{33}+A_{11}-2A_{31})$$
$$-(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})^2$$
$$\equiv \Delta(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}+2\alpha_{23}+2\alpha_{31}+2\alpha_{12})$$

durch cyklische Vertauschung der Indices die drei Identitäten:

$$(A_{22}+A_{33}-2A_{23})(A_{33}+A_{11}-2A_{31})-(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})^2$$
$$\equiv (A_{33}+A_{11}-2A_{31})(A_{11}+A_{22}-2A_{12})-(A_{31}+A_{12}-A_{14}-A_{23})^2$$
$$\equiv (A_{11}+A_{22}-2A_{12})(A_{22}+A_{33}-2A_{23})-(A_{12}+A_{23}-A_{22}-A_{31})^2$$

nach sich zieht.

Dass die drei gefundenen Gleichungen wirklich den Durchschnittspunkt der Verbindungsgeraden des Punktepaares $\Sigma=0$ mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene darstellen, kann direct bestätigt werden.

Für die trimetrischen Coordinaten $x_1\mathfrak{S}$, $x_2\mathfrak{S}$, $x_3\mathfrak{S}$ des Schnittpunktes einer beliebigen Geraden

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene

$$s_1x_1+s_2x_2+s_3x_4=0$$

hat man:

$$x_1\mathfrak{S}:x_2\mathfrak{S}:x_3\mathfrak{S}=(a_2s_3-a_3s_2):(a_3s_1-a_1s_3):(a_1s_2-a_2s_1)$$

Ist die Gerade a_i die Verbindungsgerade der beiden Punkte x_i' und x_i'', so ist bekanntlich:

$$a_1:a_2:a_3=(x_2'x_3''-x_2''x_3'):(x_3'x_1''-x_3''x_1'):(x_1'x_2''-x_1''x_2')$$

und man erhält daher die Gleichung des Schnittpunktes der Verbindungsgeraden der beiden Punkte x_i' und x_i'' mit der unendlich fernen Geraden der Ebene in der Form:

$$s_1[(x_3'x_1''-x_3''x_1')s_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_2]\xi_1$$
$$+s_2[(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1-(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_3]\xi_2$$
$$+s_3[(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_2-(x_3'x_1''-x_3''x_1')s_1]\xi_3=0.$$

Diese Gleichung kann also nur durch einen constanten Factor von jeder der drei vorhin angeführten Formen z. B. von

$$(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})\xi_1+(A_{11}+A_{33}-2A_{31})\xi_2$$
$$+(A_{31}+A_{12}-A_{11}-A_{23})\xi_3=0$$

verschieden sein, wenn $\Sigma=0$ ein Punktepaar darstellt; d. h. wenn die Function

$$\alpha_{11}\xi_1^2+\alpha_{22}\xi_2^2+\alpha_{33}\xi_3^2+2\alpha_{23}\xi_2\xi_3+2\alpha_{31}\xi_3\xi_1+2\alpha_{12}\xi_1\xi_2$$

identisch sein soll mit der Function

$$(s_1x_1'\xi_1+s_2x_2'\xi_2+s_3x_3'\xi_3)(s_1x_1''\xi_1+s_2x_2''\xi_2+s_3x_3''\xi_3).$$

Unter dieser Voraussetzung muss aber

$$\alpha_{11}=2x_1'x_1''s_1^2 \qquad \alpha_{23}=(x_2'x_3''+x_2''x_3')s_2s_3$$
$$\alpha_{22}=2x_2'x_2''s_2^2 \qquad \alpha_{31}=(x_3'x_1''+x_3''x_1')s_3s_1$$
$$\alpha_{33}=2x_3'x_3''s_3^2 \qquad \alpha_{12}=(x_1'x_2''+x_1''x_2')s_1s_2$$

sein, und man findet dann nach einigen Umformungen die Minoren

$$A_{11}=-(x_2'x_3''-x_2''x_3')^2s_2^2s_3^2$$
$$A_{22}=-(x_3'x_1''-x_3''x_1')^2s_3^2s_1^2$$
$$A_{33}=-(x_1'x_2''-x_1''x_2')^2s_1^2s_2^2$$
$$A_{23}=-(x_3'x_1''-x_3''x_1')(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1^2s_2s_3$$
$$A_{31}=-(x_1'x_2''-x_1''x_2')(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_2^2s_3s_1$$
$$A_{12}=-(x_2'x_3''-x_2''x_3')(x_3'x_1''-x_3''x_1')s_3^2s_1s_2$$

Aus diesen Werten ergiebt sich aber:

$$A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12}=$$
$$s_1s_2[(x_2'x_3''-x_2''x_3')x_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1]\times$$
$$[(x_3'x_1''-x_3''-x_1')s_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_2]$$

$$A_{11}+A_{33}-2A_{31}=$$
$$s_2^2[(x_2'x_3''-x_2''x_3')x_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1]\times$$
$$[(x_1'x_2''-x_1''-x_2')s_1-(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_3]$$

und

$$A_{31}+A_{12}-A_{11}-A_{23}=$$
$$s_2s_3[(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1]\times$$
$$[(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_2-(x_3'x_1''-x_3''x_1')s_1]$$

Die drei Coefficienten

$A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12}$, $A_{11}+A_{33}-2A_{31}$ und $A_{31}+A_{12}-A_{11}-A_{23}$

haben also den Factor

$$s_2[(x_2'x_3''-x_2''x_3')s_3-(x_1'x_2''-x_1''x_2')s_1]$$

gemeinsam und es stellen daher in der Tat die beiden Gleichungen:

$$(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})\xi_1+(A_{11}+A_{33}-2A_{31})\xi_2$$
$$+(A_{31}+A_{12}-A_{11}-A_{23})\xi_2=0$$

und,

$$\sum_{k,l,m}\{s_k[(x_m'x_k''-x_m''x_k')s_m-(x_k'x_l''-x_k''x_l')s_l']\xi_k\}=0$$

denselben Punkt dar.

Alle Kreise derselben Ebene haben, wie bekannt, mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene dieselben zwei imaginären Punkte gemeinsam. Darum ist ein Kreis auch durch drei endliche Punkte völlig bestimmt, während ein Kegelschnitt im Allgemeinen erst durch fünf Punkte festgesetzt ist. Man kann daher Kreise als solche Kegelschnitte (specieller als solche Ellipsen) betrachten, welche durch gewisse zwei feste imaginäre Punkte auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene gehen.

Bezeichnen A_1, A_2 und A_3 die den Seitenstrecken s_1, s_3 und s_3 respective gegenüberliegenden Innenwinkel des Fundamentaldreiecks, so findet man (Salmon: Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Artikel 164 Aufgabe 8) für die trimetrischen Coordinaten jener beiden festen Punkte (der sogenannten imaginären Kreispunkte im Unendlichen)

$$\frac{x_1^{\binom{\infty}{i}'}}{x_3^{\binom{\infty}{i}'}}=-\cos A_2+i\sin A_2 \qquad \frac{x_2^{\binom{\infty}{i}'}}{x_3^{\binom{\infty}{i}'}}=-\cos A_1-i\sin A_1$$

und

$$\frac{x_1^{\binom{\infty}{i}''}}{x_3^{\binom{\infty}{i}''}}=-\cos A_2-i\sin A_2 \qquad \frac{x_2^{\binom{\infty}{i}''}}{x_3^{\binom{\infty}{i}''}}=-\cos A_1+i\sin A_1$$

Daher

$$\frac{x_1^{\binom{\infty}{i}'}}{x_2^{\binom{\infty}{i}'}}=\frac{-\cos A_2+i\sin A_2}{-\cos A_1-i\sin A_1}=-\cos A_3-i\sin A_3$$

$$\frac{x_1^{\binom{\infty}{i}''}}{x_2^{\binom{\infty}{i}''}}=\frac{-\cos A_2-i\sin A_2}{-\cos A_1+i\sin A_1}=-\cos A_3+i\sin A_3$$

Will man daher die Bedingungen aufstellen, unter welchen die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ einen Kreis darstellt, so hat man nur auszudrücken, dass dieser Kegelschnitt durch jene beiden festen Punkte gehen soll. Die beiden Durchschnittspunkte eines jeden Kegelschnitts mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene wurden aber durch die Gleichung 3) bestimmt. Ist nun dieser Kegelschnitt ein Kreis, so muss folglich

$$\frac{2(A_{23}+A_{31}-A_{33}-A_{12})s_2}{(A_{11}+A_{33}-2A_{31})s_1} = \frac{\overset{\binom{\infty}{i}'}{x_1}}{\underset{x_2}{\binom{\infty}{i}'}} + \frac{\overset{\binom{\infty}{i}''}{x_1}}{\underset{x_2}{\binom{\infty}{i}''}}$$

und

$$\frac{(A_{22}+A_{33}-2A_{23})s_2^2}{(A_{11}+A_{33}-2A_{31})s_1^2} = \frac{\overset{\binom{\infty}{i}'}{x_1}}{\underset{x_2}{\binom{\infty}{i}'}} \cdot \frac{\overset{\binom{\infty}{i}''}{x_1}}{\underset{x_2}{\binom{\infty}{i}''}}$$

oder

I) $$\frac{(A_{33}-A_{23}-A_{31}+A_{12})s_2}{(A_{11}+A_{33}-2A_{31})s_1} = \cos A_3$$

und

II) $$\frac{(A_{22}+A_{33}-2A_{23})s_2^2}{(A_{11}+A_{33}-2A_{31})s_1^2} = 1 \quad \text{sein.}$$

Diese beiden Bedingungen bilden also das Kriterium für den Kreis, können aber noch symmetrischer ausgedrückt werden, wenn man berücksichtigt, dass für das Fundamentaldreieck die Relation

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = 2s_1s_2 \cos A_3 \quad \text{gilt.}$$

Aus I) folgt dann:

$$\frac{2(A_{33}-A_{23}-A_{31}+A_{12})}{A_{11}+A_{33}-2A_{31}} = \frac{2s_1s_2\cos A_3}{s_2^2}$$
$$= \frac{s_1^2}{s_2^2} + 1 - \frac{s_3^2}{s_2^2}$$

und es ist also, mit Rücksicht auf II)

$$\frac{s_3^2}{s_2^2} = \frac{A_{22}+A_{33}-2A_{23}}{A_{11}+A_{33}-2A_{31}} - \frac{2(A_{33}-A_{23}-A_{31}+A_{12})}{A_{11}+A_{33}-A_{31}} + 1$$

d. h.

$$\frac{s_3^2}{s_2^2} = \frac{A_{11}+A_{22}-2A_{12}}{A_{11}+A_{33}-2A_{31}}.$$

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in trimetrischen Liniencoordinaten $\Sigma = 0$ repräsentirt also einen Kreis, wenn die beiden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_{11}+A_{22}-2A_{12}}{A_{33}+A_{11}-2A_{31}} &= \frac{s_3^2}{s_2^2} \\ \frac{A_{22}+A_{33}-2A_{23}}{A_{33}+A_{11}-2A_{31}} &= \frac{s_1^2}{s_2^2} \end{aligned}\right\}$$

oder

$$\frac{A_{11}+A_{22}-2A_{12}}{s_3^2} = \frac{A_{22}+A_{33}-2A_{33}}{s_1^2} = \frac{A_{33}+A_{11}-2A_{31}}{s_2^2}$$

oder

$$\frac{A_{kk}+A_{ll}-2A_{kl}}{s_m^2} = \text{constans} \quad \text{erfüllt sind.}$$

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn z. B. sämmtliche Minoren A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{23} und A_{31} den Wert Null haben, d. h. wenn die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ ein zusammenfallendes Punktepaar darstellt. Es kann daher der Punkt als zu den Kreisen gehörig oder als eine specielle Art des Kreises betrachtet werden.

Die beiden reellen Durchschnittspunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene liegen stets in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen, da die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel normal zu einander sind. Die Schnittpunkte von irgend zwei zu einander rechtwinkligen Geraden derselben Ebene sind aber stets harmonisch conjugirt zu den beiden festen imaginären Kreispunkten im Unendlichen, oder mit anderen Worten: Alle Paare normal zu einander stehender Geraden derselben Ebene bilden auf der unendlich entfernten Geraden dieser Ebene eine Involution von Punktepaaren, deren Doppelpunkte die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen sind.

Soll also die Bedingung aufgestellt werden, unter welcher die die allgemeine Kegelschnittsgleichung $\Sigma = 0$ eine gleichseitige Hyperbel darstellt, so hat man nur analytisch auszudrücken, dass die beiden Durchschnittspunkte des Kegelschnitts mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene, welche durch die Gleichung 3) bestimmt wurden, harmonisch conjugirt sind zu den beiden imaginären Kreispunkten im Unendlichen.

Die Gleichungen dieser beiden festen Punkte sind aber nach dem früher Bemerkten:

$$s_1(-\cos A_2 + i\sin A_2)\xi_1 + s_2(-\cos A_1 - i\sin A_1)\xi_2 + s_3\xi_3 = 0$$

und

$$s_1(-\cos A_2 - i\sin A_2)\xi_1 + s_2(-\cos A_1 + i\sin A_1)\xi_2 + s_3\xi_3 = 0$$

und es ist daher die Gleichung irgend eines Punktes auf der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte d. h. auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene:

$$s_1\{-\cos A_2 + i\sin A_2 + \lambda.(-\cos A_2 - i\sin A_2)\}\xi_1$$
$$+ s_2\{-\cos A_1 - i\sin A_1 + \lambda.(-\cos A_1 + i\sin A_1)\}\xi_2$$
$$+ s_3(1+\lambda)\xi_3 = 0$$

Dann ist aber die Gleichung des Punktes, welcher mit dem vorigen ein, in Bezug auf das imaginäre Kreispunktepaar im Unendlichen, harmonisch conjugirtes Punktepaar bildet:

$$s_1\{-\cos A_2 + i\sin A_2 - \lambda.(-\cos A_2 - i\sin A_2)\}\xi_1$$
$$+ s_2\{-\cos A_1 - i\sin A_1 - \lambda.(-\cos A_1 + i\sin A_1)\}\xi_2$$
$$+ s_3(1-\lambda)\xi_3 = 0$$

Man hat also für die trimetrischen Coordinaten dieses letzten Punktepaares

$$\frac{x_1'}{x_2'} = q' = \frac{-\cos A_2 + i\sin A_2 + \lambda.(-\cos A_2 - i\sin A_2)}{-\cos A_1 - i\sin A_1 + \lambda.(-\cos A_1 + i\sin A_1)}$$

$$\frac{x_1''}{x_2''} = q'' = \frac{-\cos A_2 + i\sin A_2 - \lambda.(-\cos A_2 - i\sin A_2)}{-\cos A_1 - i\sin A_1 - \lambda.(-\cos A_1 + i\sin A_1)}$$

Dieses Punktepaar ist natürlich für jedes reelle λ, welches von ± 1 verschieden ist, imaginär, dagegen stets reell, wenn

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = i.\mu \quad \text{d. h.} \quad \lambda = \frac{1-i\mu}{1+i\mu}$$

genommen wird, wo μ irgend eine reelle Zahl bedeutet.

Setzt man der Kürze halber:

$$-\cos A_2 + i\sin A_2 = M \qquad -\cos A_2 - i\sin A_2 = N$$
$$-\cos A_1 - i\sin A_1 = P \qquad -\cos A_1 + i\sin A_1 = Q$$

so kann man aus den beiden Gleichungen

$$q' = \frac{M+\lambda N}{P+\lambda Q} \quad \text{und} \quad q'' = \frac{M-\lambda N}{P-\lambda Q}$$

den Parameter λ eliminiren und erhält dann eine Relation, welcher die trimetrischen Coordinatenverhältnisse q' und q'' irgend zweier auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene gelegenen Punkte, die zu den beiden imaginären Kreispunkten im Unendlichen harmonisch conjugirt sind, genügen müssen. Man findet durch Elimination von λ die Gleichung:

$$\frac{M-Pq'}{Qq'-N} = \frac{Pq''-M}{Qq''-N}$$

oder

$$(MQ+PN).(q'+q'') - 2PQq'q'' - 2MN = 0$$

Nun ist aber

$$MQ + PN = (-\cos A_2 + i\sin A_2)(-\cos A_1 + i\sin A_1)$$
$$+ (-\cos A_1 - i\sin A_1)(-\cos A_2 - i\sin A_2)$$
$$= 2\cos(A_1 + A_2) = -2\cos A_3$$

$$PQ = (-\cos A_1 - i\sin A_1)(-\cos A_1 + i\sin A_1) = 1$$
$$MN = (-\cos A_2 + i\sin A_2)(-\cos A_2 - i\sin A_2) = 1$$

und man erhält folglich die Relation:

$$\cos A_3 \left(\frac{x_1'}{x_2'} + \frac{x_1''}{x_2''}\right) + \frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} + 1 = 0$$

welche die Coordinatenverhältnisse von irgend zwei Punkten x_i' und x_i'' zu erfüllen haben, die, auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene gelegen, zu den beiden imaginären Kreispunkten im Unendlichen harmonisch conjugirt sind.

Soll also der Kegelschnitt $\Sigma = 0$ die unendlich entfernte Gerade der Ebene in zwei solchen Punkten schneiden, d. h. soll der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel sein, so müssen die beiden aus der Gleichung 3) sich ergebenden Werte von $\frac{x_1}{x_2}$ der vorigen Bedingung genügen. Durch Substitution der Ausdrücke:

$$\frac{x_1'}{x_2'} + \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{2(A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})s_2}{(A_{11} + A_{33} - 2A_{31})s_1}$$

$$\frac{x_1'}{x_2'} \cdot \frac{x_1''}{x_2''} = \frac{(A_{22} + A_{33} - 2A_{23})s_2^2}{(A_{11} + A_{33} - 2A_{31})s_1^2}$$

erhält man die Bedingungsgleichung

$$2s_1s_2\cos A_3(A_{23} + A_{31} - A_{33} - A_{12})$$
$$+ s_2^2(A_{22} + A_{33} - 2A_{23}) + s_1^2(A_{11} + A_{33} - 2A_{31}) = 0$$

oder

$$-2s_1s_2A_{12}\cos A_3 + 2s_1s_2\cos A_3(A_{23} + A_{31} - A_{33})$$
$$+ s_2^2(A_{22} + A_{33} - 2A_{23}) + s_1^2(A_{11} + A_{33} - 2A_{31}) = 0$$

Berücksichtigt man die aus dem Fundamentaldreieck sich ergebenden Relationen

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 = 2s_1s_2\cos A_3$$
$$s_2^2 + s_3^2 - s_1^2 = 2s_2s_3\cos A_1$$
$$s_3^2 + s_1^2 - s_2^2 = 2s_3s_1\cos A_1$$

so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$- 2s_1s_2A_{12}\cos A_3 + s_1^2A_{11} + s_2^2A_{22} + s_3^2A_{33}$$
$$+ (s_1^2 - s_2^2 - s_3^2)A_{23} + (s_2^2 - s_3^2 - s_1^2)A_{31} = 0$$

oder

$$A_{11}s_{12} + A_{22}s_2^2 + A_{33}\,s_3^2 - 2A_{23}s_2s_3\cos A_1$$
$$- 2A_{31}s_3s_1\cos A_2 - 2A_{12}s_1s_2\cos A_3 = 0$$

Eine durch die allgemeine Gleichung $\Sigma = 0$ in trimetrischen Liniencoordinaten dargestellte Hyperbel ist also **gleichseitig**, wenn die Minoren der Discriminante die Bedingung

$$A_{11}s_{12} + A_{22}s_2^2 + A_{33}s_3^2 - 2A_{33}s_2s_3\cos A_1$$
$$- 2A_{31}s_3s_1\cos A_1 - 2A_{12}s_1s_2\cos A_3 = 0$$

oder

$$\sum_{k,l,m} A_{kk}s_k^2 = 2\sum_{k,l,m} A_{kl}s_ks_l\cos A_m$$

erfüllen.

Frankfurt a. Oder im December 1883.

IV.

Grundzüge zu einer combinatorischen Darstellung der höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen.

Von

Herrn **Julius Vollers**

in Oldenburg.

Da bei verwickelteren analytischen Operationen — z. B. der Entwickelung einer zusammengesetzten Function in eine Reihe und der Summirung der Kettenbrüche — nicht selten combinatorische Anordnungen auf ein leicht zu übersehendes Verfahren führen, so suchte ich auch bei der Entwickelung der höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen eine derartige Hülfe zu finden und gelangte zu dem in nachfolgender Skizze angegebenen Resultate, das wohl nicht ohne alles wissenschaftliche Interesse und auch von einigem praktischen Nutzen sein dürfte.

Als Ausgangspunkt für meine Untersuchung benutzte ich die Formel von U. Meyer *)

$$f^n x = \frac{U_1}{1!} F'y + \frac{U_2}{2!} F''y + \dots \frac{U_n}{n!} F^n y,$$

worin

$$U_k = [D_\varrho{}^n \Theta^k]_0 = [D_\varrho{}^n \varphi(x+\varrho) - \varphi(x)]_0$$

indem ich zunächst das combinatorische Gesetz, dem die mehrfachen Differentiationen der Potenzen von Θ unterworfen sind, ermittelte.

---

*) Grunerts Archiv T. IX. S. 96.

Sucht man von $D\Theta^3$ ausgehend $D^3\Theta^3$ durch aufeinander folgende Differentiationen und bezeichnet in dem Resultate

$$D^3\Theta^3 = 3\Theta^2 D^3\Theta + 18\Theta\, D\Theta\, D^2\Theta + 6(D\Theta)^3$$

Θ mit 0, $D\Theta$ mit 1, $D^2\Theta$ mit 2, so erhält man, wenn man vorläufig von den numerischen Coefficienten absieht, folgendes Schema für die einzelnen Summanden der obigen Entwickelung

003
012
111

Es ist dies die dritte Combinationsclasse der Elemente 0, 1, 2, 3, zur Quersumme 3.

In derselben Weise ergiebt sich für

$$D^4\Theta^4 = 4\Theta^3 D^4\Theta + 48\Theta^2 D\Theta\, D^3\Theta + 36\Theta^2(D^2\Theta)^2 + 144\Theta(D\Theta)^2 + 24(D\Theta)^4$$

das Schema:

0004
0013
0022
0112
1111

welches die vierte Combinationsclasse der Elemente 0, 1, 2, 3, 4 zur Quersumme 4 ist.

Betrachtet man ferner noch den Differentialquotienten

$$D^4\Theta^5 = 5\Theta^4 D^4\Theta + 8\Theta^3\, D\Theta\, D^3\Theta + 60\Theta^3(D^2\Theta)^2 + 360\Theta^2(D\Theta)^2 D^2\Theta + 120\Theta(D\Theta)^4;$$

so findet man folgende Anordnung,

00004
00013
00022
00112
01111

welche der fünften Combinationsclasse der Elemente 0, 1, 2, 3, 4, zur Quersumme 4 gleichkommt.

Durch Anwendung derartiger Untersuchungen auf beliebige Differentialquotienten der Potenzen von Θ, deren weitläufige Entwicke-

lung aber bei der Leichtigkeit, mit welcher dieselbe ausführbar ist, hier unterbleiben mag, gelangt man zu folgendem Satze:

Entwickelt man von $D\Theta$, $D\Theta^2$, $D\Theta^3$ u. s. w. ausgehend die aufeinander folgenden Differentialquotienten, und schliesst man vorläufig die sich hierbei ergebenden numerischen Coefficienten von der Betrachtung aus, so sind die einzelnen Summanden einer beliebigen Entwickelung $(D^n\Theta^m)$ in der Weise zusammengesetzt, dass sie, wenn man Θ mit 0, $D\Theta$ mit 1, $D^2\Theta$ mit 2, $D^3\Theta$ mit 3 u. s. f. bezeichnet, die einzelnen Complexionen der $n+1$ Elemente 0, 1, 2 ... zur Quersumme n und zur $m$ten Combinationsclasse repräsentiren.

Vergleicht man nun die beiden Differentialquotienten

$$D^4\Theta^4 = 4\Theta^3D^4\Theta + 48\Theta^2D\Theta D^3\Theta + 36\Theta^2(D^2\Theta)^2$$
$$+ 144\Theta(D\Theta)^2D^2\Theta + 24(D\Theta)^4$$

$$D^4\Theta^5 = 5\Theta^4D^4\Theta + 80\Theta^3D\Theta D^3\Theta + 60\Theta^4(D^2\Theta)^2$$
$$+ 360\Theta^2(D\Theta^2D^2\Theta + 120\Theta(D\Theta)^4$$

mit einander, so findet man, dass die Anzahl der Summanden in beiden Reihen gleich ist, und die Producte der einzelnen Differentialquotienten (wobei Θ als 0ter angesehen werden mag) in der letzten sich von denen der ersten nur durch den Factor Θ unterscheiden, — was einer Classenänderung einer gegebenen Anzahl von Elementen zu einer gegebenen Quersumme entspricht, — dass dagegen die numerischen Coefficienten scheinbar ganz verschieden sind.

In manchen Rechnungen sind nun die Combinationscomplexionen von ihren Permutations- oder Versetzungszahlen begleitet; schneidet man auch hier dieselben versuchsweise aus, so ergiebt sich:

$$D^4\Theta^4 = 4\Theta^3D^4\Theta + 12.\ 4\ \Theta^2D\Theta\ D^3\Theta$$
$$+ 6.\ 6.\ \Theta^2(D^2\Theta)^2 + 12.\ 12.\ \Theta(D\Theta)^2D^2\Theta + 24(D\Theta)^4$$

$$D^4\Theta^5 = 5\Theta^4D^4\Theta + 20.\ 4\ \Theta^3D0D^3\Theta$$
$$+ 6.\ 10.\ \Theta^3(D^2\Theta)^2 + 30.\ 12.\ \Theta^2(D\Theta)^2D^2\Theta$$
$$+ 5.\ 24\ \Theta(D\Theta)^4.$$

Man sieht, dass die rechten Seiten der beiden Gleichungen nunmehr gewisse numerische Coefficienten gemeinschaftlich haben, nämlich die Zahlen 1. 4. 6. 12. 24, die, wie man sich leicht überzeugt, jedem vierten Differentialquotienten irgend einer Potenz von Θ zukommen, nachdem man aus den sich anfangs ergebenden Coefficienten die dem entsprechenden Differentialquotientenproducte zugehörigen Versetzungszahlen ausgeschieden hat. Durch weitere Vergleichungen wird man finden, dass jedem Differentialquotienten einer Potenz von

Θ nach Ausscheidung der Versetzungszahlen gewisse Coefficienten zukommen, die man nunmehr allein ins Auge zu fassen hat.

Um die genannten Coefficienten auf die einfachste Art und Weise für eine gewisse Anzahl aufsteigender Differentialquotienten zu ermitteln, erinnere man sich, dass $D^n\Theta^m$ nie mehr Summanden enthält als $D^n\Theta^n$; man folglich nur $D^n\Theta^n$ für $n = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. zu berechnen braucht.

Man entwickele nun aus $D\Theta$ $D\Theta^2$ durch Multiplication mit Θ und Aenderung der Versetzungszahlen, aus $D\Theta^2$ durch Differentiation $D^2\Theta^2$, dann in derselben Weise aus $D^2\Theta^2$, $D^2\Theta^3$ und aus $D^2\Theta^3$ $D^3\Theta^3$, und fahre so fort.

Man erhält so nach Aussonderung der Versetzungszahlen für die 7 ersten Differentialquotienten folgende Coefficienten:

I. 1.
II. 1. 2.
III. 1. 3. 6.
IV. 1. 4. 6. 12. 24.
V. 1. 5. 10. 20. 30. 60. 120.
VI. 1. 6. 15. 20. 30. 60. 90. 120. 180. 360. 720.
VII. 1. 7. 21. 35. 42. 105. 140. 210. 210. 420. 630. 840. 1260. 2520. 5040.

Man bemerkt leicht, dass die ersten Coefficienten in jeder Reihe die aufsteigenden Binomialcoefficienten der dem zugehörigen Differentialquotienten entsprechenden Potenzen sind; die anderen dagegen sind scheinbar ganz regellos gebildet. Durch wiederholte Versuche gelang es mir jedoch, dieselben auf folgende Form zu bringen, worin $(n)_m$ den $m$ten Binomialcoefficienten der $n$ten Potenz bezeichnet.

I. $(1)_0$
II. $(2)_0$ $(2)_1$
III. $(3)_0$ $(3)_1$ $(3)_1.(2)_1$
IV. $(4)_0$ $(4)_1$ $(4)_2$ $(4)_1.(3)_1$ $(4)_1.(3)_1.(2)_1$
V. $(5)_0$ $(5)_1$ $(5)_2$ $(5)_1.(4)_1$ $(5)_1.(4)_2$ $(5)_1.(4)_1.(3)_1$ $(5)_1.(4)_1.(3)_1.(2)_1$
VI. $(6)_0$ $(6)_1$ $(6)_2$ $(6)_3$ $(6)_1.(5)_1$ $(6)_1.(5)_2$ $(6)_2.(4)_2$ $(6)_1.(5)_1.(4)_1$ $(6)_1.(5)_1.(4)_2$ $(6)_1.(5)_1.(4)_1.(3)_1$ $(6)_1.(5)_1.(4)_1.(3)_1.(2)_1$
VII. $(7)_0$ $(7)_1$ $(7)_2$ $(7)_3$ $(7)_1.(6)_1$ $(7)_1.(6)_2$ $(7)_1.(6)_3$ $(7)_2.(5)_2.(7)_1.(6)_1.(5)_1.$ $(7)_1.(6)_1.(5)_2$ $(7)_1.(6)_2.(4)_2$ $(7)_1.(6)_1.(5)_1.(4)_1$ $(7)_1.(6)_1.(5)_1.(4)_2.$ $(7)_1.(6)_1.(5)_1.(4)_1.(3)_1$ $(7)_1.(6)_1.(5)_1.(4)_1.(3)_1.(2)_1$

In diesem Schema stehen zunächst alle aufsteigenden Binomialcoefficienten der dem betreffenden Differentialquotienten entsprechenden Potenz; dann der Binomialcoefficient der genannten Potenz, welcher den Index 1 besitzt, vereinigt mit allen möglichen aufsteigenden Binomialcoefficienten der vorhergehenden Potenz von demjenigen mit dem Index 1 beginnend; dann der Binomialcofficient der höchsten Potenz mit dem Index 2 vereinigt mit den aufsteigenden Coefficienten der zweithöchsten Potenz von demjenigen mit dem Index 2 beginnend. Nachdem in entsprechender Weise alle Binionen erschöpft sind, werden die Ternionen hergestellt; zunächst das Product der Binomialcoefficienten der höchsten und zweithöchsten Potenz mit dem Index 1 vereinigt mit den aufsteigenden Binomialcoefficienten der dritthöchsten Potenz, von demjenigen mit dem Index 1 beginnend; dann das Product aus dem Binomialcoefficienten der höchsten Potenz mit dem Index 1 in den Coefficienten der zweithöchsten Potenz, welcher den Index 2 besitzt, vereinigt mit allen Coefficienten der vierthöchsten Potenz von demjenigen mit dem Index 2 beginnend; und so in entsprechender Weise fort. Da es nach diesen Erörterungen keine Schwierigkeiten haben dürfte, wenn nur die Indices der zu einer der obigen Entwickelungsreihen gehörigen Binomialcoefficienten-Complexionen bekannt sind, diese selbst niederzuscheiben, so genügt es, vorläufig nur die Indices zu betrachten, welche folgendermassen sehr leicht zu finden sind. Nimmt man den speciellen Fall, wo die Indices zum 7ten Differentialquotienten der Potenzen von Θ gehörigen Binomialcoefficienten gefunden werden sollen, so ist der erste Null; zur Ermittelung der übrigen schreibe man die Indices der aufsteigenden Binomialcoefficienten von der 7ten bis zur 2ten Potenz herunter, jedesmal mit dem Index 1 beginnend unter einander, wie folgendes Schema angiebt:

123
123
12
12
1
1

Man combinire nun die Elemente der ersten Reihe zur ersten Classe; man erhält

1. 2. 3,

dann das erste Element 1 der ersten Reihe mit denen der zweiten Reihe, das 2te mit denen der dritten, das dritte mit denen der vierten, indem man nur gutgeordnete Complexionen zulässt, zur zweiten Classe; dies giebt

11. 12. 13. 22.

Darauf combinire man die Elemente 11 der beiden ersten Reihen mit denen der dritten, die Elemente 12 der beiden ersten Reihen mit den Elementen der 4ten Reihe, wobei wiederum nur gutgeordnete Complexionen zugelassen werden; man erhält:

111. 112. 122.

Darauf combinire man wiederum die Elemente 111 der drei ersten Reihen mit denjenigen der vierten Reihe, und fahre in entsprechender Weise fort. Man findet noch

1111. 1112
11111
111111

Wie man in anderen Fällen verfährt, wird man leicht einsehen; nur so viel sei hier noch bemerkt: Zu ungeraden Potenzen gehören, wenn man die Indices von 1 an rechnet $\frac{n-1}{2}$, dagegen zu einer geraden $\frac{n}{2}$ aufsteigende Potenzen. Um das vorhergehende Schema allgemein herzustellen, hat man daher, wenn der gesuchte Differentialquotient von Θ ungerade ist, $n-1$ durch 2 zu dividiren, darauf die Zahlen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ 2 mal, darunter die Zahlen von 1 bis $\left(\frac{n-1}{2}-1\right)$ zweimal, dann die von 1 bis $\left(\frac{n-1}{2}-2\right)$ zweimal hinzuschreiben, und so fortzufahren, bis die Entwickelung mit 2 aufeinanderfolgenden die Einheit enthaltenden Reihen schliesst.

Bei geraden Differentialquotienten schreibe man dagegen einmal die Zahlen von 1 bis $\frac{n}{2}$ hin, dann zweimal $\frac{n}{2}-1$ u. s. f., wie bei den ungeraden Differentialquotienten.

Nachdem nunmehr die Entwickelung aller einzelnen zur Berechnung eines höheren Differentialquotienten von Θ erforderlichen Rechnungen erörtert ist, dürfte es nötig sein, die Gesammtentwickelung an einem Beispiele klar zu machen. Bevor ich jedoch dazu schreite, will ich noch einige Regeln über die Entwickelung der $n$ten Combinationsclasse der Elemente 012. ... n zur Quersumme n hier einfügen, da dieselbe nicht gut als allgemein bekannt vorausgesetzt werden dürfte.

Handelt es sich um die Herstellung der $n$ten Combinationsclasse der genannten Elemente zur Quersumme n, so entwickele man nach einander die Combinationsclassen der Elemente 1 bis n zur Quersumme n, setze der ersten Classe $(n-1)$ mal, der 2ten $(n-2)$ mal, der dritten $(n-3)$ mal das Element 0 vor und fahre so fort bis zur $n$ten Classe, welche $(n-n)$ oder 0 mal das Element 0 erhält. Als Beispiel folge hier die achte Combinationsclasse der Elemente 0 bis 8 zur Quersumme 8.

00000008	00001124
00000017	00001133
00000026	00001223
00000035	00002222
00000044	00011114
00000116	00011123
00000125	00011222
00000134	00111113
00000224	00111122
00000233	01111112
00001115	11111111

Zur leichten und sicheren Construction der einzelnen Combinationsclassen der Elemente 1 bis n dienen folgende Regeln, welche sich auf die Herleitnng einer Combinationsclasse aus der vorhergehenden zu einerlei Quersumme beziehen.

1) Jeder Complexion der gegebenen Classe mit Uebergehung derer, die am Ende zwei oder mehrere gleiche Elemente haben, setze man 1 vor, und vertausche die letzte Zahl der Complexion mit der ihr im natürlichen Zahlensystem vorhergehenden. Dies giebt die mit 1 anfangenden Complexionen (die Ordnung 1) der abzuleitenden Classe.

2) In den so gefundenen Complexionen der Ordnung 1 (mit Uebergehung derjenigen Complexionen, welche entweder zwei oder mehr gleiche Anfangs- oder zwei oder mehr gleiche Endelemente, eins oder beides zusammen, haben) vertausche man die erste Zahl mit der nächstfolgenden, die letzte hingegen mit der nächstvorhergehenden im natürlichen Zahlensystem.

3) Ebenso leitet man die Ordnung 3 aus der Ordnung 2 ab, wenn man die Vorschrift (2) auf die Ordnung 2, wie vorher anr wendet, und ebenso die zugehörigen Anfangs- und Endelemente den umzuwandelnden Complexionen vertauscht. Und so für die übrige-

Ordnungen, soviel deren das Hauptgesetz der Combinationen, dasjenige der guten Ordnung zulässt.

Nach diesen Regeln lassen sich alle Combinationsclassen zu einer gegebenen Quersumme ganz mechanisch ableiten.

Es soll nunmehr $D^8\Theta^8$ gefunden werden. Mam schreibe, am besten untereinander die achte Combinationsclasse der Elemente 0 bis 8 zur Quersumme 8 hin, wie es das Schema a. angiebt; schreibe demselben die Versetzungszahlen, welche mittelst der Formel $\frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots}$ gefunden werden, worin $m! = 1.2.3 \ldots m$, und worin n die Anzahl der Elemente der betreffenden Complexion, α, β u. s. w. dagegen in denselben vorkommende Anzahlen gleicher Elemente bezeichnen (Schema b.); ferner schreibe man das Schema der aufsteigenden Binomialcoefficienten, welches in diesem Falle mit 1. 2. 3. 4. beginnt an (Schema c.), und endlich entwickele man hieraus das Schema der combinirten Binomialcoefficienten (Schema d.).

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
00000008	$\frac{8!}{7!}$	1234	0
00000017	$\frac{8!}{6!}$	123	1
00000026	$\frac{8!}{6!}$	123	2
00000035	$\frac{8!}{6!}$	12	3
00000044	$\frac{8!}{6!\,2!}$	12	4
00000116	$\frac{8!}{5!\,2!}$	1	11
00000125	$\frac{8!}{5!}$	1	12
00000134	$\frac{8!}{5!}$		13
00000224	$\frac{8!}{5!\,2!}$		22
00000233	$\frac{8!}{5!\,2!}$		23
00001115	$\frac{8!}{4!\,3!}$		111

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
00001124	$\frac{8!}{4!\,2!}$		112
00001133	$\frac{8!}{4!\,2!\,2!}$		113
00001223	$\frac{8!}{4!\,2!}$		122
00002222	$\frac{8!}{4!\,4!}$		222
00011114	$\frac{8!}{3!\,4!}$		1111
00011123	$\frac{8!}{3!\,3!}$		1112
00011222	$\frac{8!}{3!\,2!\,3!}$		1122
00111113	$\frac{8!}{2!\,5!}$		11111
00111122	$\frac{8!}{2!\,4!\,2!}$		11112
01111112	$\frac{8!}{6!}$		111111
11111111	$\frac{8!}{8!}$		1111111

Ersetzt man nun in dem Schema a. und d. die Indices durch die zugehörigen Differentialquotienten resp. Binomialcoefficienten, schreibt nach Unterdrückung des Schemas c. die auf einer Zeile stehenden Grössen als Factoren zusammen und verbindet die so erhaltenen Producte zu einer Summe, so hat man $D^8\Theta^8$ vollständig entwickelt:

$$D^8\Theta^8 = \frac{8!}{7!}(8)_0\ \Theta^7 D^8\Theta$$

$$+\frac{8!}{6!}(8)_1\ \Theta^6 D\Theta D^7\Theta$$

$$+\frac{8!}{6!}(8)_2\ \Theta^6 D^2\Theta D_1\Theta$$

$$+\frac{8!}{6!}(8)_3\ \Theta^6 D^3\Theta D^5\Theta$$

$$+\frac{8!}{6!\,2!}(8)_4\ \Theta^6(D^4\Theta)^2$$

$$+\frac{8!}{5!\,2!}(8)_1(7)_1\ \Theta^5(D\Theta)^2 D^6\Theta$$

$$+\frac{8!}{5!}(8)_1(7)_2\ \ \Theta^5 D\Theta D^2\Theta D^5\Theta$$

$$+\frac{8!}{5!}(8)_1(7)_3\ \ \Theta^5 D\Theta D^3\Theta D^4\Theta$$

$$+\frac{8!}{5!\,2!}(8)_2(6)_2\ \ \Theta^5(D^2\Theta)^2 D^4\Theta$$

$$+\frac{8!}{5!\,2!}(8)_2(6)_3\ \ \Theta^5 D^2\Theta(D^3\Theta)^2$$

$$+\frac{8!}{4!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_1\ \ \Theta^4(D\Theta)^3 D^5\Theta$$

$$+\frac{8!}{4!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_2\ \ \Theta^4(D\Theta)^2 D^2\Theta D^4\Theta$$

$$+\frac{8!}{4!\,2!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_3\ \ \Theta^4(D\Theta)^2(D^3\Theta)^2$$

$$+\frac{8!}{4!\,2!}(8)_1(7)_2(5)_2\ \ \Theta^4 D\Theta(D^2\Theta)^2 D^3\Theta$$

$$+\frac{8!}{4!\,4!}(8)_2(6)_2(4)_2\ \ \Theta^4(D^2\Theta)^4$$

$$+\frac{8!}{3!\,4!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1\ \ \Theta^3(D\Theta)^4 D^4\Theta$$

$$+\frac{8!}{3!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_2\ \ \Theta^3(D\Theta)^3 D^2\Theta D^3\Theta$$

$$+\frac{8!}{3!\,2!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_2(4)_2\ \ \Theta^3(D\Theta)^2(D^2\Theta)^3$$

$$+\frac{8!}{2!\,5!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1\ \ \Theta^2(D\Theta)^5 D^3\Theta$$

$$+\frac{8!}{2!\,4!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_2\ \ \Theta^2(D\Theta)^4(D^2\Theta)^2$$

$$+\frac{8!}{6!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1\ \ \Theta(D\Theta)^6 D^2\Theta$$

$$+\frac{8!}{8!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(2)_1\ \ (D\Theta)^8$$

Um aus den angegebenen schematischen Anordnungen von $D^8\Theta^8$ diejenigen von $D^8\Theta^9$ herzuleiten, hat man nur dem Schema a. eine 0 vorzuschreiben, und das Schema b. den so erhaltenen Complexionen in a. gemäss zu ändern; um $D^8\Theta^7$ zu erhalten, lasse man in dem Schema a. die letzte Combinationsclasse der Zahlen von 1 bis 8 fort, ebenso die dieser entsprechenden Complexionen in d., streiche ferner in dem Schema a. in den übrigen Complexionen die erste Null und verändere in entsprechender Weise die Versetzungszahlen; in derselben

Weise kann man aus den Anordnungen von $D^8\Theta^7$ die Schemata für $D^8\Theta^6$ deriviren u. s. f.

Nach diesen Erörterungen kann ich nunmehr zur Lösung der oben angegebenen Aufgabe schreiten. Handelt es sich um die Auffindung der 8ten derivirten Function $f^8(x)$, worin

$$f(x) = Fy, \quad y = \varphi(x),$$

so ist nach der oben genannten Formel

$$f^8(x) = \frac{U_1}{1!}F'y + \frac{U_2}{1.2}F''y + \frac{U_3}{3!}F^3y + \frac{U_4}{4!}F^4y$$
$$+ \frac{U_5}{5!}F^5y + \frac{U_6}{6!}F^6y + \frac{U_7}{7!}F^7y + \frac{U_8}{8!}F^8y$$

worin

$$U_k = [D_\varrho{}^8\Theta^k]_0 = [D_\varrho{}^8(\varphi(x+\varrho) - \varphi x)]_0.$$

Man findet demgemäss

$$U_8 = [D_\varrho\Theta^8]_0,$$

also gleich der obigen Entwickelung von $D^8\Theta^8$, jedoch soll nach ausgeführter Differentiation ϱ gleich Null werden, und, wie man bemerkt ist alsdann $\Theta = 0$, $D\Theta = \varphi'x$, $D^2\Theta = \varphi''x$ u. s. w. oder kurz

$$D^n\Theta = \varphi^n(x).$$

In dem obigen Schema a. verschwinden alle Glieder bis auf das letzte, welches keine Null enthält, also auch kein Θ; ferner ist

$$U_7 = [D_\varrho{}^8\Theta^7]_0;$$

wie aus den angeführten Regeln hervorgeht, erhält man als Schema die nach Weglassung der Nullen zurückbleibende 7te Combinationsclasse der Zahlen 1 bis 8 in Verbindung mit den aus d. entnommenen ihr zugehörigen Werten und den zu $D^8\Theta^7$ in der 7ten Classe der Zahlen von 1 bis 8 gehörigen Versetzungszahlen.

Um es kurz zu machen, die Schemata von $D^8\Theta^8$ geben, wenn man alle Nullen in a. weglässt, dann die den so entstandenen Complexionen in a. entsprechenden Versetzungszahlen in b. schreibt, dagegen c. und d. durchaus nicht ändert, ohne Weiteres alle Werte von U_k, oder die gesammte Entwickelung für $f^8(x)$.

Die Schemata für $f^8(x)$ sind demgemäss:



Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
8	$1!$	1234	0
17	$2!$	123	1
26	$2!$	123	2
35	$2!$	12	3
44	$\frac{2!}{2!}$	12	4
116	$\frac{3!}{2!}$	1	11
125	$3!$	1	12
134	$3!$		13
224	$\frac{3!}{2!}$		22
233	$\frac{3!}{2!}$		23
1115	$\frac{4!}{3!}$		111
1124	$\frac{4!}{2!}$		112
1133	$\frac{4!}{2!\,2!}$		113
1223	$\frac{4!}{2!}$		122
2222	$\frac{4!}{4!}$		222
11114	$\frac{5!}{4!}$		1111
11123	$\frac{5!}{3!}$		1112
11222	$\frac{5!}{2!\,3!}$		1122
111113	$\frac{6!}{5!}$		11111
111122	$\frac{6!}{4!\,2!}$		11112
1111112	$\frac{7!}{6!}$		111111
11111111	$\frac{8!}{8!}$		1111111

Aus dieser Darstellung erhält man unmittelbar den Wert von $f^8(x)$, wenn man für 1, 2, 3 u. s. w. im ersten Schema $\varphi' x$, $\varphi'' x$, $\varphi''' x$ u. s. w. setzt, im Uebrigen wie vorher bei der Entwickelung von $D^8\Theta^8$ verfährt und den einzelnen zusammengehörigen Combinationsclassen aus a, b und d $\frac{F^n y}{n!}$ beischreibt.

Man erhält so

$$
\begin{aligned}
f^8 x = {} & 1!\,(8)_0 \varphi^8 x F' y \\
& \left.\begin{aligned}
&+ 2!\,(8)_1 \varphi^1 x \varphi^7 x \\
&+ 2!\,(8)_2 \varphi^2 x \varphi^6 x \\
&+ 2!\,(8)_3 \varphi^3 x \varphi^5 x \\
&+ \frac{2!}{2!}(8)_4 (\varphi^4 x)^2
\end{aligned}\right\} \frac{F^2 y}{2!} \\
& \left.\begin{aligned}
&+ \frac{3!}{2!}(8)_1(7)_1(\varphi^1 x)^2 \varphi^6 x \\
&+ 3!\,(8)_1(7)_2 \varphi^1 x \varphi^2 x \varphi^5 x \\
&+ 3!\,(8)_1(7)_3 \varphi^1 x \varphi^3 x \varphi^4 x \\
&+ \frac{3!}{2!}(8)_2(6)_2(\varphi^2 x)^2 \varphi^4 x \\
&+ \frac{3!}{2!}(8)_2(6)_3(\varphi^2 x)(\varphi^3 x)^2
\end{aligned}\right\} \frac{F^3 y}{3!} \\
& \left.\begin{aligned}
&+ \frac{4!}{3!}(8)_1(7)_1(6)_1(\varphi' x)^3 \varphi^5 x \\
&+ \frac{4!}{2!}(8)_1(7)_1(6)_2(\varphi' x^2) \varphi^2 x \varphi^4 x \\
&+ \frac{4!}{2!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_3(\varphi' x)^2(\varphi^3 x)^2 \\
&+ \frac{4!}{2!}(8)_1(7)_2(5)_2 \varphi' x (\varphi^2 x)^2 \varphi^3 x \\
&+ \frac{4!}{4!}(8)_2(6)_2(4)_2(\varphi^2 x)^4
\end{aligned}\right\} \frac{F^4 y}{4!} \\
& \left.\begin{aligned}
&+ \frac{5!}{4!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(\varphi' x)^4 \varphi^4(x) \\
&+ \frac{5!}{3!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_2(\varphi' x)^3 \varphi^2 x \varphi^3 x \\
&+ \frac{5!}{2!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_2(4)_2(\varphi' x)^2(\varphi^2 x)^3
\end{aligned}\right\} \frac{F^5 y}{5!}
\end{aligned}
$$



$$\left.\begin{aligned}&+\frac{6!}{5!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(\varphi'x)^5\varphi^3x\\&+\frac{6!}{4!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_2(\varphi'x)^4(\varphi^2x)^2\end{aligned}\right\}\frac{F^6y}{6!}$$

$$+\frac{7!}{6!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(\varphi'x)^6\varphi^2x\;\Big\}\;\frac{F^7y}{7!}$$

$$+\frac{8!}{8!}(8)_1(7)_1(6(_1(5)_1(4)_1(3)_1(2)_1(\varphi'x)^8\;\Big\}\;\frac{F^8y}{8!}$$

Weitere Beispiele zu geben wird nicht nötig sein, da das gegebene hinreicht, um alle Einzelheiten der Rechnung erkennen zu lassen. Ich will nur noch bemerken, dass die Entwickelung der Schemata für sich durchaus nicht erforderlich ist, sondern dass man es bei einiger Uebung leicht dahin bringen kann selbst den 20ten Differentialquotienten ohne Weiteres niederzuschreiben; andererseits kann man aber die Werte einer gegebenen $\varphi(x)$ oder Fy direct in die Schemata einsetzen und so Specialformeln für die höheren Differentialquotienten erlangen. Wie sich die Formeln in jedem einzelnen auf die höheren Differentialquotienten bezüglichen Falle, unter anderem auch zur Ermittelung der höheren Diffetentialquotienten inverser Functionen, benutzen zu lassen, dieses zu erörtern, würde sich für diese Skizze allzusehr ausdehnen, daher unterlasse ich die Behandlung dieser Fragen hier, und will nur noch ein paar Anwendungen geben, welche jedenfalls geeignet sein werden, die praktische Brauchbarkeit der obigen Entwickelungen ausser Zweifel zu stellen.

A. Differentiirt man die Reihe $1+e^x+e^{2x}+\ldots e^{nx}$ p mal nach x und setzt nach der Differentiation $x=0$, so erhält man

$$[D^p(1+e^x+e^{2x}+\ldots e^{nx})]_0 = 1^p+2^p+\ldots n^p$$

Setzt man hierin $e^x=y$, so hat man

$$\varphi(x)=y=e^x;\quad 1+e^x+e^{2x}+\ldots e^{nx} = 1+y+y^2+\ldots y^n = f(x);$$

man findet leicht

$$[\varphi^m x]_0 = 1;\quad [F^m y]_0 = (n+1)_{m+1}.$$

Mittelst der gegebenen Werte und der berechneten Schemata für die höheren Differentialquotienten kann man nun den Wert $1^p+2^p+\ldots n^p$ für jede beliebige ganze positive Zahl finden. Hier mögen die Berechnungen für $p=2$, 3 und 8 folgen.

Die Schemata für den zweiten Differentialquotienten sind

a	b	c	d
2	1!	1	0
11	$\frac{2!}{2!}$		1

Daraus findet man, weil das Schema a. immer 1 ist

$$1^2+2^2+3^2+\dots n^2 = 1!\,(2)_0(n+1)_2+\frac{2!}{2!}(2)_1(n+1)_3$$

$$= (n+1)_2+2(n+1)_3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

Die Schemata für den dritten Differentialquotienten sind

3	1!	1	0
12	2!	1	1
111	$\frac{3!}{3!}$		11

Man erhält daraus

$$1^3+2^3+3^3+\dots n^3 = 1!\,(3)_0(n+1)_2+2!\,(3)_1(n+1)_3$$

$$+\frac{3!}{3!}(3)_1(2)_1(n+1)_4 = (n+1)_2+6(n+1)_3+6(n+1)_4$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{1.2}\right)^2$$

Die Schemata für den achten Differentialquotienten sind bereits angegeben.

Man erhält daraus

$$1^8+2^8+3^8+\dots+n^8$$

$$= 1!\,(8)_0(n+1)_2+\left\{\begin{array}{l} 2!\,(8)_1 \\ +\,2!\,(8)_2 \\ +\,2!\,(8)_3 \\ +\,\frac{2!}{2!}(8)_4 \end{array}\right\}(n+1)_3+\left\{\begin{array}{l} \frac{3!}{2!}(8)_1(7)_1 \\ +\,3!\,(8)_1(7)_2 \\ +\,3!\,(8)_1(7)_3 \\ +\,\frac{3!}{2!}(8)_2(6)_2 \\ +\,\frac{3!}{2!}(8)_2(6)_3 \end{array}\right\}(n+1)_4$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{4!}{3!}(8)_1(7)_1(6)_1\\ +\frac{4!}{2!}(8)_1(7)_1(6)_2\\ +\frac{4!}{2!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_3\\ +\frac{4!}{2!}(8)_1(7)_2(5)_2\\ +\frac{4!}{4!}(8)_2(6)_2(4)_2\end{array}\right\}(n+1)_5+\left\{\begin{array}{l}\frac{5!}{4!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1\\ +\frac{5!}{3!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_2\\ +\frac{5!}{2!\,3!}(8)_1(7)_1(6)_2(4)_2\end{array}\right\}(n+1)_6$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{6!}{5!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1\\ \frac{6!}{4!\,2!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_2\end{array}\right\}(n+1)_7$$

$$+\left\{\frac{7!}{6!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1\right\}(n+1)_8$$

$$+\frac{8!}{8!}(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(2)_1(n+1)_9.$$

B. Differentiirt *) man Flx mehrmals nach einander, so erhält man die Gleichungen:

$$DFlx = \frac{1}{x}F'lx$$

$$D^2Flx = \frac{1}{x^2}\{F''lx - F'lx\}$$

$$D^3Flx = \frac{1}{x^3}\{F'''lx - 3F''lx + 2F'lx\} \text{ u. s. w.}$$

welche das allgemeine Bildungsgesetz erkennen lassen

$$D^nFlx = \frac{1}{x^n}\{l_0F^nlx - l_1F^{n-1}lx + l_2F^{n-2}lx - \ldots\}$$

worin l_0, l_1 u. s. w. von x unabhängig sind.

Zu ihrer Bestimmung dient die specielle Annahme $Fy = e^{-\lambda y}$; $Flx = x^{-\lambda}$, es entsteht dann

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1) = l_0\lambda^n + l_1\lambda^{n-1} + l_2\lambda^{n-2} + \ldots l_{n-1}\lambda,$$

woraus man erkennt, dass $l_0 = 1$

*) Siehe „Schlömilch, Uebungsbuch zur höheren Analysis.“ III. Aufl. S. 55.

$$l_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots (n-1)$$

$$\begin{aligned} l_2 = 1.2 + 1.3 + 1.4 + \ldots &+ 1(n-1) \\ + 2.3 + 2.4 \quad \ldots &+ 2(n-1) \\ + 3.4 \qquad &+ 3(n-1) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; &\cdot \\ &+ (n-2)(n-1) \end{aligned}$$

u. s. w. sind, oder es sind l_0, l_1, l_2 die sogenannten Facultätencoefficienten vom $n$ten Grade. Die directe Summirung derselben ist sehr umständlich; man wird daher ein Mittel suchen, dieselben auf andere Weise zu erhalten. Eine sehr bequeme Art bietet hierzu der Vergleich mit der auf combinatorischen Wege hergestellten Formel. Handelt es sich um die Entwickelung der Facultätencoefficienten des neunten Grades, so giebt die obige Formel

$$D^9 lx = \frac{1}{x^9}\{l_0 F^9 lx - l_1 F^8 lx + \ldots + l_8 F^1 lx\}$$

oder auch

$$D^9 lx = \frac{1}{x^8}(l_8 F^1 lx - l_7 F^2 lx + l_6 F^3 lx - l_5 F^4 lx$$
$$+ l_4 F^5 lx - l_3 F^6 lx + l_2 F^7 lx - l_1 F^8 lx + l_0 F^9 lx)$$

Andererseits hat man

$$D^9 lx = \frac{U_1}{1!} F^1 lx + \frac{U_2}{2!} F^2 lx + \frac{U_3}{3!} F^3 lx + \frac{U_4}{4!} F^4 lx$$
$$+ \frac{U_5}{5!} F^5 lx + \frac{U_6}{6!} F^6 lx + \frac{U_7}{7!} F^7 lx + \frac{U_8}{8!} F^8 lx + \frac{U_9}{9!} F^9 lx$$

Durch Vergleichung dieser beiden Reihen erhält man

$$1!\, l_8 = x^9 U_1;\quad 2!\, l_7 = -x^9 U_2;\quad 3!\, l_6 = x^9 U_3;\quad 4!\, l_5 = -x^9 U_4;$$
$$5!\, l_4 = x^9 U_5;\quad 6!\, l_3 = -x^9 U_6;\quad 7!\, l_2 = x^9 U_7;\quad 8!\, l_1 = -x^9 U_8;$$
$$9!\, l_0 = x^9 U_9.$$

Man entwickelt nunmehr die Schemata für den neunten Differentialquotienten.

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
9	1!	1234	0
18	2!	1234	1
27	2!	123	2
36	2!	123	3
45	2!	12	4

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
117	$\frac{3!}{2!}$	12	11
126	$3!$	1	12
135	$3!$	1	13
144	$\frac{3!}{2!}$		14
225	$\frac{3!}{2!}$		22
234	$3!$		23
333	$\frac{3!}{3!}$		33
1116	$\frac{4!}{3!}$		111
1125	$\frac{4!}{2!}$		112
1134	$\frac{4!}{2!}$		113
1224	$\frac{4!}{2!}$		122
1233	$\frac{4!}{2!}$		123
2223	$\frac{4!}{3!}$		222
11115	$\frac{5!}{4!}$		1111
11124	$\frac{5!}{3!}$		1112
11133	$\frac{5!}{3!\,2!}$		1113
11223	$\frac{5!}{2!\,2!}$		1122
12222	$\frac{5!}{4!}$		1222
111114	$\frac{6!}{5!}$		11111
111123	$\frac{6!}{4!}$		11112
111222	$\frac{6!}{3!\,3!}$		11122

Schema a.	Schema b.	Schema c.	Schema d.
1111113	$\frac{7!}{6!}$		111111
1111122	$\frac{7!}{5!\,2!}$		111112
11111112	$\frac{8!}{7!}$		1111111
111111111	$\frac{9!}{9!}$		11111111

Nun ist nach Einsetzung der Differentialquotienten und Binomialcoefficienten in die Schemata, wegen $\varphi^n x = \frac{(-1)^{n-1}(x-1)!}{x^n}$

$$U_1 = \frac{1}{x^9}(8!)1!\,(9)_0$$

$$U_2 = -\frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,7!\}2!\,(9)_1 \\ +\{1!\,6!\}2!\,(9)_2 \\ +\{2!\,5!\}2!\,(9)_3 \\ +\{3!\,4!\}2!\,(9)_4 \end{array}\right\}$$

$$U_3 = \frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,0!\,6!\}\frac{3!}{2!}(9)_1(8)_1 \\ +\{0!\,1!\,5!\}3!\,(9)_1(8)_2 \\ +\{0!\,2!\,4!\}3!\,(9)_1(8)_3 \\ +\{0!\,3!\,3!\}\frac{3!}{2!}\,(9)_1(8)_4 \\ +\{1!\,1!\,4!\}\frac{3!}{2!}(9)_2(7)_2 \\ +\{1!\,2!\,3!\}3!\,(9)_2(7)_3 \\ +\{2!\,2!\,2!\}\frac{3!}{3!}\,(9)_3(6)_3 \end{array}\right\}$$

$$U_4 = -\frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,0!\,0!\,5!\}\,\frac{4!}{3!}\,(9)_1(8)_1(7)_1 \\ +\{0!\,0!\,1!\,4!\}\,\frac{4!}{2!}\,(9)_1(8)_1(7)_2 \\ +\{0!\,0!\,2!\,3!\}\,\frac{4!}{2!}\,(9)_1(8)_4(7)_3 \\ +\{0!\,1!\,1!\,3!\}\,\frac{4!}{2!}\,(9)_1(8)_2(6)_2 \\ +\{0!\,1!\,2!\,2!\}\,\frac{4!}{2!}\,(9)_1(8)_2(6)_3 \\ +\{1!\,1!\,1!\,2!\}\,\frac{4!}{3!}\,(9)_2(7)_2(5)_2 \end{array}\right\}$$



$$U_5 = +\frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,0!\,0!\,0!\,4!\}\frac{5!}{4!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1 \\ +\{0!\,0!\,0!\,1!\,3!\}\frac{5!}{3!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_2 \\ +\{0!\,0!\,0!\,2!\,2!\}\frac{5!}{3!\,2!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_3 \\ +\{0!\,0!\,1!\,1!\,2!\}\frac{5!}{2!\,2!}(9)_1(8)_1(7)_2(5)_2 \\ +\{0!\,1!\,1!\,1!\,1!\}\frac{5!}{4!}(9)_1(8)_2(6)_2(4)_2 \end{array}\right\}$$

$$U_6 = -\frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,3!\}\frac{6!}{5!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1 \\ +\{0!\,0!\,0!\,0!\,1!\,2!\}\frac{6!}{4!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_2 \\ +\{0!\,0!\,0!\,1!\,1!\,1!\}\frac{6!}{3!\,3!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_2(4)_2 \end{array}\right\}$$

$$U_7 = \frac{1}{x^9}\left\{\begin{array}{l} \{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,2!\}\frac{7!}{6!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1 \\ +\{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,1!\,1!\}\frac{7!}{5!\,2!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_2 \end{array}\right\}$$

$$U_8 = -\frac{1}{x^9}\{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,1!\}\frac{8!}{7!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1$$

$$U_9 = \frac{1!}{x^9}\{0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0!\}\frac{9!}{9!}(9)_1(8)_1(7)_1(6)_1(5)_1(4)_1(3)_1(2)_1$$

hierin bedeutet, wie man leicht erkennen wird, 0! (ausgesprochen 0te Facultät) ebenso wie 1! 1.

Die gegebenen Beziehungen zwischen den Werten von U und l lassen erkennen, dass die in den Klammern stehenden Factoren der Werte von U der Reihe nach $1!\,l_8!$ $2!\,l_7$; $3!\,l_6$ u. s. w. sind. Man erhält nach Ausführung der angedeuteten Operationen

$$l_8 = 40320;\quad l_7 = 109584;\quad l_6 = 118124;\quad l_5 = 67284;\quad l_4 = 22449;$$
$$l_3 = 4536;\quad l_2 = 546;\quad l_1 = 36;\quad l_0 = 1.$$

Diese Berechnung ist noch einer bedeutenden Vereinfachung fähig; zerlegt man nämlich die für $1!\,l_8$; $2!\,l_7!$ $3!\,l_6$ u. s. w. erhaltenen Werte wieder in drei Schemata a,′ b′, d′, worin wiederum in b′ die Versetzungszahlen zum Schema a′, und in d′ die Indices der Binomialcoefficienten-Complexionen kommen; dagegen in a′ die in den einzelnen Reihen der Entwickelung von $1!\,l_8$; $2!\,l_7$ u. s. w.

enthaltenen Facultäten-Complexionen, wobei man das Ausrufungszeichen fortlässt, so erhält man folgende Schemata, in denen die einzelnen Classen den Werten von $1!\,l_8$; $2!\,l_7$ u. s. w. entsprechen:

Schema a'.	Schema b'.	Schema a'.	Schema b'.	Schema d'.	
8	1!	00000001	$\frac{8!}{7!}$	0	1111111
07	2!	00000000	$\frac{9!}{9!}$	1	11111111
16	2!			2	
25	2!			3	
34	2!			4	
006	$\frac{3!}{2!}$			11	
015	3!			12	
024	3!			13	
033	$\frac{3!}{2!}$			14	
114	$\frac{3!}{2!}$			22	
123	3!			23	
222	$\frac{3!}{3!}$			33	
0005	$\frac{4!}{3!}$			111	
0014	$\frac{4!}{2!}$			112	
0023	$\frac{4!}{2!}$			113	
0113	$\frac{4!}{2!}$			122	
0122	$\frac{4!}{2!}$			123	
1112	$\frac{4!}{3!}$			222	
00004	$\frac{5!}{4!}$			1111	
00013	$\frac{5!}{3!}$			1112	

Sbhema a'.	Schema b'.	Schema a'.	Schema b'.	Schema d'.
00022	$\frac{5!}{3!\,2!}$			1113
00112	$\frac{5!}{2!\,2!}$			1122
01111	$\frac{5!}{4!}$			1222
000003	$\frac{6!}{5!}$			11111
000012	$\frac{6!}{4!}$			11112
000111	$\frac{6!}{3!\,3!}$			11122
0000002	$\frac{7!}{6!}$			111111
0000011	$\frac{7!}{5!\,2!}$			111112

Die Schemata b'. und d'. sind ganz dieselben wie bei der Berechnung von f^9x; das erste Schema a'. entsteht aus dem Schema a. dadurch, dass man jedes Element in demselben um die Einheit verringert. Dasselbe lässt sich jedoch von dem Schema a. ganz unabhängig darstellen, dadurch dass man die vorher angegebenen Regeln für die Derivation einer Combinationsclasse aus der vorhergehenden in der Weise abändert, dass an den Stellen von 1, 2, 3 u. s. w. 0, 1, 2, 3 u. s. w. tritt, und dann von der ersten Classe (8) ausgeht. Selbstverständlich ist in den so erhaltenen Complexionen die Quersumme keineswegs mehr immer dieselbe. Da jedoch die Elemente in erster Linie Ordnungszahlen sind, so kann man den Zahlen 0, 1, 2, 3 u. s. w. einen um die Einheit grösseren numerischen Wert beilegen, wodurch die Quersumme wieder 9 wird, und spricht sodann die Forderung für das Schema a'. folgendermassen aus: Es sollen die aufeinander folgenden Combinationsclassen der Elemente 0, 1, 2, 3 ... 8 zur Quersumme 9 berechnet werden, wobei den Elementen 0, 1, 2 ... 8 bei der Berechnung der Quersumme einem die Einheit grösserer numerischer Wert beigelegt werden soll, was man kurz ausdrückt: es sollen die sämmtlichen Combinationsclassen der Elemente 0, 1, 2 bis 8 zur Quersumme 9 für den Zeiger $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ gebildet werden. Demgemäss ergiebt sich folgendes combinatorische Gesetz: Bildet man sämmtliche Combinationsclassen der

Elemente 0, 1, 2, 3 ... 8 zur Quersumme 9 für den Zeiger $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, schreibt dieselben als Schema a., schreibt in b. die Versetzungszahlen an, entwickelt in d. die Complexionen der Indices der Binomialcoefficienten (wie vorher); ersetzt dann die Elemente des ersten Schemas durch die den Elementen entsprechenden Facultäten, ersetzt die Indices in d. durch die zugehörigen Binomialcoefficienten, bildet aus den sich entsprechenden Werten in *a*, *b*, *d* Producte, und verbindet die zu den einzelnen Classen gehörigen Producte zu einer Summe; so sind die so entstandenen Werte der einzelnen Classen gleich $1!\,l_8$; $2!\,l_7$ u. s. w. Die Verallgemeinerung dieser ganz independenten Berechnung der Facultätencoefficienten überlasse ich dem Leser.



V.

Miscellen.

1.

Die Sectionscurven.

Die Formel

$$R^n \sin U - R^{n-1} a \sin(U + \varphi) + R^{n-2} b \sin(U + 2\varphi) - \ldots = 0$$

lässt eine Anwendung zu auf die Teilung eines Winkels in n Teile. Dabei ist nicht nötig, die Abschnitte $x = p_1 = p_2 = p_3$ der Abscissenachse gleich a zu setzen. Lassen wir also m Punkte in einen zusammenfallen, so gehen von einem Curvenpunkte m Strahlen nach demselben, und es ist $U = \Sigma\Theta = m\Theta$. Setzen wir nun unserer Aufgabe gemäss fest, dass

$$m\Theta = 2\text{R} - n\varphi$$

sei, so geht obige Formel über in

$$R^m \sin n\varphi - maR^{m-1} \sin(n-1)\varphi + m\left(\frac{m-1}{2}\right)a^2 R^{m-2} \sin(n-2)\varphi - = 0$$

Hierin ist m ganz willkürlich zu nehmen, in Folge dessen die Gleichung zur Anwendung eine ziemliche Ausdehnung besitze. Im vorliegenden Falle wird der zu teilende Winkel ψ durch $2\text{R} - m\Theta$ vorgestellt, woraus bei passender Wahl von m aus dem Winkel Θ der gesuchte $\varphi = \frac{\psi}{n}$ vermittelst der Curve sich leicht ergibt.

Bemerkt man, dass man über n frei verfügen kann, und setz man $n = 1$ voraus, so resultirt aus den obigen Formeln

$$m\Theta = 2\mathrm{R} - \varphi$$

$$\Theta = \frac{2\mathrm{R} - \varphi}{m}$$

$$R^m - m_2 a^2 R^{m-2} + m_3 a^3 R^{m-3} \frac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi} - \ldots = 0$$

Der zu teilende Winkel ψ ist $2\mathrm{R} - \varphi$, so dass m an die Stelle von n tritt, in Folge dessen

$$\Theta = \frac{\psi}{m} \text{ ist.}$$

Curven dieser Art haben die Eigenschaft, dass eine durch den Anfangspunkt gezogene Gerade die Curve in m Punkten schneidet, deren Radienvectorensumme gleich Null ist.

Setzen wir z. B. $m = 3$, so ist

$$R^3 - 3a^2 R + 2a^3 \cos\varphi = 0$$

die Trisectionscurve in Polarcoordinaten, welcher wir schon früher bei der gleichseitigen Hyperbel begegnet sind.

Diese Curve besitzt einen Knotenpunkt, durch welchen 2 Tangenten hindurchgehen, welche mit der X-Achse bezüglich die Winkel $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$ bilden. Die mit Θ bezeichneten Winkel sind der Reihe nach $\frac{2}{3}\mathrm{R} - \frac{\varphi}{3}$, $\frac{4}{3}\mathrm{R} - \frac{\varphi}{3}$, $\frac{\varphi}{3}$, was auch aus den Wurzeln

$$R_1 = 2a\cos(\tfrac{2}{3}\mathrm{R} - \tfrac{1}{3}\varphi),$$
$$R_2 = 2a\cos(\tfrac{4}{3}\mathrm{R} + \tfrac{1}{3}\varphi),$$
$$R_3 = 2a\cos\tfrac{1}{3}\varphi$$

bewahrheitet wird.

Gehen wir auf die erste Formel zurück und setzen

$$U = 2\Theta = 2\mathrm{R} - 3\varphi,$$

so resultirt aus der betreffenden Curvengleichung

$$R^2 \sin 3\varphi - 2Ra \sin 2\varphi + a^2 \sin\varphi = 0$$

die bekannte Hyperbel

$$\frac{(x - \frac{2}{3}a)^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{3}} = 1.$$

Im Anschluss an diese Aufgabe, worin die Trisection auf einen Kegelschnitt zurückgeführt ist, setzen wir überhaupt auch für die

übrigen Fälle $m = 2$ voraus, und die Teilungscurve hat die vereinfachte Gleichung

$$R^2 \sin n\varphi - 2aR \sin(n-1)\varphi + a^2 \sin(n-2)\varphi = 0,$$

worin

$$\varphi = \frac{2\mathrm{R} - 2\Theta}{n} \text{ ist.}$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung ergeben sich aus

$$\frac{R}{a} \sin n\varphi = \sin(n-1)\varphi \pm \sqrt{\sin(n-1)\varphi^2 - \sin n\varphi \sin(n-2)\varphi},$$

d. i.

$$\frac{R}{a} \sin n\varphi = \sin(n-1)\varphi \pm \sin\varphi,$$

so dass die Gleichung auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\left(R \cos\frac{n\varphi}{2} - a\cos\frac{n-2}{2}\varphi\right)\left(R \sin\frac{n\varphi}{2} - a\sin\frac{n-2}{2}\varphi\right) = 0$$

woraus die Gleichungen

$$R_1 = a\frac{\cos\frac{n-2}{2}\varphi}{\cos\frac{n}{2}\varphi}, \quad R_2 = a\frac{\sin\frac{n-2}{2}\varphi}{\sin\frac{n}{2}\varphi}$$

hervorgehen, welche auch auf anderm Wege abgeleitet werden können

Die Polargleichungen der Sectionscurven zeichnen sich durch grosse Einfachheit aus und umfassen alle Fälle. Die Untersuchung derselben bietet manches Interessante. Setzt man z. B. $n = 6$ fest, was auf die Trisection $\varphi = \frac{\mathrm{R} - \Theta}{3}$ zurückkommt, so existiren den Formeln für R_1 und R_2 gemäss die Gleichungen

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a-3x} \quad \text{und} \quad \left(x - \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{a^2}{3}$$

welche von einander unabhängig sind. Die letztere ist die Trisectionshyperbel.

Für $n = 5$ erhält man eine Gleichung $(n-1)$ten Grades von der Form

$$y^4 - Xy^2 + X_1 = 0$$

worin die X Functionen von x sind, welche ebenfalls den 4. Grad nicht überschreiten. Analoges gilt für die übrigen Fälle, die oft durch mehrere Curvengleichungen charakterisirt werden können.

E. Oekinghaus.

2.

Integration einer Differentialgleichung.

Um die Gleichung

$$y^{(4)} = xy' - y \tag{1}$$

zu integriren, differentiire ich dieselbe einmal, und erhalte hiedurch

$$y^{(5)} = xy'' \tag{2}$$

Setzt man nun

$$y'' = Y \tag{3}$$

so erhält man

$$Y''' = xY \tag{4}$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$Y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}[\mu_1 C_1 e^{\mu_1 ux} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 ux} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 ux} + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 ux}]du \tag{5}$$

vorausgesetzt, dass C_1 C_2 C_3 C_4 willkürliche, blos an die Bedingung

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{6}$$

gebundene Constante sind, und dass μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 die 4 Wurzeln der Gleichung

$$\mu^4 = 1 \tag{7}$$

sind. (Siehe meine Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Seite 103).

Setzt man nun in die Gleichung (5) für Y seinen in (3) stehenden Wert, so erhält man

$$y'' = \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}[p_1 C_1 e^{\mu_1 ux} + \mu_2 C_2 e^{\mu_2 ux} + \mu_3 C_3 e^{\mu_3 ux} + \mu_4 C_4 e^{\mu_4 ux}]du \tag{8}$$

und hieraus folgt durch Integration

$$\begin{aligned} y = {} & \mu_1 C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu_1 ux} - 1 - \mu_1 ux}{\mu_1{}^2 u^2} + \varphi(u) + x\psi(u)\right]du \\ & + \mu_2 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu_2 ux} - 1 - \mu_2 ux}{\mu_2{}^2 u^2} + \varphi(u) + x\psi u)\right]du \\ & + \mu_3 C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu_3 ux} - 1 - \mu_3 ux}{\mu_1{}^2 u^2} + \varphi(u) + x\psi(u)\right]du \\ & + \mu_4 C_4 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu_4 ux} - 1 - \mu_4 ux}{\mu_4{}^2 u^2} + \varphi(u) + x\psi(u)\right]du \end{aligned} \tag{9}$$



und in dieser Gleichung bedeuten $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ einstweilen noch unbestimmte Functionen von u. Wird diese Gleichung zweimal nach x differentiirt, so gelangt man wieder zur Gleichung (8) zurück. Nun soll aber der in (9) stehende Wert von y der Gleichung (1) genügen. Damit dies stattfinde, müssen die Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ entsprechend gewählt werden.

Ich schreibe nun die Gleichung (9) kurz auf folgende Weise:

$$y = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x}{\mu^2 u^2}+\varphi(u)+x\psi(u)\right]du \tag{10}$$

Differentiirt man dieselbe, so erhält man:

$$y' = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu u x}-1}{\mu u}+\psi(u)\right]du$$

$$y'' = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\,.\,e^{\mu u x}du$$

$$y''' = S\mu C\int_0^\infty \mu u e^{-\frac{u^4}{4}}\,.\,e^{\mu u x}du$$

$$y^{(4)} = S\mu C\int_0^\infty \mu^2 u^2 e^{-\frac{u^4}{4}}\,.\,e^{\mu u x}du$$

und werden diese Werte in die Gleichung (1), d. i. in

$$y^{(4)}-xy'+y=0 \tag{1}$$

eingeführt, ss erhält man:

$$y^{(4)}-xy'+y = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\mu^2u^2e^{\mu u x}-x\,.\,\frac{e^{\mu u x}-1}{\mu u}-x\psi(u)\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x}{\mu^2u^2}+\varphi(u)+x\psi(u)\right]du$$

oder nach gehörig vorgenommener Reduction

$$y^{(4)}-xy'+y = S\mu C\int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\mu^2u^2e^{\mu u x}-x\,.\,\frac{e^{\mu u x}-1}{\mu u}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\mu u x}-1-\mu u x}{\mu^2u^2}+\varphi(u)\right]du \tag{11}$$

Nun lässt sich stets $\varphi(u)$ so wählen, auf dass nachstehende Gleichung

2.

Integration einer Diff

$\varphi(u)\Big]du$

Um die Gleichung

$$y^{(4)} = x \qquad (12)$$

zu integriren, differentiire ich die ... rch Differentiation ... ichung (12), so er-

$$y^{(5)}$$

Setzt man nun

$$y \quad + \varphi(u)\Big]$$

so erhält man

$$\frac{xe^{\mu u x} - \mu(e^{\mu u x} - 1)}{\mu^2 u^2}$$

Das Integral dieser Glei ... Reduction eine Identität,

$$Y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}[\mu_1 C_1 e^{\mu_1 u x} + \mu$$

vorausgesetzt, dass C_1 C_2 $\frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x}{\mu^2 u^2} - \mu^2 u^2\Big]du$

C_1

gebundene Constante si

Gleichung

$$+ \frac{e^{\mu u x} - 1 - \mu u x}{\mu^2 u^2} - \mu^2 u^2\Big]du = x$$

sind. (Siehe meine V
Seite 103).

Setzt man nun $= (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$
den Wert, so erhäl ... ung (6)

$$y'' = \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}[p_1(\qquad C_2 + C_3 + C_4 = 0 \qquad (6)$$

... kürlich, man kann daher dasselbe beliebig ... an das Integral der Gleichung (1) folgen-

und hieraus fol

$$y = \mu_1 C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu_1 u x} - 1 - \mu_1 u x}{\mu_1^2 u^2} - \mu_1^2 u^2\right]du$$

$$+ \mu_2 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu_2 u x} - 1 - \mu_2 u x}{\mu_2^2 u^2} - \mu_2^2 u^2\right]du$$

$$+ \mu_3 C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu_3 u x} - 1 - \mu_3 u x}{\mu_3^2 u^2} - \mu_3^2 u^2\right]du$$

$$+ \mu_4 C_4 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}}\left[\frac{e^{\mu_4 u x} - 1 - \mu_4 u x}{\mu_4^2 u^2} - \mu_4^2 u^2\right]du + C_5 x \qquad (10)$$

und hier bedeuten, wie schon einmal gesagt, C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 willkürliche, blos an die Bedingung

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{6}$$

gebundene Constante, und μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 die 4 Wurzeln der Gleichung

$$\mu^4 = 1 \tag{7}$$

Ein particuläres Integral der Gleichung (1) ist

$$y = x \tag{11}$$

Setzt man daher in die Gleichung (1)

$$y = x \int Z\,dx \tag{12}$$

so erhält man zur Bestimmung von Z die Gleichung:

$$xZ''' + 4Z'' - x^2 Z = 0 \tag{13}$$

Das Integral dieser Gleichung ist somit:

$$Z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{14}$$

und führt man die hier angezeigte Operation durch, so gelangt man zu folgendem Integral der Gleichung (13)

$$\begin{aligned} Z = \mu_1 C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_1 ux} - 1}{\mu_1 ux} - \frac{e^{\mu_1 ux} - 1 - \mu_1 ux}{\omega_1{}^2 u^2 x^2} + \frac{\mu_1{}^2 u^2}{x^2}\right] du \\ + \mu_2 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_2 ux} - 1}{\mu_2 ux} - \frac{e^{\mu_2 ux} - 1 - \mu_2 ux}{\mu_2{}^2 u^2 x^2} + \frac{\mu_2{}^2 u^2}{x^2}\right] du \\ + \mu_3 C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_3 ux} - 1}{\mu_3 ux} - \frac{e^{\mu_3 ux} - 1 - \mu_3 ux}{\mu_3{}^2 u^2 x^2} + \frac{\mu_3{}^2 u^2}{x^2}\right] du \\ + \mu_4 C_4 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_4 ux} - 1}{\mu_4 ux} - \frac{e^{\mu_4 ux} - 1 - \mu_4 ux}{\mu_4{}^2 u^2 x^2} + \frac{\mu_4{}^2 u^2}{x^2}\right] du \end{aligned} \tag{15}$$

wobei C_1 C_2 C_3 C_4 und μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 die früher angezeigte Bedeutung haben.

Führt man in die Gleichung (13) statt der Variablen x eine neue Variable ξ ein, mittelst der Substitution

$$x^4 = \xi \tag{16}$$

so gelangt man zu der Gleichung:

$$64\xi^2 \frac{d^3 Z}{\partial \xi^3} + 208\xi \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + 72 \frac{\partial Z}{\partial \xi} - Z = 0 \tag{17}$$

Das Integral dieser Gleichung ist somit:

$$\begin{aligned} Z = \mu_1 C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_1 u \sqrt[4]{\xi}} - 1}{\mu_1 u \sqrt[4]{\xi}} - \frac{e^{\mu_1 u \sqrt[4]{\xi}} - 1 - \mu_1 u \sqrt[4]{\xi}}{\mu_1^2 u^2 \sqrt{\xi}} + \frac{\mu_1^2 u^2}{\sqrt{\xi}} \right] du \\ + \mu_2 C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_2 u \sqrt[4]{\xi}} - 1}{\mu_2 u \sqrt[4]{\xi}} - \frac{e^{\mu_2 u \sqrt[4]{\xi}} - 1 - \mu_2 u \sqrt[4]{\xi}}{\mu_2^2 u^2 \sqrt{\xi}} + \frac{\mu_2^2 u^2}{\sqrt{\xi}} \right] du \\ + \mu_3 C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_3 u \sqrt[4]{\xi}} - 1}{\mu_1 u \sqrt[4]{\xi}} - \frac{e^{\mu_3 u \sqrt[4]{\xi}} - 1 - \mu_1 u \sqrt[4]{\xi}}{\mu_1^2 u^2 \sqrt{\xi}} + \frac{\mu_1^2 u^2}{\sqrt{\xi}} \right] du \\ + \mu_4 C_4 \int_0^\infty e^{-\frac{u^4}{4}} \left[\frac{e^{\mu_4 u \sqrt[4]{\xi}} - 1}{\mu_4 u \sqrt[4]{\xi}} - \frac{e^{\mu_4 u \sqrt[4]{\xi}} - 1 - \mu_4 u \sqrt[4]{\xi}}{\mu_4^2 u^2 \sqrt{\xi}} + \frac{\mu_4^2 u^2}{\sqrt{\xi}} \right] du \end{aligned} \tag{18}$$

C_1 C_2 C_3 C_4 und μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 haben genau die früher angezeigte Bedeutung.

Simon Spitzer.

3.

Ueber einen geometrischen Ort.

P, Q seien zwei Punkte in der Ebene des Dreiecks ABC. AP werde von BC, BQ, CQ beziehungsweise in P_a, A_b, A_c getroffen. A' liege zu P_a bezüglich $A_b A_c$ harmonisch.

Wir construiren A', indem wir die Punkte A, C der durch P_a gehenden Geraden BC mit A_b, A_c verbinden. Die Verbindungsgerade der Punkte

$$(BA_b,\ CA_c),\quad (BA_c,\ CA_b)$$

trifft AP in A'.

Nun ist:

$$(BA_b,\ CA_c) \equiv Q$$

Wir haben also die Coordinaten des Schnittpunktes der Geraden

$$[Q,\ (BA_c,\ CA_b)],\quad AP_a$$

zu bestimmen.

Für $P \equiv p_a p_b p_c$, $Q \equiv q_a q_b q_c$ (trimetrische Punktcoordinaten bezüglich des Fundamentaldreiecks ABC) erhalten wir:

$$
\begin{array}{rlll}
AP_a \equiv & 0 & p_c & -p_b \\
BQ \equiv & -q_c & 0 & q_a \\
CQ \equiv & q_b & -q_a & 0 \\
A_b \equiv & p_c q_a & p_b q_c & p_c q_c \\
A_c \equiv & p_b q_a & p_b q_b & p_c q_b \\
CA_b \equiv & p_b q_c & -p_c q_a & 0 \\
BA_c \equiv & p_c q_b & 0 & -p_b q_a \\
(CA_b,\ BA_c) \equiv & p_b p_c q_a & p_b^2 q_c & p_c^2 q_b
\end{array}
$$

Die Verbindungsgerade dieses Punktes mit Q hat die Form:

$$p_b q_c + p_c q_b \qquad -p_c q_a \qquad -p_b q_a$$

Dieselbe trifft AP_a in

$$A' \equiv 2 p_b p_c q_a \qquad p_b(p_b q_c + p_c q_b) \qquad p_c(p_b q_c + p_c q_b)$$

Für $P \equiv J$, das Inkreiscentrum, bekommen wir:

$$A' \equiv 2 q_a \qquad q_b + q_c \qquad q_b + q_c$$

Der Ort der Punkte Q, für welche in diesem Falle die A' in einer Geraden liegen, ist die Curve:

$$
\begin{vmatrix}
2x_a & x_b + x_c & x_b + x_c \\
x_c + x_a & 2x_b & x_c + x_a \\
x_a + x_b & x_a + x_b & 2x_c
\end{vmatrix}
$$

$$= -2\Sigma x_a . [\Sigma x_a^2 - \Sigma x_b x_c] = 0$$

Die Gerade

$$x_a + x_b + x_c = 0$$

ist die Harmonikale von J.

Der Kegelschnitt

$$S = \Sigma x_a^2 - \Sigma x_b x_c = 0$$

reducirt sich auf den Punkt J. Denn nehmen wir an, irgend ein reeller Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ liege auf S, so dass

$$\Sigma \alpha_1^2 - \Sigma \beta_1 \gamma_1 = 0,$$

dann ist auch

$$\Sigma(1+\alpha_1)^2 - \Sigma(1+\beta_1)(1+\gamma_1) = 0$$

Ausserdem liegt J auf S.

Es müssten also die in einer Geraden liegenden Punkte

$$1, \quad \alpha_1, \quad 1+\alpha_1$$

auf dem Kegelschnitte S liegen.

Durch Projection erhalten wir den allgemeinen Satz:

P, Q seien zwei Punkte in der Ebene eines Dreiecks ABC. AP werde von BC, BQ, CQ bzhw. in P_a, A_b, A_c getroffen. A' sei der zu P_a bezüglich $A_b A_c$ vierte harmonische Punkt. Dann liegen die A' für alle Punkte Q, welche auf der Harmonikalen von P liegen, in einer Geraden. Emil Hain.

Wien, Februar 1884.

4.

Geometrische Aufgabe nebst Lösung.

Ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel α, der Winkelhalbirenden t_α und der durch die Winkelspitze gehenden Mittellinie t_a.

Auflösung. Für die Seiten und Winkel des Dreiecks ist die gebräuchliche Bezeichnung a, b, c und α, β, γ angewandt.

Es ist

(1) $$t_\alpha^2 = \frac{4b^2c^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(b+c)^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4t_a^2$$

$$0 = b^2 + c^2 - 4t_a^2 + 2bc\cos\alpha$$

$$0 = (b+c)^2 - 4t_a^2 - 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

(2) $$(b+c)^2 = 4t_a^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $(b+c)^2$ in (1) ein, so erhält man

$$t_\alpha^2 \cdot t_a^2 + bct_\alpha^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = b^2c^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$b^2c^2 - t_\alpha^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot bc = t_\alpha^2 \cdot t_a^2\sec^2\frac{\alpha}{2}$$

$$bc = \frac{t_\alpha^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{t_\alpha^4\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 4t_\alpha^2 \cdot t_a^2\sec^2\frac{\alpha}{2}}}{2}$$

da das Vorzeichen (—) für $\sqrt{}$ hier nicht zu verwerten ist.

Werden die auf a durch t_α gebildeten Abschnitte a_1 und a_2 genannt, so ist

$$a_1 . a_2 = bc - t_\alpha^2 = \frac{t_\alpha^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2t_\alpha^2 + t_\alpha \sqrt{t_\alpha^2 \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 4t_\alpha^2 \sec^2\frac{\alpha}{2}}}{2}$$

Denkt man sich dann um das Dreieck einen Kreis beschrieben und t_α bis zur Peripherie verlängert, und nennt man die Verlängerung x, so ist

$$x = \frac{a_1 . a_2}{t_\alpha} = \frac{t_\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2t_\alpha + \sqrt{t_\alpha^2 \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 4t_\alpha^2 \sec^2\frac{\alpha}{2}}}{2}$$

Demnach zeichne man den gegebenen Winkel α mit der halbirenden t_α und construire die Verlängerung x von t_α. Verlängert man dann t_α um x, und beschreibt über x als Sehne einen Kreisbogen, welcher Winkel $\frac{\alpha}{2}$ als Peripheriewinkel fasst, so schneidet der Bogen, in welchem der Scheitel liegt, einen Schenkel α entweder in 2 Punkten, oder berührt ihn, oder er hat keinen Punkt mit ihm gemein. Verbindet man im ersten Falle einen der beiden Punkte mit dem Endpunkte von t_α und zieht die Linie bis zum andern Schenkel aus, so ist das Dreieck, welches so entsteht, das verlangte. Der andere Punkt giebt dasselbe Dreieck in umgeschlagener Lage. Für den Fall der Berührung erhält man ein einziges gleichschenkliges Dreieck, im dritten Falle ist die Lösung unmöglich. P. Seelhoff.

5.

Ueber allgemeine und absolute Permutationen.

Lehrsatz. Bezeichnet man die Anzahl der allgemeinen Permutationen für n Elemente mit P_n, so ist

$$P_n = (n-1)(P_{n-2} + P_{n-1})$$

Beweis. Der Beweis wird in der Weise geführt, dass man, die Richtigkeit derselben für $n-1$ vorausgesetzt, seine Gültigkeit für n nachweist. Vertauscht man nämlich das erste Element a mit einem Elemente r, so ist die Permutationszahl für die $n-2$ übrigen Elemente P_{n-2}; die Gruppe ist charakterisirt durch die Stellung $r \ldots a \ldots$ Ersetzt man weiterhin r durch eins der übrigen $n-2$ Elemente, z. B.

durch u, so sind für die folgenden Permutationen zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens muss u mit r denjenigen Platz tauschen, welchen dies ursprünglich eingenommen hatte und a muss demnach so lange auf seinen ursprünglichen Platz zurückkehren, so dass also die Gruppe der sich hieran anschliessenden Permutationen charakterisirt ist durch $a \ldots u \ldots r \ldots$; die Anzahl dieser Permutationen für die $n-3$ übrigen Elemente ist P_{n-3}. Zweitens tritt u für r in die erste Stelle und r für u in alle $(n-2)$ Permutationen, die im Eingange angeführt wurden. Beide Fälle zusammen liefern mithin $P_{n-3}+P_{n-2}$ Permutationen, und da u der Repräsentant der $(n-2)$ übrigen Elemente ist, so ist die Gesammtzahl derselben $(P_{n-3}+P_{n-2})(n-2)$ aber nach der Voraussetzung P_{n-1}. Rechnet man die ersten P_{n-2} Permutationen hinzu, so ergeben sich für den Inbegriff sämmtlicher Permutationen, welche durch den Platztausch von a und s eingeleitet sind, $P_{n-2}+P_{n-1}$ Permutationen und da a mit $n-1$ Elementen nacheinander vertauscht werden muss, um alle Permutationen zu bekommen, so ist

$$P_n = (n-1)(P_{n-2}+P_{n-1})$$

Nun ist für die 4 Elemente a, b, c, d der Gang der Versetzungen, obiger Auseinandersetzung entsprechend,

$$\left.\begin{array}{l} b.a.c.d \\ b.a.d.c \end{array}\right\} P_2$$

$$\left.\begin{array}{ll} a.c.b.d \;\}\; P_1 & a.d.c.b \;\}\; P_1 \\ \left.\begin{array}{l} c.a.b.d \\ c.a.d.b \end{array}\right\} P_2 & \left.\begin{array}{l} d.a.c.b \\ d.a.b.c \end{array}\right\} P_2 \end{array}\right\} = (P_1+P_2).2 = P_3$$

Da nun $(P_1+P_2).2 = P_3$ ist, so folgt für sämmtliche Permutationen, wenn man noch a mit c und d vertauscht

$$P_4 = (P_2+P_3).3$$

und ganz allgemein

$$P_n = (P_{n-2}+P_{n-1})(n-1).$$

Zweiter Lehrsatz. $P_n = n.P_{n-1}$.

Beweis. Aus dem ersten Satze folgt

$$P_n = n\,P_{n-2} + n.P_{n-1} - P_{n-2} - P_{n-1}$$

Aber die 3 Glieder $nP_{n-2} - P_{n-2} - P_{n-1}$ oder $(n-1)P_{n-2} - P_{n-1}$ sind gleich

$$(n-1)P_{n-2} - (n-2)(P_{n-3}+P_{n-2}) = P_{n-2} - (n-2P_{n-3}$$
$$= -\{(n-2)P_{n-3} - P_{n-2}\}$$

und letzter Ausdruck wieder $= +\{(n-3)P_{n-4} - P_{n-3}\}$. Fährt man mit dieser Reduction fort, so erhält man für ein grades n schliesslich

$$(n-1)P_{n-2} - P_{n-1} = 3P_2 - P_3 = 0$$

und für ein ungerades n

$$(n-1)P_{n-2} - P_{n-1} = 2P_1 - P_2 = 0$$

Also ist

$$P_n = n \,.\, P_{n-1}.$$

Anmerkung. Verfährt man umgekehrt, indem man nach dem gewöhnlichen Permutationsverfahren nachweisst, dass

$$P_n = nP_{n-1}$$

ist, so folgt hieraus

$$P_n = (n-1)P_{n-1} + P_{n-1} - (n-1)P_{n-1} + (n-1)P_{n-2}$$
$$= (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}).$$

Dritter Lehrsatz. Nennt man die Permutationsformen, bei welchen kein Element in seiner ursprünglichen Stellung steht, absolute und bezeichnet die Anzahl dieser Formen für n Elemente mit $P^a{}_n$, so ist

$$P^a{}_n = (n-1)(P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-1}).$$

Beweis. Der Beweis wird, wie bei dem ersten Satze, durch den Schluss von $n-1$ auf n geführt. Vertauscht man nämlich das erste Element α mit einem der übrigen ϱ, so ist die Permutationszahl für die $n-2$ Elemente $P^a{}_{n-2}$. Die Gruppe dieser Formen ist charakterisirt durch die Stellung $\varrho \ldots \alpha \ldots$ Ersetzt man dann ϱ durch eins der übrigen $n-2$ Elemente v, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens tritt ϱ an die ursprüngliche Stelle von v und man erhält $P^a{}_{n-3}$ Permutationen der $n-3$ übrigen Elemente; die Formengruppe ist charakterisirt durch $v \ldots \alpha \ldots \varrho \ldots$ Zweitens tritt ϱ in die erstgenannten $P^a{}_{n-2}$ Permutationen überall an die Stelle von v, die Gruppe ist bezeichnet durch $v \ldots \alpha \ldots$ Für beide Fälle hat man demnach $P^a{}_{n-3} + P^a{}_{n-2}$ Permutationen und da v die $n-2$ übrigen Elemente repräsentirt, welche nach und nach mit ϱ zu vertauschen sind, so ist die Gesammtzahl dieser Permutationen $(n-2)$. $(P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-2})$ oder nach der Voraussetzung $= P^a{}_{n-1}$. Man hat also als Inbegriff sämmtlicher Permutationen, welche durch die Vertauschung von α und ϱ eingeleitet wurde, $P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-1}$ und für sämmtliche Permutationen, die dadurch erhalten werden, dass α überhaupt mit $n-1$ Elementen nach und nach zu tauschen hat, ist also

$$P^a{}_n = (n-1)(P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-1})$$

Für $P^a{}_n$ ergiebt sich aber, wenn die Elemente α, β, γ, δ sind, folgender Gang der Versetzungen

$$\left.\begin{array}{l} \beta\,.\,\alpha\,.\,\delta\,.\,\gamma\,\}\,P^a{}_2 \\ .\quad.\quad.\quad.\quad\}\,P^a{}_1 \\ \delta\,.\,\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,\}\,P^a{}_2 \\ .\quad.\quad.\quad.\quad\}\,P^a{}_1 \\ \gamma\,.\,\alpha\,.\,\delta\,.\,\beta\,\}\,P^a{}_2 \end{array}\right\} = (P^a{}_1 + P^a{}_2)2 = P^a{}_3$$

Da nun also

$$(P^a{}_1 + P^a{}_2)\,2 = P^a{}_3,$$

so ist weiter

$$(P^a{}_2 + P^a{}_3)\,.\,3 = P^a{}_4,$$

allgemein

$$P^a{}_n = (n-1)(P^a{}_{n-2} + P^a{}_{n-1})$$

Vierter Lehrsatz. $P^a{}_n = nP^a{}_{n-1} + (-1)^n$

Durch ein Verfahren, wie bei dem Beweise des 2ten Lehrsatzes lässt sich nachweisen, dass für ein grades n

$$(n-1)P^a{}_{n-2} - P^a{}_{n-1} = 3P^a{}_2 - P^a{}_3 = +1$$

und für ein ungrades n

$$(n-1)P^a{}_{n-2} - P^a{}_{n-1} = 2P^a{}_1 - P^a{}_2 = -1$$

ist, und man hat also

$$P^a{}_n = nP^a{}_{n-1} + (n-1)P^a{}_{n-2} - P^a{}_{n-1} = nP^a{}_{n-1} + (-1)^n$$

Fünfter Lehrsatz. $P^a{}_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$

Beweis.
$$\begin{aligned} P_n - P^a{}_n &= n(P_{n-1} - P^a{}_{n-1}) + (-1)^{n-1} \\ &= n\{(n-1)(P_{n-2} - P^a{}_{n-2}) + (-1)^{n-2}\} + (-1)^{n-1} \\ &= n(n-1)(P_{n-2} - P^a{}_{n-2}) + (-1)^{n-2}n + (-1)^{n-1} \\ &= n(n-1)\{(n-2)(P_{n-3} - P^a{}_{n-3}) + (-1)^{n-3}\} \\ &\qquad + (-1)^{n-2}n + (-1)^{n-1} \\ &= n(n-1)(n-2)(P_{n-3} - P^a{}_{n-3}) + n(n-1)(-1)^{n-3} \\ &\qquad + (-1)^{n-2}n + (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n - P^a{}_n = n(n-1)(n-2)\,\ldots\,(n-k+1)(P_{n-k} - P^a{}_{n-k}) \\ + n(n-1)\ldots(n-k+2)(-1)^{n-k} \\ + \ldots + (-1)^{n-2}n + (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

Für $k = n-1$ ist also

$$P_n - P^a_n = n(n-1) \ldots 2 - n(n-1) \ldots 3 + n(n-1) \ldots 4 - \ldots + (-1)^{n-2} n + (-1)^{n-1}$$

$$= n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots (-1)^{n-2} \frac{n!}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!}$$

Mithin

$$P^a_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Anmerkung. $\frac{P^a_n}{P_n}$ ist also

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

und für $n = \infty$ ist

$$\frac{P^a_n}{P_n} = \frac{1}{e} \quad \text{oder} \quad \frac{P_n}{P^a_n} = 0.$$

Der Beweis der letzten Formel, welche den von Herrn Th. Sanio zuerst aufgestellten Satz enthält, ist nach einer Mitteilung desselben ausser von mir, in ähnlicher Weise auch von Herrn O. Hermes geführt worden. Der Beweis, dass

$$\frac{P_n - P^a_n}{P_n} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots (-1)^{n-2} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

ist, wurde bereits, wie ich hinterher gefunden habe, von Nic. Bernoulli I. gegeben; man sehe hierüber Montmort: Essai d'analyse sur les jeux de hazard, Paris 1713. 2ter Theil. $\frac{P_n - P^a_n}{P_n}$ ist nämlich der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, unter allen Permutationsformen aus n Elementen eine zu treffen, bei welcher mindestens 1 Element in seiner ursprünglichen Stellung ist. Bei Montmort handelt es sich um das Spiel „Treize", bei welchem man von 13 Whistkarten einer Farbe die einzelnen umschlägt und der Reihe nach aufzählt: As, Zwei, Drei u. s. w. Das Spiel ist entschieden, wenn die aufgeschlagene Karte mit der ausgesprochenen Bezeichnung übereinstimmt. — Ueber den Satz des Herrn Sanio sehe man: Grunerts Archiv, T. LXX. p. 224.

P. Seelhoff.

6.

Beweis für den von Herrn Dr. Sanio mitgeteilten Satz, betreffend die combinatorische Definition der Zahl e.

Zu dem im 3ten Hefte des Archivs, Teil LXX. S. 224, von Herrn Dr. Sanio mitgeteilten Satze, betreffend die combinatorische Definition der Zahl e, erlaube ich mir, folgenden Beweis zu geben. Ich bezeichne hierbei die Anzahl der absoluten Permutationen von n Elementen mit N^a, die Anzahl sämmtlicher Permutationen mit N.

Handelt es sich beispielsweise um $N^a{}_5$, so seien die Elemente 1, 2, 3, 4, 5 und dieses ihre ursprüngliche Stellung. Dann kann man zum Zwecke der Permutation das erste Element in die 2te, 3te, 4te und 5te Stelle setzen und erhält 4 Gruppen, welche hierdurch charakterisirt sind.

Setzt man für jede einzelne Gruppe jedes der übrigen Elemente an die Spitze, so findet man für die Anzahl der Permutation einer Gruppe $2+9$, nämlich 2, wenn das Element an der Spitze ist, in dessen Stelle sich (1) befindet, und im Ganzen 9 für die 3 andern Elemente, wenn diese an der Spitze stehen. Es ist also aus den 4 Gruppen

$$N^a{}_5 = (2+9).4 = (N^a{}_3 + N^a{}_4).4.$$

Allgemein erhält man

$$N^a{}_n = (N^a{}_{n-2} + N^a{}_{n-1})(n-1);$$

insbesondere ist

$$N^a{}_2 = 1, \quad N^a{}_3 = 2.$$

Oder

$$N^a{}_3 = 1.3-1$$

$$N^a{}_4 = (1.3-1).4+1$$

$$N^a{}_5 = ((1.3-1).4+1).5-1 \quad \text{u. s. w.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N^a{}_n = (\ldots(((1.3-1).4+1)5-1)\ \ldots)n+(-1)^n$$

Löst man die Klammern durch Multiplication auf, so ist

$$N^a{}_n = 1.3.4.5\ldots n - 4.5.6\ldots n + 5.6\ldots n + \ldots (-1)^{n-1} n + (-1)^n$$

Also

$$\frac{N^a{}_n}{N_n} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{e} \text{ für } n = \infty$$

also

$$\lim \frac{N^a{}_n}{N_n} = \frac{1}{e} \text{ und } \lim \frac{N_n}{N^a{}_n} = e$$

Bremen. Seelhoff.

7.

Darstellung der Zahl e als unendliches Product.

Wie sich nach Wallis $\frac{\pi}{2}$ in Form eines unendlichen Productes geben lässt *), nämlich:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ \ldots}{1.3.3.5.5.7\ \ldots},$$

so auch $\frac{e}{2}$, nämlich:

$$\frac{e}{2} = \frac{1.0.3.8.45.264.1855\ \ldots}{0.1.2.9.44.265.1854\ \ldots}.$$

Hierin ist $\frac{0}{0} = 1$ und sind die Nullen nur einer vollständigeren Analogie halber zugesetzt, indem dann jeder Factor des Zählers abwechselnd um 1 grösser oder kleiner, als der entsprechende Factor des Nenners wird. Das Bildungsgesetz lautet: „die Summe je zweier auf einander folgenden Factoren des Nenners, mit der Stellenzahl des letztern von ihnen multiplicirt, liefert den folgenden Factor, also:

$$\begin{aligned}(0+\ 1).2 &= \ \ 2\\(1+\ 2).3 &= \ \ 9\\(2+\ 9).4 &= \ 44\\(9+44).5 &= 265\end{aligned}$$

etc.

Beweis. Da der dritte Factor im Nenner, nämlich: 2 identisch $= 3-1$ ist und $(1+2) = 4-1$, so wird der vierte Factor im Nenner nach dem vorhin angegebenen Bildungsgesetze: $4.3-1.3 = 4.3-4+1 = 9$ und der vierte Factor im Zähler: $8 = 4.3-4 = 4(3-1) = 4.2 =$ dem vierfachen 3ten Factor des Nenners.

Ferner wird, da $(2+9) = (3-1)+(4.3-4+1) = 3.5-5+1$ ist, der fünfte Factor des Nenners $= 3.4.5-4.5+5-1$, also der fünfte Factor im Zähler, der ja um 1 grösser sein soll, $= 5(4.3-4+1) = 5.9 =$ dem fünffachen 4ten Factor des Nenners.

Ebenso wird der sechste Factor drs Nenners, da $(9+44) = (4.3-4+1)+(3.4.5-4.5+5-1) = 3.4.6-4.6+6-1$ ist, die Form: $3.4.56-4.56+5.6-6+1$ erhalten und der sechste Factor des Zählers = dem sechsfachen 5ten Factor des Nenners sein.

*) Vgl. Cauchy: algebraische Analysis Neunte Note.

Ohne Weiteres lässt sich durch den Schluss von n auf $n+1$ dasselbe für die $n$ten Factoren des Zählers und Nenners dartun.

Brechen wir daher den doppelten Wert des unendlichen Productes:

$$e = \frac{1.2.3.8.45.264.1855\ldots}{1.1.2.9.44.265.1854\ldots}$$

beim $n$ten Factor ab, so hebt sich aus Zähler und Nenner jeder frühere Factor bis auf den letzten heraus und bleibt im Zähler das Product $1.2.3\ldots n$, im Nenner nur der $n$te Factor:

$$N = 3.4.5.6\ldots n - 4.5.6\ldots n + 5.6\ldots n\ldots \mp n \pm 1$$

und der reciproke Wert des Productes nämlich:

$$\frac{N}{n!} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

wird für $n = \infty$ in den Wert $\frac{1}{e}$ übergehn, denn

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} \pm \cdots$$

liefert für $x = -1$ die Formel:

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \cdots$$

Anmerkung 1. Es muss daher auch N die Anzahl der absoluten Permutationen zu irgend einer Grundstellung bei n Elementen sein *), was aus folgendem erhellt.

Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir vier Elemente a, b, c, d annehmen und zwei Anzahlen IV und IV' unterscheiden. Die erste gebe an, wie oft wir a, b, c, d zur Grundstellung $abcd$, die zweite, wie oft wir x, b, c, d zu derselben Grundstellung $abcd$ absolut permutiren können (d. h. so, dass kein Element mit der Grundstellung einen Platz gemeinsam hat).

Was nun die zweite Anzahl betrifft, so kann x vier Stellen einnehmen.

Steht es unter a, so kommen jetzt die absoluten Permutationen von den 3 Elementen b, c, d zur Grundstellung bcd in Betracht, ihrer Anzahl nach III.

---

*) Vgl. Combinatorische Definition der Zahl e von Th. Sanio. Grunert's Arch. T. LXX. pag. 224.

Steht es aber unter b, resp. c oder d, so kommen jedesmal die absoluten Permutationen von den 3 Elementen b, c, d zu einer Grundstellung von 3 Elementen in Betracht, deren eines a ist, also nicht unter b, c, d enthalten ist. Daher werden dann jedesmal III' absolute Permutationen gewonnen und dies geschieht 3 mal.

Soweit wird also $IV' = III + 3 . III'$, während $IV = 3 . III'$ ist, da jetzt, wenn statt x das Element a eintritt, die erste Gruppe fortfällt; also ist auch $IV' = III + IV$. Analog ist $V = 4 . IV'$, also auch $V = 4 . (III + IV)$.

Mithin wird allgemein die Anzahl der absoluten Permutationen bei $(n+1)$ Elementen = der $n$fachen Summe der Anzahlen der absoluten Permutationen bei n und $n-1$ Elementen, und wir erkennen die Uebereinstimmung mit dem oben für die Factoren des Nenners angegebenen Bildungsgesetz.

Anmerkung 2. Es gilt die Formel:

$$\left(\frac{1.1.2.9.44.265.1854\ldots}{1.2.3.8.45.264.1855\ldots}\right)^{\frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}} = i^i,$$

worin $i = \sqrt{-1}$.

Königsberg i. P. d. 4ten November 1883.

J. Hermes.

8.

Beweis für den in T. LXX. S. 224 gegebenen Ausdruck der Zahl e.

Die Anzahl derjenigen Permutationen von n Elementen, welche mit 1er Anfangsstellung $123 \ldots a$ k Plätze und nicht mehr gemeinsam haben, möge durch n_k bezeichnet werden.

In Folge dessen bezeichnet n_0 die Anzahl der Permutationen, welche mit der Anfangsstellung keinen Platz gemein haben, also der absoluten Permutationen der Anfangsstellung, welche Herr Seelhoff ausführlicher durch $P^a{}_n$ bezeichnet hat, mithin ist

$$n_0 = P^a{}_n \quad \text{und} \quad n_n = 1.$$

Man sieht leicht, dass

$$n_1 = \frac{a}{1}(1-1)_0, \quad n_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)_0 \text{ u. s. w.}$$

wodurch also n_k auf einfache Weise von der Anzahl der **absoluten** Permutationen einer geringeren Zahl von Elementen abhängig gemacht ist.

Nun handelt es sich um die Bestimmung des Grenzwerts des Verhältnisses

$$\frac{n_0}{n!}, \quad (n! = 1.2.3 \ldots n) \quad \text{für} \quad n = \infty.$$

Zuvörderst folgt aus den obigen Formeln, dass:

$$\frac{n_1}{n!} = \frac{(n-1)_0}{(n-1)!}, \quad \frac{n_2}{n!} = \frac{1}{1.2}\,\frac{(n-2)_0}{(n-2)!}, \quad \frac{n_3}{n!} = \frac{1}{1.2.3}\,\frac{(n-3)_0}{(n-3)!} \text{ u. s. w.}$$

Der Wert von $\frac{n_0}{n!}$ ist jedenfalls < 1, und man findet durch einige Versuche, dass dieser Wert oscillirt, wobei aber die Schwankungen mit wachsendem n immer kleiner werden. Man dürfte also annehmen, dass ein bestimmter Grenzwert vorhanden sein wird (dieser Punkt ist die einzige Schwäche des Beweises); wir wollen ihn durch $\frac{1}{x}$ bezeichnen, setzen also

$$\lim \frac{n_0}{n!} = \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad n = \infty.$$

Dann wird

$$\lim \frac{n_0}{n!} = \frac{(n-1)_0}{(n-1)!} = \frac{(n-2)_0}{(n-2)!} = \text{ u. s. w. } = \frac{1}{x},$$

und man hat demnach:

$$\lim \frac{n_1}{n!} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{x}, \quad \lim \frac{n_2}{n!} = \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}, \quad \lim \frac{n_3}{n!} = \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x} \text{ u. s. w.}$$

Nun ist offenbar

$$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_n = n!,$$

mithin

$$\frac{n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_n}{n!} = 1.$$

Geht man im Zähler nicht bis n_n, sondern nur bis n_k und lässt k und n beide ins Unendliche wachsen, jedoch derart, dass $n-k$ ebenfalls noch unendlich bleibt, so wird **auch dann**

$$\lim \frac{n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n!} = 1,$$

weil sich sehr leicht zeigen lässt, dass der Rest

$$\frac{n_{k+1} + n_{k+2} + \ldots + n_n}{n!}$$

sich dem Werte Null nähert.

Substituirt man in die Gleichung

$$\lim \frac{n_0 + n_1 + \ldots + n_k}{n!} = 1$$

die oben aufgestellten Werte von n_0, n_1 u. s. w., so folgt

$$\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\right) = 1$$

und daher

$$x = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = e,$$

womit der behauptete Lehrsatz bewiesen ist.

Ich erlaube mir noch die Bemerkung, dass ich die mir von den Herren Hermes und Seelhoff freundlichst mitgeteilten Beweise, was Fruchtbarkeit der Methode anbelangt, dem meinigen vorziehe, weil durch jene auch der abbrechenden (unvollständigen) Exponentialreihe eine combinatorische Bedeutung abgewonnen wird.

Königsberg. Th. Sanio.

9.

Krümmungsradius der Ellipse.

Da auf unsern Realgymnasien die Differentialrechnung nicht mehr getrieben werden soll, und es anderseits doch — schon mit Rücksicht auf die Astronomie — wünschenswert erscheint, dass unsere Schüler die Bestimmung des Krümmungsradius in einem gegebenen Punkt der Ellipse kennen lernen, so habe ich versucht, diese Bestimmung ohne Hülfe der Differentialrechnung durchzuführen und zwei nicht allzu umständliche Methoden gefunden. Zu der ersten derselben gab mir Veranlassung die hübsche Entwickelung in T. LXX. N. II. dieses Archivs.

I. Sind $K = 0$ und $E = 0$ die Gleichungen des Kreises und der Ellipse, so erhält man bekanntlich die beiden Paare gemeinschaftlicher Sehnen durch die Bedingung

$$K + \lambda E \equiv p \,.\, q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

wo p und q lineare Ausdrücke sind.

Wenn der Kreis mit der Ellipse drei zusammenfallende Punkte gemein haben soll, so wird die eine Sehne zur Tangente in dem ge-

meinschaftlichsn Punkt x', y', und die andere Sehne verbindet diesen Punkt mit dem vierten Durchschnittspunkt, daher

$$p = a^2yy' + b^2xx' - a^2b^2, \quad q = y - y' - n(x - x').$$

Sind noch ξ, η, ϱ die Mittelpunktscoordinaten und der Radius des Krümmungskreises, so wird (I) zu

$$[(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 - \varrho^2] + \lambda[a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2]$$
$$\equiv (a^2yy' + b^2xx' - a^2b^2)\,[y - nx - (y' - nx)]$$

Hieraus, wenn u eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet:

$$\begin{aligned} 1 + \lambda a^2 &= \quad ua^2y' \\ 0 &= \quad b^2x' - a^2y'n \\ 1 + \lambda b^2 &= -\,ub^2x'n \\ 2\eta &= \quad u(a^2y'(y' - nx') + a^2b^2) \\ 2\xi &= \quad u(b^2x'(y' - nx') - a^2b^2n). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert

$$n = \frac{b^2x'}{a^2y'},$$

also den Satz, auf welchen die angeführte Abhandlung Bezug nimmt; die erste und dritte Gl. liefern dann:

$$u = \frac{(b^2 - a^2)y'}{a^2b^4}; \quad \lambda = -\frac{a^4y'^2 + b^4x'^2}{a^4};$$

darauf erhält man aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2)x'^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{(a^2 - b^2)y'^3}{b^4}$$

Dann ist endlich

$$\varrho^2 = (\eta - y')^2 + (\xi - x')^2 = \frac{(a^4y'^2 + b^4x'^2)^3}{a^8b^8}$$

II. Man verlegt den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt x', y' und hat dann die Gleichungen:

$$a^2y^2 + 2a^2y'y + b^2x^2 + 2b^2y'y = 0, \quad (y - \eta)^2 + (x - \xi)^2 = \varrho.$$

Da der Mittelpunkt des Kreises auf der Normalen im Anfangspunkt liegt und der Kreis durch diesen Punkt geht, so hat man zur Bestimmung von ξ, η die Gleichungen

$$\eta = \frac{a^2y'}{b^2x'}\,\xi, \quad \eta^2 + \xi^2 = \varrho^2;$$

daraus

$$\xi = \pm \frac{b^2 \varrho x'}{w}, \quad \eta = \pm \frac{a^2 \varrho y'}{w}$$

wo

$$w = \sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}.$$

Substituirt man diese Werte in die Gleichung des Kreises, eliminirt y^2 zwischen dieser Gleichung und der der Ellipse und substituirt wieder den dadurch erhaltenen Ausdruck für y in die Gleichung der Ellipse, so erhält man nach Division durch x^2:

$$\left[x(a^2 - b^2) - 2b^2 x' \left(1 \pm \frac{a^2 \varrho}{w}\right)\right]^2 = -4a^4 y'^2 \left(1 \pm \frac{a^2 \varrho}{w}\right)^2 \cdot \frac{w \pm b^2 \varrho}{w \pm a^2 \varrho}.$$

Damit die Gleichung zum dritten male durch $x = 0$ befriedigt werde, muss sein:

$$4b^4 x'^2 \left(1 \pm \frac{a^2 \varrho}{w}\right)^2 + 4a^4 y'^2 \left(1 \pm \frac{a^2 \varrho}{w}\right)^2 \cdot \frac{w \pm b^2 \varrho}{w \pm a^2 \varrho} = 0,$$

woraus man sofort den bekannten Ausdruck für ϱ erhält und zugleich erkennt, dass das untere Vorzeichen gewählt werden muss.

Prof. Dr. Stammer.

Düsseldorf, Anfang December 1883.

10.

Zusatz zum Aufsatze: „Integration einiger partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung". *)

Die dort behandelten Gleichungen können noch allgemeiner bemacht werden, wie folgt:

1. Die partielle Differentialgleichung:

$$s = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2} p + \frac{b_1}{b_1 x + b_2} q - \frac{a_1}{b_1 x + b_2} z + f(x, y, r)$$

wo a_1 a_2 b_1 b_2 gegebene Functionen von y sind, giebt nach x partiell differentiirt:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2} r + \frac{b_1}{b_1 x + b_2} f + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für r, die integrirt werden kann, sobald a_1 a_2 b_1 b_2 gegeben sind.

---

*) Archiv T. LXX. Seite 219.

2. Die partielle Differentialgleichung:

$$s = Y f(x, p, r) e^{ax}$$

wo a eine Constante, Y eine Function von y ist, giebt nach x partiell differentiirt:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = Y e^{ax} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + af \right)$$

mit s dividirt und statt x, y die Grössen x, p als neue unabhängige Variabeln eingeführt:

$$\frac{\partial r}{\partial p} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p} r \right) + ap$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für r, die integrirt werden kann, sobald f gegeben ist.

3. Die partielle Differentialgleichung:

$$s = (aq + Y) f(x, p, r)$$

wo a eine Constante, Y eine Function von y ist, giebt nach x partiell differentiirt:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = asf + (aq + Y) \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right)$$

mit s dividirt und statt x, y die Grössen x, p als neue unabhängige Variabeln eingeführt:

$$\frac{\partial r}{\partial p} = af + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p} r \right)$$

Die Integration obiger Differentialgleichungen ist hierdurch auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zuückgeführt, — weshalb dieselben aus dem Standpunkte der partiellen Differentialgleichungen als gelöst zu betrachten sind.

Klausenburg (Ungarn) 1883 November.

F. Vályi.

11.

Einfacher Beweis der Existenz eines Mittelpunkts paralleler Kräfte.

Aus zwei gleichgerichteten Kräften p, q, die auf zwei fest verbundene Punkte A, B wirken, resultirt nach dem Gesetze des Hebels eine gleichgerichtete Kraft $p+q$, welche die Gerade AB in einem Punkte b nach dem Verhältniss

$$Ab : Bb = q : p$$

schneidet. Der Punkt b ist also unabhängig von der gemeinsamen Richtung und heisst auf Grund dieser Eigenschaft der Mittelpunkt der parallelen Kräfte p, q. Aus $p+q$ und einer gleichgerichteten auf C wirkenden dritten Kraft r resultirt ebenso eine Kraft $p+q+r$, welche die Gerade bC in c nach dem Verhältniss

$$bc : cC = r : p+q$$

teilt. Der Punkt c ist unabhängig von der Richtung der Kräfte, durch ihn geht stets die Resultante von $p+q$ und r, folglich auch von p, q, r; es ist demnach c in gleichem Sinne der Mittelpunkt von p, q, r. Mit diesem System lässt sich eine vierte gleichgerichtete Kraft zusammensetzen, u. s. f. Nach jeder Hinzufügung erhält man eine gleichgerichtete Resultante aller Kräfte und einen Mittelpunkt. Es hat sich ergeben:

Aus jedem System gleichgerichteten Kräfte, die auf bestimmte fest verbundene Punkte wirken, resultirt eine gleichgerichtete Kraft gleich der Summe aller jener Kräfte, die immer durch denselben Punkt, den Mittelpunkt des Systems, geht, wie sich auch die gemeinsame Richtung ändern möge.

Solcher Mittelpunkte kann es nicht mehr als einen geben; denn gäbe es zwei, und man nähme die Kräfte in einer von der Verbindungslinie beider verschiedenen Richtung, so würde die Resultante des Systems, sofern sie durch den einen Punkt gienge, nicht durch den andern gehen können; oder mit andern Worten, es würden zwei Kräfte, die in verschiedenen geraden Linien wirken, einander gleichwirkend sein müssen.

Der vorstehende Beweis ist mir mündlich mitgeteilt worden, mit der Aussage dass er längst bekannt sei, Dennoch scheint er allen oder den meisten Verfassern von Schulbüchern, in welchen der Satz gelehrt wird, unbekannt gewesen zu sein, da von 15 solchen Lehrbüchern, die ich kenne, einige weit umständlicher unzureichende Begründungen geben, die übrigen auf jeden Beweis verzichten.

So leicht nun auch der Weg zu entdecken ist, auf dem man hier so schnell und ohne viele Voraussetzungen zum Ziele gelangt, so hielt ich es doch nicht für unwert ihn ans Licht zu ziehen, um für die Zukunft zur Beseitigung einer Lücke in den elementaren Lehrbüchern der Physik und Mechanik beizutragen.

Gegenwärtige Mitteilung möge die Stelle eines für gleichen Zweck unter gleichem Titel geschriebenen früheren Aufsatzes einnehmen, den ich hiermit zurückziehe.

R. Hoppe.

VI.

Ueber ein Curvographon.

Von

Herrn **Emilio Pirani.**

Man hat in letzter Zeit sich vielfach bemüht das Verständniss der höheren Geometrie zu erleichtern dadurch, dass man die behandelten Gebilde als Modelle vorführte. Die Hilfsmittel, die dadurch entstanden sind, haben wesentlich den Zweck, Gebilde dreier Dimensionen, deren Vorstellung in der Tat Schwierigkeiten darbietet, wirklich räumlich vorzuführen. Diese ihre Aufgabe erfüllen sie jedoch meist äusserst einseitig. Sie stellen gewöhnlich eine bestimmte unveränderliche Form des betreffenden Gebildes dar, und ihre Anschaulichkeit wird in nicht geringem Grade durch die Gefahr beeinträchtigt, den Beschauer zu dem Gedanken zu verleiten, dass jene Form die einzig mögliche sei, oder ihn wenigstens daran zu gewöhnen mit dem betreffenden Namen immer einen unveränderlichen Begriff zu verbinden. Und es ist dies in der Tat eine Wirkung, die fast unvermeidlich ist bei jedem, der jenen Gebieten neu ist, also für diejenigen gerade, für welche die Modelle wesentlich bestimmt sind. Eine einzige Classe von Modellen ist nur bekannt, welche diesen Uebelstand nicht mit sich führen. Es sind dies die Modelle für abwickelbare Flächen, die schon seit längerer Zeit in verschiedenen Formen vorhanden sind. Die einen sind in Holz und Seidenfäden, die anderen in Eisen ausgeführt; beide gestatten die Darstellung einer ganzen Schaar von Flächen und zeigen auch einige Uebergangsformen. Ein Hauptmerkmal der erzeugten Flächen tragen sie deutlich an sich: die graden Linien. Aehnlichen Reichtum an Formen zeigen diejenigen Modelle, welche aus den Kreisschnitten zusammengesetzt sind.

Doch bei ihnen allen ist noch ein grosser Mangel vorhanden; jedes einzelne Modell vermag nur Flächen derselben Art darzustellen, wenn auch von verschiedenen Dimensionen, und man bedarf daher für jede Art eines besonderen Modells. Abgesehen von der Einseitigkeit des Systems, welche darin liegt, macht dieser Umstand die Anschaffung solcher Anschauungsmittel äusserst kostspielig. Sie zeigen jedoch schon einen grossen Fortschritt insofern als sie wenigstens die Starrheit der früheren Modelle (in Gyps, Holz etc.) aufgegeben haben und dass sie wenigstens eine Eigenschaft (Schaar der Geraden, Kreisschnitte) an allen den erzeugten Gebilden zeigen.

Es war nun mein Bestreben ein System zu finden, welches es gestattete, die Form und womöglich die Eigenschaften von möglichst vielen, zunächst ebenen Curven zu veranschaulichen.

Die Resultate sind im Folgenden mitgeteilt; doch möchte ich der speciellen Besprechung die allgemeinen Vorzüge der Methode vorausschicken.

Die Modelle, die wohl Curvographen genannt werden können, lassen sich aus einer geringen Anzahl von Elementen zusammenstellen, und zwar ohne jegliche Mühe. Die Elemente sind Doppelschienen und einfach gestaltete Verbindungsstücke; erstere entsprechen den graden Linien, letztere den Schnittpunkten derselben, oder festen Punkten auf ihnen.

Die Curven werden alle als geometrische Orte construirt, dabei aber continuirlich beschrieben.

Die Curvographen sind zunächst für Blei oder Kreide eingerichtet, doch lässt sich leicht Tinte oder Farbe statt dessen einführen, in manchen Fällen sogar Ziehfeder.

Jede geometrische aus graden Linien bestehende Figur kann mit ihnen als um feste Punkte beweglich angesehen werden und zur Darstellung von Curven benutzt werden; es wird sich nur natürlich darum handeln möglichst einfache und ergiebige Combinationen zu wählen.

Die Wahl der Doppelschienen, statt des einfachen Prismenpaares, das ja auch jede andere Bewegung als die gewünschte verhindern würde, ist geschehen, weil dadurch die Mitte zwischen den beiden Schienen die Gerade darstellt, und somit die in den Läufern angebrachten Stifte sich mit grosser Genauigkeit im Schnittpunkte zweier Geraden befinden.

Was die beschreibbaren Curven selbst anbetrifft, so ist nur für die Ellipse ein Apparat vorhanden, welcher es ermöglichte mit solcher

Allgemeinheit Ellipsen aller Dimensionen darzustellen. Es ist dies der Ellipsenzirkel, welcher nach den neueren kinematischen Bezeichnungen als oscillirende Kreuzschleifenkurbel bezeichnet werden kann.

Ausserdem hat Peaucellier in den Nouvelles Annales eine Combination seiner Elemente angegeben, welche es gestattet Cissoiden zu beschreiben; doch ist sie wie alle Peaucellier'schen Modelle ein Stabwerk, d. h. bestehend aus Stäben von bestimmter, zu berechnender Länge, welche nur drehbar aber vollkommen unverschiebbar mit einander verbunden sind. Dazu kommt, dass die Stäbe in gar keinem directen Zusammenhang mit der beschriebenen Curve stehen; dass daher aus der Construction nicht die geringste Erläuterung der Curve gezogen werden kann.

Eben in den betonten Punkten scheinen mir Vorzüge der neuen Methode zu liegen: dass erstens eine beschränkte Anzahl von Elementen, etwa 6 Schienenpaare und die dazu nötigen Verbindungsstücke, zur Zusammenstellung aller Modelle, und zur Beschreibung aller der vielen Curven genügen; zweitens dass die Construction die Entstehungsart und die Eigenschaften der Curven erläutert.

So zeigt:

I. Fig. 1. Leitlinie und erzeugenden Strahlenbüschel durch die zwei Schienen.

II. Fig. 2. Leitkreis und Strahlenbüschel.

IIIa. Fig. 3. zeigt den Zusammenhang der oscillatorischen Bewegung mit der Rotationsbewegung.

IIIb. Fig. 4. eignet sich ebenso wie I. und II. um den Begriff von Curvenschaaren und Parallelcurven zu erklären, man braucht dazu nur mehrere Stiftträger auf einmal anzubringen.

Auch der Begriff einer Umhüllungscurve lässt sich daran erklären.

IV. Fig. 5. zeigt Directrix, Durchmesser und Tangente; dazu lässt sich leicht der Radiusvector, obgleich zur Construction überflüssig, anbringen und dadurch zeigen, dass die Tangente den Winkel zwischen Durchmesser und Radiusvector halbirt; auch die Begriffe von Subtangente und leicht auch von Subnormale lassen sich erklären und zeigen.

Va. Fig. 6. lässt den Begriff einer Fusspunktcurve verdeutlichen sowohl an der Cissoide selbst wie an der grossen Anzahl anderer verwandten Curven, die sich beschreiben lassen.

VIII. Fig. 10. giebt eine Curve 4ten Grades mit Wendepunkten und einer Spitze.

VII. Fig. 9. die Lemniskate und Fusspunktcurven der Hyperbeln. Ebenso die der Ellipse.

VI. Fig. 8. die Hyperbel als geometrischen Ort. Es zeigt wie die Tangente den Winkel zwischen beiden Brennstrahlen halbirt.

IX. Fig. 11. Curven verschiedener Grade (ausgehend von einer 3ten Grades) mit Wendepunkten und Asymptoten.

Vb. Fig. 7. Cissoide und verwandte Curven nach anderer Construction.

Ausser diesen zahlreichen Beispielen von fast allen bei Curven vorkommenden Singularitäten bieten vor allen Dingen die Curvographen ein deutliches Bild von dem Einflusse der Parameter auf die Form der Curven und von dem Zusammenhang derselben nach Familien.

Ausser den beschriebenen Curven lassen sich durch oft einfachere Zusammenstellungen Curven meist transcendenter Natur erzeugen, die jedoch nur durch sehr complicirte Formeln wiederzugeben sind.

Geht man endlich zum Gebiete der synthetischen Geometrie über, so lassen sich daraus sehr viele Sätze, wie der Desargues'sche, die allgemeine Construction der Kegelschnitte aus projectivischen Strahlenbüscheln etc. durch wirklich bewegliche Figuren verdeutlichen.

Ich möchte noch bemerken, dass die beschränkte Anzahl der zulässigen Abbildungen mir die genauere Beschreibung der Constructionseinzelnheiten sowie die Verdeutlichung der erzeugten Curven unmöglich gemacht haben.

I. Conchoide.

Erzeugungsart: Wird ein Büschel von Geraden B von einer Geraden G durchschnitten und trägt man auf jeder Geraden von B vom Schnittpunkt mit G aus eine gleiche Strecke c nach beiden Seiten ab, so gehören die gewonnenen Punkte einer Conchoide an.

Zusammenstellung (siehe Fig. 1): Die Gerade G wird durch einen Doppelstab 6. 5 dargestellt, derselbe besteht aus zwei dünnen möglichst unbiegsamen Stahlstäben (am geeignetsten dazu habe ich sogenannten Bohrstahl gefunden), die durch zwei Messing-Querstücke verbunden sind. Letztere sind, wie aus der Figur ersichtlich, zweifach durchbohrt, um die Stäbchen durchzulassen, an denen sie durch

kleine Seitenschrauben befestigt sind. Unten tragen sie noch einen Dorn, vermittelst dessen sie an der Unterlage festgeheftet werden können. (Querstück mit Dorn (*a*)).

Der Büschel wird durch einen Doppelstab 1. 2. 3. 4 dargestellt. Derselbe ist durch einen mit seitlicher Hohlrinne versehenen Dorn (Form *d*) gezwungen stets durch den Punkt 1 zu gehen. In 3 ist ein Querstück befestigt, welches statt des Dornes wie 5 und 6 einen Schraubenkopf unterhalb trägt (Form *b*), welcher ihn zwingt auf $\overline{5.\ 6}$ zu bleiben. In der constanten Entfernung *c* sind 2 und 4 befestigt, welche in der Mitte Bleistifteinlagen nach Art der Crayons d'artistes tragen. (Stiftträger Form *c*). Von ihnen wird die Curve beschrieben.

Verschiedene Formen: Je nach der Länge der Strecke *c*, und je nach der Lage des Büschelcentrums 1 ergeben sich vermittelst dieser Zusammenstellung sehr verschiedenartige Curven.

Ist die Entfernung *b* des Büschelcentrums von der Geraden *G* grösser als *c*, so sind der innere sowohl wie der äussere Zweig ziemlich flach.

Je mehr sich *c* der Länge *b* nähert, desto entschiedener wird die Spitze des inneren Zweiges, desto gewölbter der äussere.

Wird *c* grösser wie *b*, so bildet der innere Zweig eine Schleife.

Wird *b* sehr klein, so wird die Schleife immer grösser und zwar gewölbt an der von *G* abgewendeten Seite, flach an der zugewendeten, — ebenso wächst die Wölbung des äusseren Zweiges.

Bis schliesslich, wenn $b = 0$, d. h. wenn das Centrum auf *G* liegt, innerer und äusserer Zweig in einen Kreis übergehen.

In der Tat hat die Conchoide die Gleichung

$$x^2y^2 = (b+y)^2(c^2-y^2)$$

worin *b* und *c* die angeführten Bedeutungen haben. Wird *b* sehr klein, so wird die Formel

$$x^2y^2 = y^2(c^2-y^2)$$
$$x^2+y^2 = c^2$$

d. h. ein Kreis.

Wird *c* sehr gross, also $\frac{b}{c}$ sehr klein, so wähle man $\frac{x}{c}$ und $\frac{y}{c}$ als Coordinaten

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2\left(\frac{y}{c}\right)^2 = \left(\frac{b+y}{c}\right)^2\left(\frac{c^2-y^2}{c^2}\right)$$

$$\xi^2\eta^2 = \left(\frac{b}{c}+y\right)^2(1-\eta^2)$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = c^2$$

also wiederum ein Kreis mit sehr grossem Radius c.

II. Kardioide.

Erzeugungsart: Wird die Leitgerade der Conchoide durch einen Kreis, der durch das Büschelcentrum geht, ersetzt, und wählt man $c = 2r$, so erhält man die Kardioide.

Zusammenstellung (Fig. 2): Der Büschel wird wieder durch einen Doppelstab 4. 5. 2. 3 dargestellt. Diesen zwingt wieder ein Dorn 5 (Form d) stets durch den einen festen Punkt zu gehen. Wiederum sind 3 und 4 Stiftträger (Form c). Statt aber durch die Leitgerade geleitet zu werden wird nun das feste Stück mit Schraubenkopf (Form b) durch einen beliebig zu stellenden Radius 6 (Form e) gezwungen eine Kreisbahn zu beschreiben. Dabei muss $\overline{1.\ 5} = \overline{1.\ 2}$ sein, d. h. 5 und 2 auf demselben Kreis liegen.

Verschiedene Formen: Ist wieder c die Strecke $\overline{2.\ 3}$ resp. $\overline{2.\ 4}$, so entsteht für $c = 2r$ bekanntlich eine Epicykloide.

Für $c > 2r$ wird die Spitze flacher, und flacher, und die Curve nähert sich einem Kreise um das Büschelcentrum.

Wird $c < 2r$, so geht die Spitze in eine Schleife innerhalb des Leitkreises über, und zwar wächst diese, während der aussenliegende Teil sich dem Kreise nähert, bis für sehr kleines c beide Zweige in den Leitkreis übergehen.

In der Tat ist die Gleichung der Kardioide

$$\varrho = c + 2r\cos\alpha \qquad \left.\begin{matrix}\varrho\\ \alpha\end{matrix}\right\} \text{ Variablen}$$

Also für $c = 2r$ die eigentliche Kardioide:

$$\varrho = 2r(1 + \cos\alpha)$$

Für $c < r$ eine Curve mit der Schleife und zwar für sehr kleines c der Kreis

$$\varrho = 2r\cos\alpha$$

d. h. der Leitkreis.

Für $c > r$ die verflachte Curve und zwar je grösser c, d. h. je kleiner $\frac{r}{c}$, desto mehr sich dem Kreise um das Büschelcentrum

$$\varrho = 2c$$

nähernd.

III. Ellipse.

I. Erzeugungsart (Fig. 3): Eine Gerade dreht sich um einen ihrer Punkte. Durch einen bestimmten Punkt derselben geht stets eine Verticale, durch einen anderen eine Horizontale. Der Schnittpunkt dieser beiden beschreibt eine Ellipse.

Zusammenstellung: Die sich drehende Gerade wird am besten durch einen flachen Holzstreifen dargestellt. Derselbe trägt durch Querstücke mit Dorn (Form *a*) die Doppelstäbe $\overline{2.\ 5}$.

Von denselben wird einer horizontal, einer vertical geführt durch die Parallelogramme 4″4″5″2″ und 4′4′5′2′. Der Stiftträger gleitet am besten auf dem horizontalen und wird geführt durch den verticalen Doppelstab.

II. Erzeugungsart (Fig. 4): Eine Strecke $\underline{a}$ bewegt sich mit ihren Endpunkten auf den Coordinatenaxen, jeder Punkt der Strecke beschreibt eine Ellipse.

Zusammenstellung: Die Coordinatenaxen sind festgeheftete Doppelstäbe. Die Strecke $\underline{a}$ wird durch zwei festgeschraubte Querstücke 1. 3 auf einem Doppelstabe abgegrenzt. Dieselben haben Schraubenköpfe (Form *b*), welche nur ein Gleiten längs der Coordinaten gestatten. Der beschreibende Punkt ist durch einen Stiftträger 2, welcher durch Seitenschrauben festgehalten wird, dargestellt.

Verschiedene Formen: Ist $\underline{b}$ die Strecke auf *a* vom beschreibenden Punkte bis zur *Y* Axe, so ist die Gleichung der beschriebenen Ellipsen

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1$$

Fällt der Punkt ausserhalb von *a* über die *Y* Axe hinaus, so wird die Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} = 1$$

Die Punkte der Strecke $\underline{a}$ geben Ellipsen, die vom mittleren Fall $b = \frac{a}{2}$, welcher einen Kreis darstellt, sich nach der *X* Axe resp. *Y* Axe hin immer mehr verflachen bis zu einer Strecke 2*a* in denselben. Diese alle werden von der Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

umhüllt.

Die Punkte auf der Verlängerung der Strecke $\underline{a}$ geben Schaaren

von Ellipsen, deren flachste wieder die beiden Strecken $2a$ auf X resp. Y Axe sind.

Uebrigens beschreibt jeder mit $\underline{a}$ fest verbundene Punkt eine Ellipse um den Coordinatenanfangspunkt; in dem Falle, dass der Punkt Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks über a als Hypotenuse ist, entsteht eine durch den Coordinatenanfangspunkt gehende gerade Linie.

IV. Parabel. (Fig. 5.)

Erzeugungsart: Ein Punkt P bewegt sich so, dass seine Entfernung vom Brennpunkt und von der Leitlinie stets gleich ist. Um dies zu erreichen wird um den Brennpunkt eine Gerade gedreht; da wo sie die Leitgerade trifft, wird ein Lot auf letztere errichtet, ein zweites Lot wird in der jedesmaligen Mitte der Strecke zwischen Brennpunkt und Leitlinie errichtet. Der Durchschnitt beider Lote giebt Punkte der Parabel.

Zusammenstellung: Ein Doppelstab $\overline{1.\ 2.\ 3}$ dreht sich um das Dornstück 1 (Form a). Die beiden Verticalen sind die Leitlinie und die Scheiteltangente.

In 2 und 3 befinden sich doppelte Querstücke (Form f), die aus zwei Querstücken (Form b) bestehen, welche senkrecht auf einander durch eine Schraube befestigt sind, welche unten einen Schraubenkopf (wie Form b), oben eine Mutter besitzt.

Das eine bei 3 trägt $\overline{3.\ 4}$ fest, während es sich auf der Leitlinie bewegen kann. Das zweite bei 2 trägt $\overline{2.\ 4}$ fest und gleitet auf $\overline{1.\ 2.\ 3}$.

Ersteres wird durch $\overline{1.\ 2.\ 3}$ geleitet, letzteres durch die Scheiteltangente.

In 4 befindet sich der Stiftträger, welcher auf dem Durchmesser $\overline{3.\ 4}$ gleitet und durch die Tangente $\overline{2.\ 4}$ geleitet wird.

Verschiedene Formen: Nimmt man die Scheiteltangente nicht in der halben Entfernung zwischen Brennpunkt und Directrix, so ergeben sich Curven von der Form

$$y^2 = \frac{(q+p)^2}{q} x$$

worin p die Entfernung Brennpunkt bis Scheitel ist, q die Entfernung Scheitel bis Directrix.

V. Cissoide. (Fig. 6.)

I. Erzeugungsart: Die Cissoide ist bekanntlich die Fusspunktcurve der Parabel, wenn man den Scheitelpunkt zum Pol nimmt.

Nun wäre es aber zu umständlich und complicirt, zugleich Parabel, ihre Tangenten und die Fusspunkte zu construiren. Man kommt leichter zum Ziel, wenn man bedenkt, dass wenn der Brennpunkt Pol ist, die Fusspunktcurve durch die Scheiteltangente dargestellt wird. Diese Eigenschaft gestattet nämlich die Tangenten einer Parabel zu zeichnen ohne die Parabel selbst zu haben, und nun braucht man nur noch vom Scheitel aus Lote auf jene Tangenten zu fällen.

Zusammenstellung: Die Verticale ist die Scheiteltangente. 1 der Scheitel, 1′ der Brennpunkt der Parabel. $\overline{1.\ 4}$ und $\overline{1'.\ 3}$ werden durch die Stücke 1″ und 2 parallel geführt. $\overline{1'.\ 3}$ trägt in 3 die Tangente durch das Doppelstück 3 (Form *f*), welches auf $\overline{1'.\ 3}$ verschiebbar ist und durch die Scheiteltangente geleitet wird. $\overline{1.\ 4}$ ist also Lot vom Scheitel auf die Tangente, so dass 4 (Stiftträger Form *c*) die Cissoide beschreibt.

Verschiedene Formen: Die Gleichung der eigentlichen Cissoide ist, wenn p die Brennseite der Parabel:

$$x^3+y^2(p+x)=0$$

Die Curve besitzt im Scheitel eine Spitze. Wählt man einen anderen Punkt der Abscissenaxe als Pol, so wird die Curve wesentlich anders.

Sei p die Brennweite; m die Polweite von der Scheiteltangente (Y Axe) aus.

Für grosses positives m liegt die Curve ganz auf der Seite des Brennpunktes (positive) und zeigt keine Singularitäten.

Bei $m=p$ geht sie in die Y Axe über.

Wird $m<p$, so bildet die Curve eine Spitze im Scheitel und nähert sich der Cissoide.

Für $m=0$ erreicht sie diese.

Unmittelbar danach bildet sie eine Schleife, die mit zunehmenden negativen m wächst.

Wählt man einen Punkt der Y Axe $y=n$ als Pol, so hat die Curve ausser für $n=0$ eine Schleife, die vom übrigen Teil durch die Y Axe getrennt wird.

Liegt der Pol beliebig, so hat die Curve, wenn jener **negative** Abscisse hat, eine Schleife, sonst einen Umkehrpunkt.

II. Erzeugungsart (Fig. 7): Bewegt sich der Endpunkt des gleich c gemachten Schenkels eines rechten Winkels auf einer Geraden G, während der zweite Schenkel durch einen festen Punkt geht, welcher von G um c entfernt ist, so beschreibt der Halbirungspunkt des ersten Schenkels eine Cissoide.

Zusammenstellung: Die Ausführung ist sehr einfach. Die Horizontale ist die Leitlinie. 1. 2. 4 ist der rechte Winkel, gebildet aus zwei Doppelstäben und einem Doppelquerstück (Form f). In 4 befindet sich ein festes Querstück (Form b), das durch die Leitlinie geführt wird. Ein Dorn 1 zwingt den zweiten Schenkel stets durch denselben Punkt zu gehen. Ein Stiftträger 3 beschreibt die Cissoide.

Verschiedene Formen: Auch hier lassen sich durch andere Wahl der Lage von 3, durch andere Stellung von 1 oder gar durch Wahl eines anderen als eines rechten Winkels (was ja das Doppelstück gestattet) die verschiedensten Formen erhalten.

VI. Hyperbel. (Fig. 8.)

Erzeugungsart: Die Hyperbel ist bekanntlich der Ort der die Punkte P, für welche die Differenz der Entfernung von zwei festen Punkten ($F_1 F_2$ Brennpunkte) stets constant ($2a$ reelle Axe) ist.

Beschreibt man also um einen Brennpunkt F_1 einen Kreis mit Radius $2a$ und zieht PF_1, PF_2, so muss, wenn B der Schnittpunkt von PF_1 mit dem Kreis ist, $PB = PF_2$ sein, d. h. BPF ein gleichschenkliges Dreieck.

Um dies hervorzubringen benutzt man die Eigenschaft der Tangente den Winkel zu halbiren, den beide Radienvectoren einschliessen. Man erhält ja alle Tangenten an einer Hyperbel, wenn man einen rechten Winkel zwingt mit dem Scheitel den Kreis mit Radius a um den Mittelpunkt der Hyperbel zu beschreiben, während ein Schenkel stets durch F geht, der zweite Schenkel giebt dann die Tangenten.

Der Punkt, wo sich die Tangente und der entsprechende Radiusvector schneiden, ist Punkt der Hyperbel.

Zusammenstellung: Der Mittelpunkt der Hyperbel ist 3′. Der Leitkreis wird durch den Holzstreifen 1 beschrieben, der den Scheitel des rechten Winkels 3. 6. 7 trägt. Ein Schenkel dieses letzteren geht stets durch den Brennpunkt 3, der andere stellt die Tangenten

dar und lenkt den Stiftträger 7, der die Hyperbel beschreibt. Der Träger gleitet auf dem Radiusvector $\overline{4.\ 5.\ 7}$, welcher durch die Parallelführung 5. 4. 3. 3′ stets zu 1 parallel gehalten wird.

VII. Lemniskate. (Fig. 9.)

Erzeugungsart: Die Lemniskate kann als Fusspunktcurve der gleichseitigen Hyperbel angesehen werden, wenn der Mittelpunkt als Pol genommen wird.

Wie bei der Cissoide, so braucht man auch hier nur die Tangenten der Hyperbel zu haben. Man erhält dieselben, wenn der Scheitel eines rechten Winkels sich auf dem Leitkreis bewegt, während ein Schenkel durch den Brennpunkt F geht; der zweite Schenkel stellt dann die jedesmalige Tangente dar.

Fällt man nun darauf vom Mittelpunkt M des Leitkreises Lote, so gehören die Fusspunkte der Lemniskate an.

Zusammenstellung: Der Radius 4 beschreibt den Leitkreis und führt das Doppelquerstück 3 (Form f), welches Scheitel des rechten Winkels ist. Von letzterem geht ein Schenkel stets durch den Brennpunkt 5, der andere Schenkel trägt gleitend den Stiftträger 6, welcher durch das Lot $\overline{1.\ 2}$ geleitet wird. Das Lot $\overline{1.\ 2}$ wird durch die, parallele Führung 1. 3. 2′. 2 stets $\overline{3.\ 5}$ parallel gehalten.

Verschiedene Formen: Die Lemniskate erhält man für $MF = a\sqrt{2}$ wo a der Radius des Leitkreises ist. Ihre Gleichung ist

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

Wird MF kleiner, so nähern sich die Wendetangenten der Y Axe. Die Curve ist dann Fusspunktcurve einer beliebigen Hyperbel und hat die allgemeinere Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = ax^2-by^2$$

wo a und b die Axen der Hyperbel sind.

Wird $MF = a$, d. h. liegt F auf dem Leitkreis, dann fallen die Wendetangenten zusammen und die Curve geht in zwei Kreise über

$$x^2+y^2 = \pm\, ax$$

Wird endlich $MF < a$, so ist die Curve Fusspunktcurve einer Ellipse mit den Axen a und b und hat die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = ax^2+by^2$$

Sie hat keinen Doppelpunkt mehr, sondern die Form einer an der kleinen Axe eingedrückten Ellipse.

Für $a = b$ geht sie in den Kreis über.

Fusspunktcurven der Hyperbel im Allgemeinen. Man erhält sie, wenn man statt des Mittelpunktes beliebige Punkte als Pole wählt.

Ihre allgemeine Gleichung ist:

$$[x(x-m)+y(y-n)]^2 = a^2(x-m) - b^2(x-n)$$

Man kann den Pol auf der X Axe, auf der Y Axe, auf dem Leitkreise ($m^2+n^2 = a^2$) und endlich ganz beliebig wählen.

In allen diesen Fällen hat die entstehende Curve Schleifenform solange die Abscisse des Pols kleiner als $\underline{a}$. Und zwar liegt der Doppelpunkt im Pol.

Liegt die Abscisse des Pols zwischen a und der Brennweite, so hat die Curve eine Spitze.

Liegt P auf der Abscissenaxe und ist die Polweite gleich der Brennweite, so entsteht der Kreis.

Ist die Abscisse grösser als die Brennweite, so entsteht eine Curve von Kardioidischer Gestalt ohne Doppelpunkte und mit zwei Wendepunkten.

VIII. Die Curve $a^2y^2 = (a+x)^3(a-x)$. (Fig. 10.)

Erzeugungsart: Ein rechter Winkel bewegt sich mit dem Scheitel auf einem Kreise, während seine Schenkel den Coordinatenaxen parallel bleiben. Die Schnittpunkte des horizontalen Schenkels mit der Y Axe werden mit einem Endpunkt des horizontalen Durchmessers des Kreises verbunden. Diese Verbindungsgerade trifft den verticalen Schenkel des rechten Winkels im Punkte der Curve.

Zusammenstellung: Der Scheitel des rechten Winkels ist 5.

Der verticale Schenkel $\overline{7.\,5}$ wird durch die Parallelführung 3. 5. 1′. 1 der Leitgerade $\overline{6.\,3}$ parallel gehalten.

Der horizontale $\overline{5.\,6}$ hebt das Stück 6, welches mit zwei Schraubenköpfen versehen ist und auf der Leitlinie gleitet. Dieses wiederum hebt die $\overline{2.\,6}$, welche den Stiftträger 7 leitet, welcher auf $\overline{5.\,7}$ gleitet.

Verschiedene Formen: Die Curve hat eine Blattform mit einer Spitze im Pol.

Wählt man irgend einen anderen Punkt als den Durchschnitt der X Axe mit dem Leitkreise zum Pol, so bildet die Curve eine Schleife.

IX. Die Curve $xy^2 = 4a^2(2a-x)$. (Fig. 11.)

Erzeugungsart: Zieht man im Endpunkt eines horizontalen Durchmessers eines Kreises die Tangente und durch den gegenüberliegenden Sehnen; fällt auf den Schnittpunkten der Sehnen mit dem Kreise Senkrechte, und legt durch die Schnittpunkte der Sehnen mit der festen Tangente Horizontale, so schneiden die letztgenannten jene Senkrechten in Punkten der Curve.

Zusammenstellung: Die Sehnen werden durch $\overline{4.\ 5.\ 6}$ dargestellt. Das Doppelstück 6 gleitet auf der Tangente gelenkt von der Sehne und trägt die horizontale $\overline{6.\ 7}$. Letztere lenkt den Stiftträger 7, welcher auf $\overline{7.\ 5}$ gleitet. Der Radius 2 führt 5. Die Parallelführung 3. 3'. 4'. 5 hält $\overline{5.\ 7}$ vertical. Die Curve wird von 7 beschrieben.

Verschiedene Formen: Die Curve hat zwei Zweige, welche von der Tangente im Pol asymptotisch berührt werden. Beide haben für $x = \frac{3}{2}a$ (a Radius des Leitkreises) einen Wendepunkt.

Auch hier kann durch andere Wahl des Poles eine grosse Mannigfaltigkeit von Curven erhalten werden.

Liegt zunächst der Pol ausserhalb des Kreises und zwar mit einer Abscisse $> a$, so ist die Curve symmetrisch und geschlossen und zwar blattartig.

Ist die Abscisse $< a$, so berührt die Curve stets zweimal asymptotisch die Verticale durch den Pol.

Und zwar hat, wenn der Pol auf dem Kreise liegt, die Curve nur einen Zweig; wenn er innerhalb des Kreises liegt, zwei Zweige, die den Pol umfassen; wenn er ausserhalb des Kreises liegt (aber mit Abscisse $< a$), zwei getrennte Zweige, einen oberhalb, einen unterhalb des Pols.

VII.

Zur elementar-geometrischen Kegelschnittslehre.

Von

Herrn **Karl Lauermann**,

Lehrer an der Bürgerschule in Grulich, Böhmen.

Es gibt eine grosse Anzahl einheitlicher Constructionen der Linien zweiter Ordnung.

Ich erlaube mir, im Nachfolgenden auf eine neue Constructionsmethode hinzuweisen, welche in einfacher und eleganter Art die Lösung der den Kegelschnitt betreffenden Aufgaben ermöglicht.

Bewegt sich eine Gerade G (Fig. 1.) parallel zu einer gegebenen Richtung L, während sie stets zwei feste Gerade G_1, G_2 schneidet, dann beschreiben die Punkte m_1, m_2 auf ihr, deren Entfernungen von einem festen Punkte F gleich sind dem von G_1, G_2 auf G begrenzten Stücke ab, einen Kegelschnitt [1]).

Der elementare Beweis dieses Satzes lässt sich leicht erbringen, wenn die Eigenschaft der Linien zweiter Ordnung als bekannt vorausgesetzt wird, dass das Verhältniss der Entfernungen jedes ihrer Punkte von einem festen Punkte und einer festen Geraden (Brennpunkt und Leitlinie) eine constante Grösse ist.

---

1) Herr Gustav Rebiček, Physiker und Mechaniker in Prag, hat mit Zugrundelegung dieser ihm von mir mitgeteilten Construction in sinnreicher Weise einen Konographen hergestellt.

Errichten wir nämlich von dem Schnittpunkte o des Geradenpaares G_1, G_2 aus die zu L senkrechte Gerade ov, welche G in c schneidet, und bezeichnen wir ferner mit α, β die Winkel, die ov mit G_1, beziehungsweise G_2 einschliesst, so ist

$$m_1 F = ab = ac - bc = oc(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = m_1 d(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta),$$

oder

$$m_1 F : m_1 d = \varepsilon,$$

sonach der vorliegende geometrische Ort ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkte F, der Leitlinie L und der Excentricität

$$\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta.$$

Offenbar ist es gleichbedeutend, ob wir zur Construction eines bestimmten Kegelschnittes das Geradenpaar G_1, G_2 oder ein anderes, irgendwo in der Ebene gelegenes, benutzen, wenn dieses nur für jeden Zeitpunkt der Bewegung der Geraden G auf derselben ein gleiches Stück abschneidet wie das ursprüngliche.

Diese Tatsache, welche aus dem Wesen unserer Construction unmittelbar hervorgeht, leitet zu der interessanten Erkenntniss, dass überhaupt jede beliebige Gerade der Ebene als Constructionsgerade angesehen werden kann, und dass sich in folgender Weise die ihr entsprechende zweite Gerade finden lässt.

Wir bringen (Fig. 2.) die beliebig angenommene Gerade H_1 mit G_1 — es könnte natürlich ebenso gut auch G_2 sein — und L in den Punkten p und o_1 zum Schnitte.

Wenn wir nun von p die Parallele zu L ziehen und den Schnittpunkt q derselben mit G_2 durch die Gerade H_2 mit o_1 verbinden, so lässt sich zeigen, dass H_2 die gesuchte zweite Constructionsgerade ist.

Denn aus den ähnlichen Dreiecken oab, opq; $o_1 a_1 b_1$, $o_1 p q$ folgen für ab, beziehungsweise $a_1 b_1$ die Werte:

$$ab = oa : op \,.\, pq,$$

$$a_1 b_1 = o_1 a_1 : o_1 p \,.\, pq;$$

und weil nach den Dreiecken poo_1, paa_1 die Proportion

$$ba : op = o_1 a_1 : o_1 p$$

besteht, muss

$$ab = a_1 b_1$$

sein, womit, da es sich hier eben nur um die Gleichheit dieser Strecken handelt, der Beweis hergestellt erscheint.

Wenn wir nun, diesem Vorgange entsprechend, die Hauptaxe xx_1 des Kegelschnittes — welche bekanntlich durch F geht und auf L senkrecht steht — als eine Constructionsgerade ansehen, so gewinnen wir in der ihr entsprechenden zweiten Geraden T die in der Brennpunktsordinate berührende Tangente; und in der Tangente des von derselben mit xx_1 eingeschlossenen Winkels γ die numerische Excentricität ε des Kegelschnittes, deren Wert — wie ja bekannt ist — den Charakter des Kegelschnittes bestimmt.

Im Nachfolgenden verwenden wir die vorgeführte Erzeugungsart der Linien zweiter Ordnung zur Lösung einiger Aufgaben, wobei wir stets von der Annahme ausgehen werden, dass der Kegelschnitt durch das Geradenpaar G_1, G_2, die Leitlinie L und den Brennpunkt F gegeben sei.

1. Es sind die gemeinschaftlichen Punkte der Geraden M_1 (Fig. 3.) mit dem Kegelschnitte zu bestimmen.

Zu diesem Ende betrachten wir M_1 als Constructionsgerade und bestimmen uns in der angegebenen Weise zu derselben die entsprechende Gerade M_2.

Die vorliegende Aufgabe gewinnt unter diesem Gesichtspunkte folgende Fassung:

Es sind die auf M_1 gelegenen Spitzen solcher gleichschenkligen Dreiecke zu finden, deren eine Basisecke in F, die andere aber auf M_2 liegt, jedoch so, dass die von M_1, M_2 begrenzten Seiten dieser Dreiecke parallel zu L werden.

Denken wir uns o_1 — den Schnittpunkt von M_1 mit L — mit F durch die Gerade M_3 verbunden und von p als Mittelpunkt mit dem Halbmesser pq den Kreis K beschrieben, welcher M_3 in r_1 und r_2 schneidet, so befinden sich ohne Zweifel die gleichschenkligen Dreiecke pqr_1 und pqr_2 mit jenen, deren wir zur Lösung unserer Aufgabe bedürfen, in ähnlicher Lage, d. h. die homologen Seiten laufen zu einander parallel.

Ziehen wir also von F aus zu pr_1 und pr_2 die Parallelen, bis dieselben M_1 in s_1 und s_2 schneiden, so werden diese Schnittpunkte die Spitzen der gesuchten Dreiecke, somit auch die Schnittpunkte von M_1 mit dem Kegelschnitte sein.

Besonders einfach gestaltet sich die Construction der Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Hauptaxe xx_1.

In diesem Falle haben wir (Fig. 2.) die durch F gehenden und zu xx_1 um 45° geneigten Geraden zu bestimmen und die Schnittpunkte $\alpha_1 \beta_1$ derselben mit T auf xx_1 in α, β zu projiciren.

Fällt s_1 mit s_2 zusammen, d. h. ist M_1 eine Tangente des Kegelschnittes, dann rücken auch r_1 und r_2 unendlich nahe an einander und es berührt der Kreis K die Gerade M_3.

Aus dieser Ueberlegung folgen unmittelbar die Sätze:

a) Die Geraden, welche von dem Berührungspunkte einer Tangente und ihrem Schnittpunkte mit der Leitlinie zu dem Brennpunkte gezogen werden können, stehen auf einander senkrecht.

b) Jeder Punkt einer Kegelschnittstangente hat von der, ihren Schnittpunkt mit der Leitlinie und den Brennpunkt verbindenden Geraden eine Entfernung, welche der Strecke gleichkommt, die auf der erzeugenden Geraden für die Lage dieses Punktes von zwei Constructionsgeraden begrenzt wird.

2. Im Punkte m_2 (Fig. 1.) des Kegelschnittes ist die Tangente zu construiren.

Wir verbinden, indem wir den Satz *a* in Anwendung bringen, m_2 mit F und errichten im letzteren Punkte auf m_2F die Senkrechte, welche L in k schneidet; kmn ist die gesuchte Tangente.

Von dem Punkte P ausserhalb des Kegelschnittes (Fig. 4.) an diesen die Tangenten zu legen.

Mit Rücksicht auf den Satz b) handelt es sich hier um die Bestimmung zweier in F convergirenden Geraden T_1', T_2', von welchen P ihre Entfernung mm_1 gleich der Strecke hat, welche auf G für die Lage des Punktes P von G_1, G_2 gebildet wird. Das sind aber offenbar die Tangenten eines Kreises mit dem Mittelpunkte P und dem Halbmesser mm_1.

Denken wir uns also diese Tangenten bestimmt und ihre Schnittpunkte a_2, b_2 mit L durch die Geraden T_1, T_2 mit P verbunden, so sind schon T_1, T_2 die verlangten Tangenten.

Die Sätze *a* und *b* führen auch zu einer einheitlichen Lösung des Normalenproblems bei den Kegelschnitten mit Zuhilfenahme eines Kreises.

Grulich, August 1883.

VIII.

Eigenschaften der Punkte mit reciproken Dreieckscoordinaten und deren Anwendung auf das Dreieck.

Von

Max Greiner.

Verschafft man sich zu einem durch die Dreieckscoordinaten α, β, γ bestimmten Punkte p denjenigen Punkt p', der die reciproken Coordinaten $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ besitzt, so entspricht durch diese Anordnung jedem Punkte p der Ebene des Dreiecks, der nicht auf einer Seite desselben liegt, ein und nur ein Punkt p'.

Sind nun die Seiten des Fundamentaldreiecks durch die Gleichungen:

$$A \equiv x \cos \varepsilon_1 + y \sin \varepsilon_1 - \delta_1 = 0$$
$$B \equiv x \cos \varepsilon_2 + y \sin \varepsilon_2 - \delta_2 = 0$$
$$C \equiv x \cos \varepsilon_3 + y \sin \varepsilon_3 - \delta_3 = 0$$

gegeben, so haben die Verbindungslinien der Punkte p und p' mit der Ecke a des Dreiecks, worin die Seiten B und C zusammenstossen, die Gleichungen:

$$ap \equiv B\gamma - C\beta = 0 \qquad ap' \equiv B\beta - C\gamma = 0$$

welche dadurch auf die Normalform gebracht werden, dass man sie mit den Ausdrücken:

$$\sqrt{(\gamma \cos \varepsilon_2 - \beta \cos \varepsilon_3)^2 + (\gamma \sin \varepsilon_2 - \beta \sin \varepsilon_3)^2}$$

und

$$\sqrt{(\beta \cos \varepsilon_2 - \gamma \cos \varepsilon_3)^2 + (\beta \sin \varepsilon_2 - \gamma \sin \varepsilon_3)^2}$$

dividirt; da aber beide Ausdrücke einander gleich sind, so hat man für die Geraden, welche die Winkel der beiden Verbindungslinien ap und ap' halbiren, die Gleichungen:

$$(B\gamma - C\beta) + (B\beta - C\gamma) = 0$$

und

$$(B\gamma - C\beta) - (B\beta - C\gamma) = 0$$

oder:

$$B - C = 0$$

und

$$B + C = 0$$

woraus sich ergibt, dass die Ecktransversalen ap und ap' mit den Seiten B und C gleiche Winkel einschliessen. Da aber jedem Punkte p nur ein Punkt p' entspricht, so folgt:

„Werden von den Ecken eines Dreiecks aus Transversalen durch „einen beliebigen Punkt $p \equiv \alpha, \beta, \gamma$ gezogen, so schneiden sich auch „diejenigen Transversalen, welche von denselben Ecken und unter „derselben Neigung gegen die entsprechenden Winkelhalbirenden des „Dreiecks gezogen werden, in einem und demselben Punkte $p' \equiv \frac{1}{\alpha}$, „$\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, dessen Coordinaten reciprok sind zu denjenigen des gegebenen „Punktes p.“ . . . . (1)

Sind p_2 und p_3, p_2' und p_3' die Fusspunkte der von den Punkten p und p' auf die Seiten B und C gefällten Lote, so ist im Kreisviereck pp_2ap_3 der Winkel $pap_3 = pp_2p_3$; da aber nach (1) Wkl. $pap_3 = p'ap_2'$ und pp_2 senkrecht auf ap_2' steht, so ist auch p_2p_3 senkrecht auf ap'; weshalb folgt:

„Fällt man von einem Punkte p Lote auf die Seiten eines Drei- „ecks und verbindet die Fusspunkte derselben, so schneiden sich die „von den Ecken des Dreiecks auf die entsprechenden Seiten des „Fusspunktdreiecks gefällten Senkrechten in einem und demselben „Punkte p', dessen Coordinaten reciprok sind zu denjenigen des „Punktes p.“ . . . . (2)

Denkt man sich durch die Fusspunkte p_1, p_2, p_3 der vom Punkte p auf die Dreiecksseiten gefällten Lote einen Kreis gelegt, welcher die Seiten noch in den Punkten p_1', p_2', p_3' trifft, und errichtet in p_2' und p_3' Lote auf den Seiten B und C, die sich in p' schneiden, so folgt aus dem Kreisviereck $p_3p_3'p_2p_2'$, dass Wkl. $p_3'p_3p_2 = p_3'p_2'p_2$

und daher auch Wkl. $pp_3p_2 = p'p_2'p_3'$; in dem Kreisviereck $p'p_2'ap_3'$ ist aber Wkl. $p'p_2'p_3' = p'ap_3'$, und weil ferner pp_3 senkrecht auf ap_3 steht, so sind auch ap' und p_2p_3 zu einander senkrecht. In gleicher Weise ergibt sich, dass die in p_1' und p_2' auf den Seiten A und B errichteten Lote sich in einem Punkte schneiden, welcher der Senkrechten angehört, die von c auf $p_1'p_2'$ gefällt werden kann; somit folgt nach (2):

„Fällt man von einem beliebigen Punkte p Lote auf die Seiten „des Dreiecks und legt durch die so erhaltenen Fusspunkte einen „Kreis, so trifft derselbe die Dreiecksseiten in noch drei Punkten, „welche die Fusspunkte der Seitennormalen desjenigen Punktes p' sind, „dessen Coordinaten reciprok sind zu denjenigen des Punktes p“ (3)

Die Halbirungsperpendikel der Strecken p_1p_1', p_2p_2', p_3p_3' enthalten die Mitte der Verbindungslinie von p und p' und treffen sich überdies im Mittelpunkte des genannten Kreises; weshalb sich ergibt:

„Die Fusspunkte der Seitennormalen zweier Punkte mit reci„proken Coordinaten liegen stets auf einem Kreise, dessen Centrum „in der Mitte der Verbindungsstrecke der beiden Punkte liegt.“ (4)

Da in den folgenden Untersuchungen die Kenntnis der Coordinaten einiger Symmetriepunkte des Dreiecks erforderlich ist, so erscheint es zweckmässig zunächst hievon Erwähnung zu tun.

Sind s_1, s_2, s_3 die Längen der Seiten A, B, C des Fundementaldreiecks, so ergeben sich für den Schwerpunkt S dieses Dreiecks, dessen Abstände von den Dreiecksseiten sich wie die Höhen oder wie die reciproken Werte der Seiten des Dreiecks verhalten, die Coordinaten:

$$S \equiv \frac{1}{s_1},\ \frac{1}{s_2},\ \frac{1}{s_3} \equiv s_2s_3,\ s_1s_3,\ s_1s_2 \quad \ldots\ldots (5)$$

Die dem Schwerpunkte S entsprechende Harmonikale oder Dreieckspolare bezüglich ABC ist die unendlich ferne Gerade, deren Gleichung somit ist:

$$As_1 + Bs_2 + Cs_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Errichtet man über den Seiten des Dreiecks Quadrate und verlängert die den Dreiecksseiten parallelen Quadratseiten bis sie sich durchschneiden, so entsteht ein Dreieck, das ähnlich und ähnlichliegend mit dem gegebenen Dreieck ist. Der Aehnlikhkeitspunkt beider Dreiecke wird der Grebe'sche Punkt G genannt. Sind nun d_1, d_2, d_3 die Abstände desselben von den Dreiecksseiten A, B, C, so sind seine Abstände von den Seiten des mit ABC ähnlichen Dreiecks beziehungsweise $d_1 + s_1$, $d_2 + s_2$, $d_3 + s_3$ und es verhält sich;

$$d_1:(d_1+s_1) = d_2:(d_2+s_2) = d_3:(d_3+s_3)$$

und daher auch:

$$d_1:d_2:d_3 = s_1:s_2:s_3$$

somit:

$$G \equiv s_1, \quad s_2. \quad s_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Die dem Punkte G entsprechende konische Polare des Dreiecks hat daher die Gleichung:

$$BCs_1 + ACs_2 + ABs_3 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

wodurch, wie leicht zu erkennen ist, der dem Dreieck umschriebene Kreis dargestellt wird. Die den Punkten des Umkreises entsprechenden Harmonikalen gehen daher durch den Grebe'schen Punkt.

Der Mittelpunkt M des Umkreises hat von den Seiten des Dreiecks die Abstände $R\cos w_1$, $R\cos w_2$, $R\cos w_3$, wenn mit R der Radius des Umkreises und mit w_1, w_2, w_3 die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnet werden; drückt man die Cosinus dieser Winkel durch die Seiten des Fundamentaldreiecks aus, so findet man für das Umkreiscentrum M die Coordinaten:

$$M \equiv s_1(-s_1^2+s_2^2+s_3^2); \quad s_2(s_1^2-s_2^2+s_3^2); \quad s_3(s_1^2+s_2^2-s_3^2) \ . \ (9)$$

Aus den Gleichungen der Höhen des Dreiecks:

$$B\cos w_2 - C\cos w_3 = 0 \quad C\cos w_3 - A\cos w_1 = 0 \quad A\cos w_1 - B\cos w_2 = 0$$

erhält man für den Höhenschnittpunkt H die Coordinaten:

$$H \equiv \frac{1}{s_1(-s_1^2+s_2^2+s_3^2)}, \quad \frac{1}{s_2(s_1^2-s_2^2+s_3^2)}, \quad \frac{1}{s_3(s_1^2+s_2^2-s_3^2)} \ (10)$$

Der Mittelpunkt J des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises und die Mittelpunkte J_1, J_2, J_3 der anbeschriebenen Kreise haben von den Dreiecksseiten je drei gleiche Abstände, weshalb man hat:

$$J \equiv 1, 1, 1 \quad J_1 \equiv -1, 1, 1 \quad J_2 \equiv 1, -1, 1 \quad J_3 \equiv 1, 1, -1 \ . \ 11)$$

Die dem Inkreiscentrum J entsprechende konische Polare des Dreiecks hat die Gleichung:

$$BC + AC + AB = 0$$

Betrachtet man nun den Mittelpunkt Q dieses Kegelschnitts als den Pol der unendlich fernen Geraden ($As_1 + Bs_2 + Cs_3 = 0$) bezüglich dieses Kegelschnittes, so ergeben sich für jenen Punkt Q die Coordinaten:

$$Q \equiv -s_1+s_2+s_3, \quad s_1-s_2+s_3, \quad s_1+s_2-s_3 \ . \ . \ (12)$$

Dieser Punkt Q lässt sich auch auf folgende Weise construiren:

Man verbindet die Mitten der Dreiecksseiten mit den Mittelpunkten J_1, J_2, J_3 der entsprechenden Ankreise des Dreiecks, so treffen sich diese Verbindungslinien im Punkte Q; denn die Mitten m_1, m_2, m_3 der Dreiecksseiten haben die Coordinaten:

$$m_1 \equiv 0,\ s_3,\ s_2;\quad m_2 \equiv s_3,\ 0,\ s_1;\quad m_3 \equiv s_2,\ s_1,\ 0$$

und die Verbindungslinien m_1J_1, m_2J_2, m_3J_3 besitzen daher die Gleichungen:

$$m_1J_1 \equiv A(s_2 - s_3) + Bs_2 - Cs_3 = 0;$$
$$m_2J_2 \equiv -As_1 + B(s_3 - s_1) + Cs_3 = 0;$$
$$m_3J_3 \equiv As_1 - Bs_2 + C(s_1 - s_2) = 0$$

durch deren Auflösung sich ebenfalls die Coordinaten von Q ergeben.

Setzt man der Kürze halber:

$$-s_1 + s_2 + s_3 = u_1;\quad s_1 - s_2 + s_3 = u_2;\quad s_1 + s_2 - s_3 = u_3 \quad .$$

so hat der Berührungspunkt des Inkreises mit der Dreiecksseite A von den Endpunkten dieser Seite die Entfernungen $\frac{1}{2}u_2$ und $\frac{1}{2}u_3$, während derselbe von den Dreiecksseiten A, B, C beziehungsweise die Abstände:

$$0,\quad \tfrac{1}{2}u_3 \sin w_3,\quad \tfrac{1}{2}u_2 \sin w_2$$

besitzt; es sind daher die Coordinaten dieses Berührungspunktes:

$$0,\quad u_3 s_3,\quad u_2 s_2$$

und in gleicher Weise findet man für die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten B und C die Coordinaten:

$$u_3 s_3,\quad 0,\quad u_1 s_1 \qquad \text{und} \qquad u_2 s_2\quad u_1 s_1,\quad 0.$$

Die Verbindungslinien dieser Punkte mit den entsprechenden Mittelpunkten J_1, J_2, J_3 der Ankreise haben aber die Gleichungen:

$$A(s_2u_2 - s_3u_3) + Bs_2u_2 - Cs_3u_3 = 0$$
$$-As_1u_1 + B(s_3u_3 - s_1u_1) + Cs_3u_3 = 0$$
$$As_1u_1 - Bs_2u_2 + C(s_1u_1 - s_2u_2) = 0$$

Das Verschwinden der aus den Coefficienten von A, B und C dieser drei Gleichungen gebildeten Determinante beweist, dass die drei Verbindungslinien sich in einem und demselben Punkte D schneiden, dessen Coordinaten sind:

$$\equiv \frac{1}{u_1},\ \frac{1}{u_2},\ \frac{1}{u_3} \equiv \frac{1}{-s_1 + s_2 + s_3},\ \frac{1}{s_1 - s_2 + s_3},\ \frac{1}{s_1 + s_2 - s_3} \quad (13)$$

Es folgt daher:

„Verbindet man die Berührungspunkte des Inkreises und der „Dreiecksseiten mit den entsprechenden Mittelpunkten der Ankreise, „so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem und demselben „Punkte D, dessen Seitenabstände sich wie die Radien der entspre- „chenden Ankreise, verhalten.“ . . . . (14)

Die aus den Coordinaten der Punkte D, Q und S gebildete Determinante wird aber, wie leicht zu zeigen ist, identisch gleich Null, weshalb folgt:

„Die Punkte D und Q liegen mit dem Schwerpunkte S auf einer „und derselben Geraden.“ . . . . (15)

Da aber auch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist, so ergibt sich:

„Das Inkreiscentrum J und der Grebe'sche Punkt G liegen mit „dem Punkte Q auf einer und derselben Geraden.“ . . . . . . (16)

„Punktepaare mit reciproken Coordinaten sind nach obigen:

„Der Schwerpunkt und der Grebe'sche Punkt; das Umkreis- „centrum und der Höhenschnittpunkt und das Punktepaar D und Q; „während die Mittelpunkte der die Seiten des Dreiecks berührenden „Kreise sich selbst zu entsprechenden Punkten haben [1])“.

Durch Anwendung der Sätze (1), (2), (3) und (4) auf diese Punktepaare würde man einfache geometrische Beziehungen über die gegenseitige Lage derselben erhalten. So würde beispielsweise die Anwendung des Satzes (4) auf das Punktepaar M und H die Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises ergeben.

Bestimmt man zu den Punkten einer durch die Gleichung

$$L \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

gegebenen Geraden die Punkte mit reciproken Coordinaten, so genügen ihre Coordinaten der Gleichung:

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0$$

oder:

---

1) Vergl. Fiedler, Geometrie der Kegelschnitte.

$$K \equiv \alpha BC + \beta AC + \gamma AB = 0$$

und es folgt:

„Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so beschreibt der Punkt mit „den reciproken Coordinaten einen dem Dreieck umschriebenen Kegel- „schnitt und umgekehrt [1])" . . . . (17)

Der Kegelschnitt K wird die Inverse der Geraden K und diese die Inverse des Kegelschnittes K genannt. Da L als die Dreieckspolare eines Punktes $p \equiv \frac{1}{\alpha}. \frac{1}{\beta}. \frac{1}{\gamma}$ und der Kegelschnitt K als die konische Polare des Punktes $p' \equiv \alpha.\ \beta,\ \gamma$ betrachtet werden kann, so folgt:

„Die Inverse der Dreieckspolare eines Punktes p ist die konische „Polare des entsprechenden Punktes p' bezüglich des Dreiecks."(18)

Weil aber dem Schwerpunkte des Dreiecks die unendlich ferne Gerade als Dreieckspolare und dem Grebe'schen Punkte der Umkreis des Dreiecks als konische Polare entspricht, so ergibt sich:

„Der Umkreis des Dreiecks ist die Inverse der unendlich fernen „Geraden." . . . . (19)

Die zu einer Geraden L gehörige Inverse K ist daher eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem L den Umkreis des Dreiecks schneidet, berührt oder nicht schneidet; jeder Tangente des Umkreises entspricht somit als inverse Linie stets eine dem Dreieck umschriebene Parabel.

Die Gerade L schneidet die entsprechende Inverse K in höchstens zwei Punkten m_1 und m_2 und die ihnen entsprechenden Punkte m_1', m_2' mit reciproken Coordinaten müssen sowohl auf L, als auch auf K liegen; da aber der Schnittpunkt m_1 im allgemeinen nicht mit seinem entsprechenden Punkte m_1' zusammenfallen kann, weil diese Eigenschaft nur den Punkten J, J_1, J_2 und J_3 zukömmt, so geht hervor:

„Auf jeder Geraden befindet sich stets nur ein Paar von Punkten „mit reciproken Coordinaten, nämlich das Schnittpunktepaar dieser „Geraden mit ihrer Inversen." . . . . (20)

Aus diesem Grunde muss jede durch das Inkreiscentrum oder durch ein Ankreiscentrum gehende Gerade den ihr entsprechenden inversen Kegelschnitt in jenem Punkte berühren. Mit Rücksicht auf Satz (19) folgt noch:

---

1) Siehe Durège, Curven 3. Ord. pg. 121.



„Die unendlich fernen imaginären Kreispunkte sind ein Punkte-„paar mit reciproken Coordinaten.“ . . . . (21)

Nachdem nun gezeigt wurde, dass jeder Geraden nur ein Paar von Punkten mit reciproken Coordinaten angehört, so fragt es sich, welche Curve diese Punktepaare beschreiben, im Falle die Gerade sich um einen festen Punkt $p \equiv \alpha,\ \beta,\ \gamma$ dreht. Damit aber eine durch den Punkt p gehende Gerade ein Paar entsprechender Punkte, deren Coordinaten $A,\ B,\ C$ und $\frac{1}{A},\ \frac{1}{B},\ \frac{1}{C}$ seien, enthalte, muss die Bedingungsgleichung bestehen:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A, & B, & C \\ \frac{1}{A}, & \frac{1}{B}, & \frac{1}{C} \end{vmatrix} = 0$$

daher erhält man für die gesuchte Curve die Gleichung:

$$F(p) \equiv \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A, & B, & C \\ BC, & AC, & AB \end{vmatrix}$$

$$\equiv A^2(B\beta - C\gamma) + B^2(C\gamma - A\alpha) + C^2(A\alpha - B\beta) = 0 \quad . \quad . \quad . \ (22)$$

Dieser Gleichung genügen aber sowohl die Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks, als auch diejenigen der Punkte $p \equiv \alpha,\ \beta,\ \gamma$ und $p' \equiv \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}$; ferner erhält obige Determinante zwei gleiche Reihen, sobald man statt der variabelen Coordinaten diejenigen der Punkte $J,\ J_1,\ J_2$ oder J_3 setzt; überdies ist die Gleichung $F(p) = 0$ nur abhängig von den Coordinaten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ des gegebenen Punktes p, weshalb derselbe der Erzeugungspunkt jener Curve genannt wird. Es ergibt sich nun:

„Diejenigen Paare von Punkten mit reciproken Coordinaten, „deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt p gehen, liegen „auf einer Curve dritter Ordnung, welche die Ecken des Dreiecks, „die Mittelpunkte der vier Kreise, welche die Seiten des Dreiecks „berühren, den Erzeugungspunkt p und den ihm entsprechenden „Punkt p' mit reciproken Coordinaten enthält.“ . . . . (23)

Die Curve $F(p)$ besitzt also die Eigenschaft, dass sie zu jedem ihrer Punkte auch denjenigen mit reciproken Coordinaten enthält. Würde man den Punkt p' zum Erzeugungspunkt wählen, so erhielte man eine von der vorigen verschiedene Curve, die aber durch dieselben neun Punkte ginge, welche im Satz (23) erwähnt wurden.

Hieraus erkennt man, dass durch die Ecken des Dreiecks, durch die Mittelpunkte seiner vier Berührungskreise und durch ein beliebiges Paar von Punkten mit reciproken Coordinaten unzählig viele Curven dritter Ordnung gelegt werden können; da aber je zwei Ankreiscentra mit einer Ecke des Dreiecks auf einer Geraden liegen, so folgt:

„Das Inkreiscentrum, ein Ankreiscentrum, die beiden Ecken des „Dreiecks, die nicht auf der Verbindungslinie der beiden Centra „liegen und jedes beliebige Punktepaar mit reciproken Coordinaten „gehören stets einem Kegelschnitte an.“ . . . . (24)

Ebenso ergibt sich:

„Je zwei Ankreiscentra, die beiden nicht auf ihrer Verbindungs- „linie liegenden Ecken des Dreiecks und jedes beliebige Punktepaar „mit reciproken Coordinaten liegen stets auf einem und demselben „Kegelschnitte“ . . . . (25)

Bestimmt man zu einer beliebigen durch den Punkt p gehenden Geraden L den inversen Kegelschnitt K, so geht derselbe nach (17) durch die Ecken des Dreiecks, enthält den dem Punkte p entsprechenden Punkt p' und schneidet die Gerade L in einem Punktepaar mit reciproken Coordinaten, das auch der Curve $F(p)$ angehört; daher trifft der Kegelschnitt K diese Curve in sechs Punkten, von denen bei der Drehung der Geraden L um den Punkt p vier Schnittpunkte, nämlich die Ecken des Dreiecks und der Punkt p' unveränderlich bleiben; somit folgt:

„Die Curve $F(p)$ der Punktepaare mit reciproken Coordinaten „lässt sich erzeugen durch die projectivisch auf einander bezogenen „Gebilde eines durch den Erzeugungspunkt p gehenden Strahlen- „büschels und eines Kegelschnittbüschels, der die Ecken des Dreiecks „und den Punkt p' zu Grundpunkten hat.“ . . . . (26)

Ferner ergibt sich:

„Jeder durch die Ecken des Dreiecks und durch den Punkt p' „gehende Kegelschnitt schneidet die Curve $F(p)$ in noch einem „Punktepaar mit reciproken Coordinaten, dessen Verbindungslinie „durch den Punkt p geht.“ . . . . (27)

Der Umkreis des Dreiecks hat mit $F(p)$ die Ecken des Dreiecks und ausserdem noch drei Punkte m_1, m_2, m_3 gemeinsam, welchen nach (19) die unendlich fernen Punkte der Curve $F(p)$ entsprechen; es geben somit die Verbindungslinien pm_1, pm_2, pm_3 die Richtungen der Asymptoten der Curve $F(p)$.

Die konische und die gerade Polare eines beliebigen Punktes $u \equiv A_0, B_0, C_0$ bezüglich der Curve $F(p)$ haben die Gleichungen:

$$F_1(p) \equiv A^2(B_0\beta - C_0\gamma) + B^2(C_0\gamma - A_0\alpha) + C^2(A_0\alpha - B_0\beta)$$
$$+ 2AB(A_0\beta - B_0\alpha) + 2AC(C_0\alpha - A_0\gamma) + 2BC(B_0\gamma - C_0\beta) = 0$$

$$F_2(p) \equiv A(\alpha C_0^2 - \alpha B_0^2 + 2\beta A_0 B_0 - 2\gamma A_0 C_0)$$
$$+ B(\beta A_0^2 - \beta C_0^2 + 2\gamma B_0 C_0 - 2\alpha A_0 B_0)$$
$$+ C(\gamma B_0^2 - \gamma A_0^2 + 2\alpha A_0 C_0 - 2\beta B_0 C_0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

Setzt man in der Gleichung $F_2(p) = 0$ statt der Coordinaten A_0, B_0, C_0 diejenigen des Inkreiscentrums oder die Coordinaten der Ankreiscentra ein, so ergeben sich für die Tangenten von $F(p)$ in diesen vier Punkten die Gleichungen:

$$A(\beta - \gamma) + B(\gamma - \alpha) + C(\alpha - \beta) = 0$$
$$A(\beta - \gamma) - B(\gamma + \alpha) + C(\alpha + \beta) = 0$$
$$A(\beta + \gamma) + B(\gamma - \alpha) - C(\alpha + \beta) = 0$$
$$-A(\beta + \gamma) + B(\gamma + \alpha) + C(\alpha - \beta) = 0$$

welchen, wie leicht zu erkennen ist, durch die Coordinaten α, β, γ genüge geleistet wird; weshalb folgt:

„Die in den Mittelpunkten der vier Berührungskreise des Drei-„ecks gezogenen Tangenten der Curve $F(p)$ schneiden sich im Er-„zeugungspunkte p.“ . . . . (29)

Oder:

„Die von dem Erzeugungspunkte p an die Curve $F(p)$ auslau-„fenden Tangenten berühren dieselbe in den Punkten J, J_1, J_2, J_3“ . . . . (30)

Setzt man in der Gleichung $F_1(p) = 0$ statt der Coordinaten A_0, B_0, C_0 diejenigen des Punktes $p' \equiv \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, so erhält man für die konische Polare von p' die Gleichung:

$$BC\alpha(\beta^2 - \gamma^2) + AC\beta(\gamma^2 - \alpha^2) + AB\gamma(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

welcher sowohl die Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks, als auch diejenigen des Punktes $p \equiv \alpha, \beta, \gamma$ genügen. Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Curven dritter Ordnung folgt nun:

„Die konische Polare des Punktes p' bezüglich der Curve $F(p)$ „berührt dieselbe in diesem Punkte und schneidet sie in den Ecken „des Dreiecks und in dem Erzeugungspunkte p.“ . . . . (31)

„Von dem Punkte p' gehen daher an die Curve $F(p)$ vier Tan-„genten, welche dieselbe in den Ecken des Dreiecks und im Punkte p „berühren.“ . . . . (32)

Die Tangente T im Punkte p' hat nach (28) die Gleichung:

$$A\alpha^3(\beta^2-\gamma^2)+B\beta^3(\gamma^2-\alpha^2)+C\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)=0$$

welche auch die Form:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \frac{1}{\alpha}, & \frac{1}{\beta}, & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\alpha^3}, & \frac{1}{\beta^3}, & \frac{1}{\gamma^3} \end{vmatrix} = 0$$

annimmt, woraus man erkennt, dass diese Tangente T ausser dem Punkte p' auch noch den durch die Coordinaten $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}, \frac{1}{\gamma^3}$ bestimmten Punkt enthält.

Will man den Schnittpunkt π der Tangente T mit der Curve $F(p)$ bestimmen, so braucht man nur zu berücksichtigen, dass jeder Punkt von T durch die Coordinaten $A_1 = \frac{1}{\alpha}+\frac{\lambda}{\alpha^3}$, $B_1 = \frac{1}{\beta}+\frac{\lambda}{\beta^3}$, $C_1 = \frac{1}{\gamma}+\frac{\lambda}{\gamma^3}$ darstellbar ist, weshalb man die Grösse λ nur so zu bestimmen hat, dass die Coordinaten A_1, B_1, C_1 der Gleichung $F(p)=0$ genügen. Man hat alsdann:

$$\frac{(\alpha^2+\lambda)^2(\beta^2-\gamma^2)}{\alpha^4}+\frac{(\beta^2+\lambda)^2(\gamma^2-\alpha^2)}{\beta^4}+\frac{(\gamma^2+\lambda)^2(\alpha^2-\beta^2)}{\gamma^4}=0$$

und findet hieraus:

$$\lambda = -\frac{2\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}$$

hiemit folgt:

Die Tangente der Curve $F(p)$ im Punkte p' trifft die Curve noch in dem Punkte:

$$\pi \equiv \frac{1}{\alpha}(-\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2),\quad \frac{1}{\beta}(\beta^2\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2),$$
$$\frac{1}{\gamma}(\beta^2\gamma^2-\alpha^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Da die Curve $F(p)$ durch die Ecken des Fundamentaldreiecks geht, so schneidet sie jede Seite desselben in noch je einem Punkte über welche man dadurch Aufschluss erhält, dass man in der Gleichung $F(p)=0$ der Reihe nach für A, B oder C Null setzt, wodurch man bekommt:

$$B\gamma - C\beta = 0 \qquad C\alpha - A\gamma = 0 \qquad A\beta - B\alpha = 0$$

weshalb folgt:

„Die Curve $F(p)$ schneidet die Seiten des Dreiecks in den Schnitt-„punkten der Ecktransversalen des Erzeugungspunktes p.“ . . (34)

Die Tangenten in diesen Schnittpunkten, deren Coordinaten 0, β, γ; α, 0, γ; α, β, 0 sind, haben die Gleichungen:

$$A\alpha(\beta^2 - \gamma^2) - B\beta\gamma^2 + C\gamma\beta^2 = 0 \qquad A\alpha\gamma^2 + B\beta(\gamma^2 - \alpha^2) - C\gamma\alpha^2 = 0$$
$$- A\alpha\beta^2 + B\beta\alpha^2 + C\gamma(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

und das Verschwinden der aus den Coefficienten von A, B und C dieser Gleichungen gebildeten Determinante zeigt, dass diese Tangenten sich in einem und demselben Punkte schneiden. Durch Auflösung von zwei der obigen Gleichungen ergeben sich aber für den gemeinsamen Schnittpunkt gerade die Coordinaten des in (33) erwähnten Punktes π, weshalb folgt:

„Die Tangenten der Curve $F(p)$ in den drei Schnittpunkten der-„selben mit den Dreiecksseiten und die Tangente im Punkte p' treffen „sich alle vier in einem der Curve $F(p)$ angehörigen Punkte π.“ (35)

Die Polare des Punktes π bezüglich des durch die Gleichung

$$BC\beta\gamma + AC\alpha\gamma + AB\alpha\beta = 0$$

dargestellten Kegelschnittes hat die Gleichung:

$$A\alpha(\beta B_\pi + \gamma C_\pi) + B\beta(\gamma C_\pi + \alpha A_\pi) + C\gamma(\alpha A_\pi + \beta B_\pi) = 0$$

oder

$$A\beta\gamma + B\alpha\gamma + C\alpha\beta = 0$$

d. h.

„Die Dreieckspolare des Punktes p ist zugleich die Kegelschnitts-„polare des Punktes π bezüglich der zum Punkte p' gehörigen ko-„nischen Polare des Dreiecks.“ . . . . (36)

Unter den sämmtlichen konischen Polaren der Curve $F(p)$ befinden sich offenbar auch gleichseitige Hyperbeln, und es ist nun zu untersuchen, welchen Punkten dieselben entsprechen. Da in der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel die Summe der Coefficienten von x^2 und y^2 gleich Null ist, so erhält man für einen Punkt $u \equiv A_0, B_0, C_0$, dessen konische Polare ($F_1(p) = 0$) eine gleichseitige Hyperbel sein soll, die Bedingungsgleichung:

$$(B_0\beta - C_0\gamma)\cos^2\varepsilon_1 + (C_0\gamma - A_0\alpha)\cos^2\varepsilon_2 + (A_0\alpha - B_0\beta)\cos^2\varepsilon_3$$
$$+ 2(B_0\gamma - C_0\beta)\cos\varepsilon_2\cos\varepsilon_3 + 2(C_0\alpha - A_0\gamma)\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_3$$
$$+ 2(A_0\beta - B_0\alpha)\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2 + (B_0\beta - C_0\gamma)\sin^2\varepsilon_1 + (C_0\gamma - A_0\alpha)\sin^2\varepsilon_2$$
$$+ (A_0\alpha - B_0\beta)\sin^2\varepsilon_3 + 2(B_0\gamma - C_0\beta)\sin\varepsilon_2\sin\varepsilon_3 + 2(C_0\alpha - A_0\gamma)\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_3$$
$$+ 2(A_0\beta - B_0\alpha)\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2 = 0$$

oder:

$$(B_0\gamma - C_0\beta)\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + (C_0\alpha - A_0\gamma)\cos(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$$
$$+ (A_0\beta - B_0\alpha)\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0$$

oder endlich:

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_0, & B_0, & C_0 \\ \cos w_1, & \cos w_2, & \cos w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Die gesuchte Ortscurve ist also eine Gerade, welche den Punkt $p \equiv \alpha, \beta, \gamma$ und den durch die Coordinaten $\cos w_1$, $\cos w_2$, $\cos w_3$ dargestellten Punkt, nämlich das Umkreiscentrum des Dreiecks enthält; daher folgt:

„Den sämmtlichen Punkten der Geraden, welche den Punkt p „mit dem Umkreiscentrum des Dreiecks verbindet, entsprechen als „konische Polaren bezüglich der Curve $F(p)$ lauter gleichseitige Hy„perbeln.“ . . . . (37)

„Die konische Polare des Erzeugungspunktes p bezüglich der „Curve $F(p)$ ist daher eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die „Centra der vier Berührungskreise des Dreiecks geht und die Curve „$F(p)$ in p berührt; sie enthält somit alle jene Punkte, welche be„züglich der Punktepaare von $F(p)$ mit reciproken Coordinaten har„monisch conjugirt zum Punkte p sind, und ihre Tangente im Punkte „p geht durch den Punkt p'.“ . . . . (38)

Die Dreieckspolare eines beliebigen Punktes $m \equiv A_0, B_0, C_0$, ferner diejenige des Punktes p und die Polare des Punktes m bezüglich der dem Punkte p' entsprechenden konischen Polare des Dreiecks haben beziehungsweise die Gleichungen:

$$AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0 = 0 \qquad A\beta\gamma + B\alpha\gamma + C\alpha\beta = 0$$
$$A\alpha(B_0\beta + C_0\gamma) + B\beta(A_0\alpha + C_0\gamma) + C\gamma(A_0\alpha + B_0\beta) = 0$$

Damit sich nun die drei genannten Geraden in einem und demselben Punkte schneiden, muss für die Coordinaten des Punktes m die Beziehung bestehen:

$$\begin{vmatrix} B_0C_0, & A_0C_0, & A_0B_0 \\ \beta\gamma, & \alpha\gamma & \alpha\beta \\ \alpha(B_0\beta + C_0\gamma), & \beta(A_0\alpha + C_0\gamma), & \gamma(A_0\alpha + B_0\beta) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$F(p) = 0$$

d. h.

„Jeder Punkt der Curve $F(p)$ besitzt die Eigenschaft, dass seine „Dreieckspolare und seine Polare bezüglich der dem Punkte p' ent- „sprechenden konischen Polare des Dreiecks sich in einem Punkte „der unveränderlichen Dreieckspolare des Erzeugungspunktes p tref- „fen.“ . . . . (39)

Die Dreieckspolaren der Punkte $m \equiv A_0, B_0, C_0$; $m' \equiv \frac{1}{A_0}, \frac{1}{B_0}, \frac{1}{C_0}$ und $p' \equiv \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ haben die Gleichungen:

$$AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0 = 0 \qquad AA_0 + BB_0 + CC_0 = 0$$
$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

woraus sich durch Elimination der Grössen A, B, C ebenfalls die Gleichung $F(p) = 0$ ergibt, weshalb folgt:

„Jeder Punkt der Curve $F(p)$ besitzt die Eigenschaft, dass seine „Dreieckspolare und diejenige des entsprechenden Punktes mit re- „ciproken Coordinaten sich in einem Punkte der Dreieckspolare des „Punktes p' treffen.“ . . . . (40)

Wählt man den Schwerpunkt S des Dreiecks als Erzeugungspunkt, so erhält man eine Curve $F(s)$, welche bemerkenswerte Aufschlüsse über die gegenseitige Lage der wichtigsten Symmetriepunkte des Dreiecks giebt.

Berücksichtigt man, dass dem Schwerpunkte $S \equiv \frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \frac{1}{s_3}$ der Grebe'sche Punkt $G \equiv s_1, s_2, s_3$ als Punkt mit reciproken Coordinaten entspricht, so ergibt sich zunächst nach (23):

„Diejenigen Punktepaare mit reciproken Coordinaten, deren Ver- „bindungslinien durch den Schwerpunkt des Dreiecks gehen, liegen „auf einer Curve dritter Ordnung, welche die Ecken des Dreiecks, „die Centra seiner vier Berührungskreise, den Schwerpunkt und den „Grebe'schen Punkt enthält . . . . (41)

Die Gleichung dieser Curve ist:

$$F(S) = A^2 s_1(Bs_3 - Cs_2) + B^2 s_2(Cs_1 - As_3) + C^2 s_3(As_2 - Bs_1) = 0$$

Aus (29) und (30) folgt:

„Die in den Mittelpunkten der vier Berührungskreise des Drei-
„ecks gezogenen Tangenten der Curve $F(S)$ schneiden sich im Schwer-
„punkte.“ . . . . (42)

Oder:

„Die vom Schwerpunkte an din Curve $F(S)$ auslaufenden Tan-
„genten berühren dieselbe in den Punkten J, J_1, J_2, J_3“ . . . (43)

Aus (31) und (32) ergibt sich:

„Die konische Polare des Grebe'schen Punktes bezüglich der
„Curve $F(S)$ berührt dieselbe in diesem Punkte, geht durch die Ecken
„des Dreiecks und durch dessen Schwerpunkt S.“ . . . . . . (44)

„Die von dem Grebe'schen Punkte an die Curve $F(S)$ gezogenen
„Tangenten berühren dieselbe in den Ecken des Dreiecks und im
„Schwerpunkte.“ . . . . (45)

Zufolge (34) hat man:

„Die Curve $F(S)$ geht durch die Mitten der Dreiecksseiten.“ (46)

Die Coordinaten des in (33) erwähntes Punktes π gehen jetzt über in:

$$s_1(-s_1^2+s_2^2+s_3^2),\quad s_2(s_1^2-s_2^2+s_3^2)\quad s_3(s_1^2+s_2^2-s_3^2)$$

wodurch aber das Centrum M des Umkreises dargestellt wird; daher folgt:

„Der Mittelpunkt des Umkreises liegt auf der Curve $F(S)$, und
„die von ihm an die Curve gezogenen Tangenten berühren dieselbe
„im Grebe'schen Punkte und in den Mitten der Dreiecksseiten.“ (47)

Wie früher bemerkt wurde, ist aber das Umkreiscentrum und der Höhenschnittpunkt ein Paar entsprechender Punkte mit reciproken Coordinaten, das mit dem Schwerpunkte auf der sogenannten Euler-schen Geraden liegt; ebenso geht die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte Q und D nach (15) durch den Schwerpunkt, weshalb sich die bemerkenswerte Eigenschaft ergibt:

„Die folgenden 16 Punkte, nämlich die Ecken des Dreiecks, die
„Mitten seiner Seiten, die Mittelpunkte der vier Berührungskreise
„des Dreiecks, der Schwerpunkt, der Grebe'sche Punkt, das Umkreis-
„centrum, der Höhenschnittpunkt und die Symmetriepunkte D und
„Q des Dreiecks liegen auf einer Curve dritter Ordnung, die über-
„dies noch alle jene Punktepaare mit reciproken Coordinaten ent-
„hält, deren Verbindungslinien durch den Schwerpunkt gehen.“ . (48)

Aus (37) und (38) ergibt sich ferner:

„Den Punkten der Euler'schen Geraden entsprechen bezüglich der „Curve $F(S)$ als konische Polaren lauter gleichseitige Hyperbeln; „unter diesen befindet sich auch die konische Polare des Schwer-„punktes, welche durch die Centra der 4 Berührungskreise des Drei-„ecks geht und die Curve $F(S)$ im Schwerpunkte berührt; sie ent-„hält alle jene Punkte, welche bezüglich der Punktepaare mit reci-„proken Coordinaten harmonisch conjugirt zum Schwerpunkte sind „und ihre Tangente in diesem Punkte geht durch den Grebe'schen „Punkt." . . . . (49)

Zieht man durch den Schwerpunkt S eine beliebige Gerade, so schneidet diese die Curve $F(S)$ stets in einem Paare entsprechender Punkte m und m'; die in S, m und m' an die Curve gezogenen Tangenten schneiden dieselbe in noch drei Punkten, welche die Tangentialpunkte von S, m und m' genannt werden und bekanntlich wieder einer Geraden angehören; da aber die Curventangente in S durch den Grebe'schen Punkt geht, so folgt:

„Zieht man in irgend einem Paar entsprechender Punkte der „Curve $F(S)$ die Tangenten an dieselbe, so geht die Verbindungs-„linie der zugehörigen Tangentialpunkte stets durch den Grebe'schen „Punkt." . . . . (50)

Mit Rücksicht auf (42) ergibt sich nun:

„Jede Gerade, welche durch einen der vier Mittelpunkte der „Berührungskreise des Dreiecks geht, schneidet die Curve $F(S)$ in „noch zwei Punkten, deren Tangenten dieselbe stets in einem Paar „entsprechender Punkte mit reciproken Coordinaten treffen." . (51)

Unter den durch das Inkreiscentrum J gehenden Geraden befindet sich aber besonders eine, welche die Curve $F(S)$ in den Punkten G und Q schneidet, da diese nach (16) mit dem Punkte J auf einer Geraden liegen; die Tangente in G trifft aber nach (47) die Curve $F(S)$ in dem Umkreiscentrum M, und daher muss zufolge (51) die in Q gezogene Tangente die Curve im Höhenschnittpunkte H treffen; daher folgt:

„Die Tangenten der drei einer Geraden angehörigen Punkte J, „G und Q der Curve $F(S)$ treffen dieselbe beziehungsweise in den „auf der Euler'schen Geraden liegenden Punkten S, M und H . (52)

Berücksichtigt man, dass die konische Polare des Punktes G bezüglich des Dreiecks der Umkreis desselben und die Dreieckspolare des Schwerpunktes die unendlich ferne Gerade ist, so folgt aus (39):

„Jeder Punkt der Curve $F(S)$ besitzt die Eigenschaft, dass dessen „Dreieckspolare parellel ist zu seiner Umkreispolare.“ . . . . (53)

Ebenso lässt sich Satz (40) auf die hier betrachtete Curve übertragen.

Eine weitere Eigenschaft der Curve $F(S)$ ergibt sich durch folgende Betrachtung:

Jeder beliebige durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehende Kegelschnitt kann durch die Gleiehung:

$$\alpha BC + \beta AC + \gamma AB = 0$$

dargestellt und als die konische Polare eines Punktes $p \equiv \alpha, \beta, \gamma$ bezüglich des Dreiecks betrachtet werden. Die Tangente dieses Kegelschnittes im Eckpunkte a des Dreiecks hat die Gleichung:

$$\gamma B + \beta C = 0$$

und die durch a gehende Normale desselben kann zunächst durch die Gleichung:

$$B + \lambda C = 0$$

dargestellt werden, worin aber λ noch so zu bestimmen ist, dass die beiden Geraden auf einander senkrecht stehen; so dass also:

$$\frac{\gamma \cos \varepsilon_2 + \beta \cos \varepsilon_3}{\gamma \sin \varepsilon_2 + \beta \sin \varepsilon_3} + \frac{\sin \varepsilon_2 + \lambda \sin \varepsilon_3}{\cos \varepsilon_2 + \lambda \cos \varepsilon_3} = 0$$

ist.

Hieraus findet man:

$$\lambda = - \frac{\gamma - \beta \cos w_1}{\beta - \gamma \cos w_1}$$

und somit hat die Kegelschnittsnormale im Eckpunkte a die Gleichung:

$$B(\beta - \gamma \cos w_1) - C(\gamma - \beta \cos w_1) = 0$$

Ebenso findet man für die Normalen in den beiden anderen Ecken des Dreieks die Gleichungen:

$$C(\gamma - \alpha \cos w_2) - A(\alpha - \gamma \cos w_2) = 0$$

und

$$A(\alpha - \beta \cos w_3) - B(\beta - \alpha \cos w_3) = 0$$

Die Bedingung, dass diese drei Normalen sich in einem und demselben Punkte schneiden, liefert die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta - \gamma \cos w_1 & \beta \cos w_1 - \gamma \\ \gamma \cos w_2 - \alpha & 0 & \gamma - \alpha \cos w_2 \\ \alpha - \beta \cos w_3 & \alpha \cos w_3 - \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

woraus man erhält:

$$\alpha(\beta^2-\gamma^2)(\cos w_1+\cos w_2\cos w_3)+\beta(\gamma_2-\alpha^2)(\cos w_2+\cos w_1\cos w_3)$$
$$+\gamma(\alpha^2-\beta^2)(\cos w_3+\cos w_1\cos w_2)=0$$

oder:

$$\alpha(\beta^2-\gamma^2)\sin w_2\sin w_3+\beta(\gamma^2-\alpha^2)\sin w_3\sin w_1+\gamma(\alpha^2-\beta^2)\sin w_1\sin w_2=0$$

und weil

$$\sin w_1:\sin w_2:\sin w_3=s_1:s_2:s_3,$$

so folgt:

$$\alpha s_2 s_3(\beta^2-\gamma^2)+\beta s_1 s_3(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma s_1 s_2(\alpha^2-\beta^2)=0$$

Da aber diese Gleichung mit derjenigen der Curve $F(S)$ vollständig übereinstimmt, wenn man statt der Coordinaten α, β, γ des Punktes p die Ausdrücke A, B, C gesetzt denkt, so er ergibt sich:

„Die konischen Polaren aller Punkte der Curve $F(S)$ bezüglich „des Dreiecks haben die Eigenschaft, dass sich ihre in den Ecken „des Dreiecks gezogenen Normalen in einem und demselben Punkte „schneiden; diese Eigenschaft kommt also insbesondere auch den „konischen Polaren der Punkte J, S, G, M, H, D und Q zu".

Regensburg, October 1883.

IX.

Ein Problem über berührende Kugeln.

Von

R. Hoppe.

In T. LVI. S. 307. ist bewiesen, dass nicht mehr als 12 gleiche Kugeln, ohne sich zu durchdringen, eine gleiche Kugel berühren können. Man kann nun die Frage auch umgekehrt stellen: Wie gross muss eine Kugel mindestens sein, damit eine gegebene Anzahl einander gleicher Kugeln, ohne sich zu durchdringen, sie berühren können?

Was das allgemeine Problem betrifft, so sind n Kugeln K von gleichem Radius, den wir $= 1$ setzen, gegeben. Der gemeinsame Abstand der Mittelpunkte aller K vom Mittelpunkte einer gesuchten Kugel M sei $= r$. Der variable Abstand der $k$ten und $h$ten Kugel K sei $= R_{k,h}$. Dann verlangt das Problem, r zum Minimum zu machen bei $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grenzbedingungen:

$$R_{k,h} \geqq 2$$

Die Anzahl der letztern vermindert sich sehr bei Specialbetrachtung, da jede Kugel K höchstens von 5 andern berührt werden kann. Auch lassen sich manche Sätze darüber aufstellen, welche Berührungen der K für ein Minimum r notwendig sind, so dass ihnen entsprechend $R_{k,h} = 2$ im voraus bekannt ist.

Gegenwärtig will ich auf das Problem für ein beliebiges n nicht weiter eingehen, sondern die Untersuchung auf Specialwerte von n beschränken. Für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 12$ ist die Lösung sofort zu

ersehen. Die nächsten Zahlen sind also 7 und 8. Die Lösung für diese 2 Fälle soll daher der Gegenstand des Folgenden sein.

Zunächst leuchtet nämlich ein, dass wenn die Mittelpunkte der K ein regelmässiges Tetraeder, Oktaeder oder Ikosaeder für die Kante $= 2$ bilden, r seinen kleinsten Wert haben muss; denn hier ist eine relative Verschiebung der K nicht möglich. Die entsprechenden Werte der r sind dann die Eckradien der genannten Polyeder, mithin bzhw.

$$r = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{2\sqrt{5}\sin\tfrac{3}{5}R}$$

Ebenso ist auch ein System dreier sich berührenden K keiner relativen Verschiebung fähig, also das kleinste r der Eckradius des gleichseitigen Dreiecks

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Für 2 Kugeln K kann M beliebig klein werden; daher ist zu setzen

$$r = 1$$

Auch für $n = 5$ ist die Frage leicht entschieden. Lässt man von 6 Kugeln K, deren Mittelpunkte die Ecken eines Oktaeders sind, eine weg, so bleiben von den 3 Paren als Pole gegenüberliegender K noch 2 Pare übrig. Jedes der Pare kann, nur wenn das andre Par still steht, auf dessen Aequator fortrücken, indem beide Kugeln mit den 2 Polkugeln in Berührung bleiben. Sobald aber dessen diametrale Lage aufhört, sind die bleibenden Polkugeln fest. Folglich ist die einzig mögliche Configuration, dass 2 diametrale Kugeln die 3 übrigen berühren. Da hiernach die K bei constantem r nicht grösser werden können, so kann bei constanten K auch r nicht kleiner werden, und es ergibt sich der eigentümliche Satz:

Auf einer Kugel, welche von 5 einander nicht durchdringenden gleichen Kugeln berührt wird, hat auch eine sechste berührende gleiche Kugel Platz.

Eine Anordnung der K nach regelmässigem Hexaeder und Dodekaeder führt zwar zu keiner definitiven Entscheidung für $n = 8$, und 20, da die Diagonalen der Vier- und Fünfecke einer Verkürzung bei constanten Kanten fähig sind, bis sie diesen gleich werden, doch geben auch hier die Eckradien, bzhw.

$$= \sqrt{3}, \quad 2\sqrt{3}\sin\tfrac{3}{5}R$$

wenigstens eine obere Grenze des Minimums von r.

Stellen wir hiernach alles Bekannte zusammen, so ist als Minimalwert

$$= 1{,}15470$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}} = 1{,}22474$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421$$

$$\sqrt{3} = 1{,}73205$$

$$\sqrt{2\sqrt{5}\sin\tfrac{2}{5}R} = 1{,}90211$$

$$2\sqrt{3}\sin\tfrac{2}{5}R = 2{,}80252$$

[illegible] Falles $n = 8$ kann man vom Würfel aus- [illegible] R_{ik} einer Verkleinerung fähig, welche [illegible] Quadrate bilden, und zwar einzeln von $2\sqrt{2}$ [illegible] lässt sich leicht bei 4 Diagonalen gleichzeitig [illegible] dreht ein Quadrat in seiner Ebene um $\tfrac{1}{2}R$ und [illegible] Gegenseite, der es parallel bleibt, bis die beide [illegible] Kanten $= 2$ werden.

[illegible] die x und y parallel zwei Seiten des einen Quadrats, [illegible] Abstand der Mittelpunkte beider Quadrate, welche auf der [illegible] $= 2a$, und den Anfang der z in die Mitte zwischen bei- [illegible] die Coordinaten der 8 Ecken:

	x	y	z		x	y	z
1	0	$\sqrt{2}$	a	5	0	$-\sqrt{2}$	a
2	1	1	$-a$	6	-1	-1	$-a$
3	$\sqrt{2}$	0	a	7	$-\sqrt{2}$	0	a
4	1	-1	$-a$	8	-1	1	$-a$

Damit M von allen K berührt wird, muss sein

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

das ist für alle K zugleich:

$$2 + a^2 = r^2$$

Damit jedes K für $z = a$ die 2 nächsten K für $z = -a$ berührt, muss $R_{k,k+1} = 2$ sein, also

$$R_{12}^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 + (a + a)^2 = 4 \quad \text{oder}$$
$$-2\sqrt{2} + 4a^2 = 0$$

Aus beiden Bedingungen ergibt sich:

$$a = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}; \quad r = \sqrt{2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}} = 1{,}64533$$

Demnach ist r um

$$\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = 0{,}08672$$

kleiner bei gegenwärtiger Anordnung der K als bei der Würfelstellung.

Um nun zu untersuchen, ob dieser neue Wert ein Minimum ist, erteilen wir allen K beliebige unendlich kleine Verschiebungen, deren Componenten mit α, β, γ bezeichnet seien, so dass die Coordinaten werden:

	x	y	z		x	y	z
1	α_1	$\sqrt{2}+\beta_1$	$a+\gamma_1$	5	α_5	$-\sqrt{2}+\beta_5$	$a+\gamma_5$
2	$1+\alpha_2$	$1+\beta_2$	$-a+\gamma_2$	6	$-1+\alpha_6$	$-1+\beta_6$	$-a+\gamma_6$
3	$\sqrt{2}+\alpha_3$	β_3	$a+\gamma_3$	7	$-\sqrt{2}+\alpha_7$	β_7	$a+\gamma_7$
4	$1+\alpha_4$	$-1+\beta_4$	$-a+\gamma_4$	8	$-1+\alpha_8$	$1+\beta_8$	$-a+\gamma_8$

Durch die Verschiebungen gehe R_{kh}^2 aus 4 über in $4+\varrho_{kh}$; dann wird in 1. Ordnung:

$$\varrho_{12} = 2(\alpha_2-\alpha_1)+2(\sqrt{2}-1)(\beta_1-\beta_2)+4a(\gamma_1-\gamma_2)$$
$$\varrho_{23} = 2(\sqrt{2}-1)(\alpha_3-\alpha_2)+2(\beta_2-\beta_3)+4a(\gamma_3-\gamma_2)$$
$$\varrho_{34} = 2(\sqrt{2}-1)(\alpha_3-\alpha_4)+2(\beta_3-\beta_4)+4a(\gamma_3-\gamma_4)$$
$$\varrho_{45} = 2(\alpha_4-\alpha_5)+2(\sqrt{2}-1)(\beta_4-\beta_5)+4a(\gamma_5-\gamma_4)$$
$$\varrho_{56} = 2(\alpha_5-\alpha_6)+2(\sqrt{2}-1)(\beta_6-\beta_5)+4a(\gamma_5-\gamma_6)$$
$$\varrho_{67} = 2(\sqrt{2}-1)(\alpha_6-\alpha_7)+2(\beta_7-\beta_6)+4a(\gamma_7-\gamma_6)$$
$$\varrho_{78} = 2(\sqrt{2}-1)(\alpha_8-\alpha_7)+2(\beta_8-\beta_7)+4a(\gamma_7-\gamma_8)$$
$$\varrho_{81} = 2(\alpha_1-\alpha_8)+2(\sqrt{2}-1)(\beta_1-\beta_8)+4a(\gamma_1-\gamma_8)$$

Die Bedingung

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 = 2+\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

bestimmt alle γ in den entsprechenden α, β, so dass

$$a\gamma_1 = -\sqrt{2}\beta_1 \qquad a\gamma_5 = \sqrt{2}\beta_5$$
$$a\gamma_2 = \alpha_2+\beta_2 \qquad a\gamma_6 = -\alpha_6-\beta_6$$
$$a\gamma_3 = -\sqrt{2}\alpha_3 \qquad a\gamma_7 = \sqrt{2}\alpha_7$$
$$a\gamma_4 = \alpha_4-\beta_4 \qquad a\gamma_8 = -\alpha_8+\beta_8$$

Nach Einführung dieser Werte erhält man:

$$\varrho_{12} = -2(\alpha_1+\alpha_2)-2(\sqrt{2}+1)(\beta_1+\beta_2)$$
$$\varrho_{23} = -2(\sqrt{2}+1)(\alpha_2+\alpha_3)-2(\beta_2+\beta_3)$$
$$\varrho_{34} = -2(\sqrt{2}+1)(\alpha_3+\alpha_4)+2(\beta_3+\beta_4)$$
$$\varrho_{45} = -2(\alpha_4+\alpha_5)+2(\sqrt{2}+1)(\beta_4+\beta_5)$$

$$\varrho_{56} = 2(\alpha_5 + \alpha_6) + 2(\sqrt{2}+1)(\beta_5 + \beta_6)$$
$$\varrho_{67} = 2(\sqrt{2}+1)(\alpha_6 + \alpha_7) + 2(\beta_6 + \beta_7)$$
$$\varrho_{78} = 2(\sqrt{2}+1)(\alpha_7 + \alpha_8) - 2(\beta_7 + \beta_8)$$
$$\varrho_{81} = 2(\alpha_8 + \alpha_1) - 2(\sqrt{2}+1)(\beta_8 + \beta_1)$$

Die übrigen ϱ, welche zu den ursprünglichen Quadratseiten gehören, enthalten kein γ und haben unmittelbar die Werte:

$$\varrho_{24} = 4(\beta_2 - \beta_4)$$
$$\varrho_{46} = 4(\alpha_4 - \alpha_6)$$
$$\varrho_{68} = 4(\beta_8 - \beta_6)$$
$$\varrho_{82} = 4(\alpha_2 - \alpha_8)$$
$$\varrho_{13} = 2\sqrt{2}(\alpha_3 - \alpha_1 + \beta_1 - \beta_3)$$
$$\varrho_{35} = 2\sqrt{2}(\alpha_3 - \alpha_5 + \beta_3 - \beta_5)$$
$$\varrho_{57} = 2\sqrt{2}(\alpha_5 - \alpha_7 + \beta_7 - \beta_5)$$
$$\varrho_{71} = 2\sqrt{2}(\alpha_1 - \alpha_7 + \beta_1 - \beta_7)$$

Addirt man besonders die 8 erstern und 8 letztern ϱ, die sich durch die Differenzen der Indices 1 und 2 unterscheiden und durch die Bezeichnungen ϱ' und ϱ'' kenntlich gemacht seien, so findet man:

$$\sqrt{2}\Sigma\varrho' + (\sqrt{2}+1)\Sigma\varrho'' = 0$$

Da nun kein ϱ negativ sein darf, so folgt, dass alle ϱ null sein müssen.

Es fragt sich, ob alsdann eine relative Verschiebung, d. h. eine solche, die nicht einer Rotation des ganzen Systems gleich kommt, möglich ist. Eine Gesamtrotation lässt sich dadurch ausschliessen, dass man den ersten Mittelpunkt festhält und dem zweiten nur Bewegung in gegebener Ebene gestattet, also

$$\alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0$$

setzt. Aus $\varrho_{12} = 0$ folgt dann, dass auch $\beta_2 = 0$ ist; ebenso aus $\varrho_{82} = 0$ und $\varrho_{81} = 0$, dass α_8 und β_8 null werden.

Hiervon abgesehen, sei

$$\alpha_k + \alpha_{k+1} = \delta_k; \quad \beta_k + \beta_{k+1} = \varepsilon_k$$

in dem Sinne, dass für den Index 9 immer 1 zu schreiben ist. Dann gehen die 16 Gleichungen $\varrho = 0$ über in

$$\delta_1 = -(\sqrt{2}+1)\varepsilon_1 \qquad \delta_5 = -(\sqrt{2}+1)\varepsilon_5$$
$$\delta_2 = -(\sqrt{2}-1)\varepsilon_2 \qquad \delta_6 = -(\sqrt{2}-1)\varepsilon_6$$
$$\delta_3 = (\sqrt{2}-1)\varepsilon_3 \qquad \delta_7 = (\sqrt{2}-1)\varepsilon_7$$
$$\delta_4 = (\sqrt{2}+1)\varepsilon_4 \qquad \delta_8 = (\sqrt{2}+1)\varepsilon_8$$

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_2 = \varepsilon_3 & \delta_1 - \delta_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \delta_4 = \delta_5 & \delta_3 - \delta_4 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3 \\ \varepsilon_6 = \varepsilon_7 & \delta_5 - \delta_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_6 \\ \delta_8 = \delta_1 & \delta_7 - \delta_8 = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 \end{array}$$

Eliminirt man die δ, so kommt:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_2 = \varepsilon_3 & (\sqrt{2}+2)\varepsilon_1 = \sqrt{2}\varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_5 & \sqrt{2}\varepsilon_3 = (\sqrt{2}+2)\varepsilon_4 \\ \varepsilon_6 = \varepsilon_7 & (\sqrt{2}+2)\varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_6 \\ \varepsilon_8 = \varepsilon_1 & \sqrt{2}\varepsilon_7 = (\sqrt{2}+2)\varepsilon_8 \end{array}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass, wenn ein ε verschwindet, alle ε, und demzufolge auch gemäss den obern Gleichungen alle δ verschwinden. Sind dann ein α und ein β null, so sind es alle α und β. Dieser Fall findet statt bei der obigen Annahme, wo

$$\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \varepsilon_1 = 0$$

ist.

Es hat sich ergeben, dass für $r^2 = 2 + \sqrt{\frac{1}{2}}$ von der in Rede stehenden Lage aus eine relative Verschiebung der K unmöglich ist. Werden sie also verschoben, so muss r wachsen. Folglich ist r in jener Lage ein Minimum.

Bei diesem Resultate lassen wir es bewenden. Soll ein kleineres r als dieses Minimum existiren, so muss nach irgend einer endlichen Verschiebung r wieder abnehmen und in einer der anfänglichen nicht congruenten Lage denselben Wert wieder erreichen. So unwahrscheinlich dies auch ist, da die vielen congruenten Lagen einander sehr nahe sind, so ist die Unmöglichkeit aus dem Vorstehenden nicht zu ersehen. Einen positiven Grund für dieselbe liefert indes folgende Betrachtung.

Die Configuration, von der wir ausgiengen, zeichnete sich vor allen andern dadurch aus, dass 16 Abstände R bereits ihren kleinsten Wert 2 hatten. Daraus erhielten wir 16 Relationen zwischen den 16 Verschiebungscomponenten α, β. Da diese in 1. Ordnung homogen linear waren, so mussten, wofern keine identischen Relationen vorkamen, alle mit einer verschwinden. Bei jeder andern Configuration erhält man weniger Relationen, z. B. bei der Würfelform nur 12. Daher bleiben einige der α, β unabhängig variabel, mithin disponibel zur Vergrösserung der ϱ in 2. Ordnung, d. i. zur Verkleinerung von r, so dass ein Minimum nicht vorkommen kann, bis 16 Grössen R = 2 geworden sind.

Zur Untersuchung des Falles $n = 7$ gehen wir vom Würfel aus. Seine Diagonale sei z Axe; die yz Ebene gehe durch deren Enden und durch 2 andre Würfelecken. Die Kugel K am einen Ende der Diagonale ($z = r$) falle weg; ihr zunächst liegen 3 Kugeln (1, 2, 3), deren Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck normal zur z Axe bilden. Ihr gemeinsames $z = a$ lässt sich durch Parallelverschiebung der Ebene vergrössern, bis die Kugeln zur Berührung gelangen, die Dreiecksseiten also $= 2$ werden. Die folgenden 3 Kugeln (4, 5, 6) liegen gleichfalls bei gemeinsamem $z = -b$ in einem Dreieck, dessen Seiten $= 2c$, normal zur z Axe. Dann sind die Coordinaten der Ecken:

	x	y	z		x	g	z	7
1	0	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	a	4	0	$\frac{2c}{\sqrt{3}}$	$-b$	$x = 0$
2	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	a	5	$-c$	$-\frac{c}{\sqrt{3}}$	$-b$	$y = 0$
3	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	a	6	c	$-\frac{c}{\sqrt{3}}$	$-b$	$z = -r$

Damit M von allen K berührt wird, muss sein:

$$\frac{4}{3} + a^2 = r^2; \quad \frac{4c^2}{3} + b^2 = r^2 \qquad (1) \quad (2)$$

damit sich die K in der Reihenfolge 1, 6, 2, 4, 3, 5 berühren:

$$4\frac{c^2 - c + 1}{3} + (a+b)^2 = 4 \qquad (3)$$

damit die Polkugel 7 von den nächst liegenden Kugeln 4, 5, 6 berührt wird:

$$\frac{4c^2}{3} + (r-b)^2 = 4 \qquad (4)$$

Addirt man die Gl. (1) (3) und subtrahirt (4), so kommt:

$$\frac{4c}{3} = 2b(r+a) \qquad (5)$$

Gl. (4) gibt nach Subtraction der Gl. (2):

$$r(r-b) = 2 \qquad (6)$$

daher ist

$$b = \frac{r^2 - 2}{r}; \qquad c = \frac{3}{2}\frac{r^2-2}{r}(r+a) \qquad (7)$$

Jetzt hat man nach Gl. (2):



$$\frac{4c^2}{3} = r^2 - b^2 = r^2 - \left(\frac{r^2-2}{r}\right)^2 = 4\,\frac{r^2-1}{r^2}$$

also:

$$c^2 = 3\,\frac{r^2-1}{r^2} \tag{8}$$

und nach Einsetzung des Wertes (7):

$$\frac{4}{3}(r^2-1) = (r^2-2)^2(r+a)^2 \tag{9}$$

Erfüllt man Gl. (1) durch

$$r^2 = \frac{4}{3}\,\frac{1}{1-p^2}; \quad a^2 = \frac{4}{3}\,\frac{p^2}{1-p^2} \tag{10}$$

und lässt p von gleichem Vorzeichen mit a sein, so geht Gl. (9) über in

$$3(1-p)^2(1+3p^2) = 4(3p^2-1)^2$$

entwickelt lautet sie:

$$27p^4 + 18p^3 - 36p^2 + 6p + 1 = 0$$

une nach Division durch $3p-1$:

$$9p^3 + 9p^2 - 9p - 1 = 0$$

Hieraus ergeben sich leicht die 3 übrigen Wurzeln, und man hat:

$$p = \frac{4\cos\varkappa\nu - 1}{3}; \quad \lambda = 4,\ 6,\ 8,\ 16; \quad \nu = \frac{R}{9}$$

das ist in Zahlen:

$$3p = \begin{cases} 2{,}06418 \\ 1 \\ -0{,}30541 \\ -4{,}75877 \end{cases}$$

Nun muss r ein Mittel sein zwischen seinen Werten für Oktaeder und Würfel, also

$$2 < r^2 < 3$$

woraus nach (10):

$$\sqrt{3} < \pm 3p < \sqrt{5}$$

Da dem nur die erste Wurzel entspricht, so ist ausschliesslich

$$p = \frac{4\cos 4\nu - 1}{3}$$

daher nach (10)

$$r^2 = \frac{12}{9-(4\cos 4\nu - 1)^2} = \frac{3}{2(2\cos 4\nu + 1)(1-\cos 4\nu)}$$

$$= \frac{3}{4(3-4\sin^2 2\nu)\sin^2 2\nu} = \frac{3}{4\sin 6\nu \sin 2\nu} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 2\nu}$$

das ist

$$r = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\sin 2\nu}} = 1{,}59125 \tag{11}$$

Dieser Wert ist nicht nur $< \sqrt{3}$, sondern auch kleiner als das gefundene Minimum für 8 Kugeln. Es fragt sich, ob er für 7 Kugeln Minimum ist.

Zunächst sind noch die Coordinaten der Mittelpunkte der K zu berechnen. Nach (10) ist

$$a = rp = \frac{4\cos 4\nu - 1}{\sqrt{6}\sqrt{3\sin 2\nu}} = 1{,}09486 \tag{12}$$

nach (7) (11)

$$b = r\left(1-\frac{2}{r^2}\right) = \left(1 - \frac{4\sin 2\nu}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\sin 2\nu}} = 0.30519 \tag{13}$$

nach (8)

$$c^2 = 3\left(1-\frac{1}{r^2}\right) = 2\sqrt{3}(\cos 3\nu - \cos 7\nu) = 4\sqrt{3}\sin 2\nu \cos 4\nu$$

$$c = 2\sqrt{\sqrt{3}\sin 2\nu \cos 4\nu} = 1{,}34731 \tag{14}$$

Von den so bestimmten Punkten aus mögen nun die K unendlich kleine Verschiebungen erleiden, deren Componenten wie oben mit α, β, γ bezeichnet seien. Für jedes sich anfänglich berührende Par von K gehe R^2 aus 4 über in $4+\varrho$. Dann ist in 1. Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{12} &= 2(\alpha_2 - \alpha_1) + 2\sqrt{3}(\beta_2 - \beta_1) \\ \varrho_{13} &= 2(\alpha_1 - \alpha_3) + 2\sqrt{3}(\beta_3 - \beta_1) \\ \varrho_{23} &= 4(\alpha_2 - \alpha_3) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\varrho_{47} = \frac{4c}{\sqrt{3}}(\beta_4 - \beta_7) + 2(r-b)(\gamma_4 - \gamma_7)$$

$$\varrho_{57} = 2c(\alpha_7 - \alpha_5) + \frac{2c}{\sqrt{3}}(\beta_7 - \beta_5) + 2(r-b)(\gamma_5 - \gamma_7)$$

$$\varrho_{67} = 2c(\alpha_6 - \alpha_7) + \frac{2c}{\sqrt{3}}(\beta_7 - \beta_6) + 2(r-b)(\gamma_6 - \gamma_7)$$

$$\varrho_{16} = 2c(\alpha_6 - \alpha_1) + 2\,\frac{2-c}{\sqrt{3}}(\beta_6 - \beta_1) + 2(a+b)(\gamma_1 - \gamma_6)$$

$$\varrho_{26} = 2(c-1)(\alpha_6 - \alpha_2) + 2\frac{c+1}{\sqrt{3}}(\beta_2 - \beta_6) + 2(a+b)(\gamma_2 - \gamma_6)$$

$$\varrho_{24} = 2(\alpha_2 - \alpha_4) + 2\,\frac{2c-1}{\sqrt{3}}(\beta_4 - \beta_2) + 2(a+b)(\gamma_2 - \gamma_4)$$

$$\varrho_{34} = 2(\alpha_4 - \alpha_3) + 2\,\frac{2c-1}{\sqrt{3}}(\beta_4 - \beta_3) + 2(a+b)(\gamma_3 - \gamma_4)$$

$$\varrho_{35} = 2(c-1)(\alpha_3 - \alpha_5) + 2\,\frac{c+1}{\sqrt{3}}(\beta_3 - \beta_5) + 2(a+b)(\gamma_3 - \gamma_5)$$

$$\varrho_{15} = 2c(\alpha_1 - \alpha_5) + 2\,\frac{2-c}{\sqrt{3}}(\beta_5 - \beta_1) + 2(a+b)(\gamma_1 - \gamma_5)$$

Die α, β, γ sind von einander abhängig durch die auf alle K anzuwendende Bedingung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

woraus in 1. Ordnung:

$$a\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\beta_1 \qquad b\gamma_4 = \frac{2c}{\sqrt{3}}\beta_4 \qquad \gamma_7 = 0$$

$$a\gamma_2 = -\alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\beta_2 \qquad b\gamma_5 = -c\alpha_5 - \frac{c}{\sqrt{3}}\beta_5$$

$$a\gamma_3 = \alpha_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\beta_3 \qquad b\gamma_6 = c\alpha_6 - \frac{c}{\sqrt{3}}\beta_6$$

Dem zufolge wird nach Elimination der γ

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_{47} &= \frac{4c}{\sqrt{3}}\left(\frac{r}{b}\beta_4 - \beta_7\right) \\
\varrho_{57} &= 2c\left(\alpha_7 - \frac{r}{b}\alpha_5\right) + \frac{2c}{\sqrt{3}}\left(\beta_7 - \frac{r}{b}\beta_5\right) \\
\varrho_{67} &= 2c\left(\frac{r}{b}\alpha_6 - \alpha_7\right) + \frac{2c}{\sqrt{3}}\left(\beta_7 - \frac{r}{b}\beta_6\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\varrho_{16} = -\,2c\left(\alpha_1 + \frac{a}{b}\alpha_6\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(c + \frac{2b}{a}\right)\left(\beta_1 + \frac{a}{b}\,\beta_6\right)$$

$$\varrho_{26} = -\,2\left(c + \frac{b}{a}\right)\left(\alpha_2 + \frac{a}{b}\alpha_6\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(c - \frac{b}{a}\right)\left(\beta_2 + \frac{a}{b}\beta_6\right)$$

$$\varrho_{24} = -\,2\left(\alpha_4 + \frac{b}{a}\alpha_2\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(2c + \frac{b}{a}\right)\left(\beta_2 + \frac{a}{b}\,\beta_4\right)$$

$$\varrho_{34} = 2\left(\alpha_4 + \frac{b}{a}\alpha_3\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(2c + \frac{b}{a}\right)\left(\beta_3 + \frac{a}{b}\,\beta_4\right)$$

$$\varrho_{35} = 2\left(c+\frac{b}{a}\right)\left(\alpha_3+\frac{a}{b}\alpha_5\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(c-\frac{b}{a}\right)\left(\beta_3+\frac{a}{b}\beta_5\right)$$

$$\varrho_{15} = 2c\left(\alpha_1+\frac{a}{b}\alpha_5\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(c+\frac{2b}{a}\right)\left(\beta_1+\frac{a}{b}\beta_5\right)$$

Bezeichnet man die 3 ersten ϱ in (15) durch ϱ', die 3 folgenden in (16) durch ϱ'', die 6 übrigen durch ϱ''', so ist zufolge ihrer Werte

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2b}{a}+c\right)\Sigma\varrho'+\frac{1}{r}\left(2a+\frac{b}{c}\right)\Sigma\varrho''+\Sigma\varrho'''=0$$

folglich sind, sofern kein ϱ negativ sein kann, alle ϱ null.

Nimmt man nun, um eine Gesamtrotation der ganzen Figur auszuschliessen,

$$\alpha_1=0;\quad \beta_1=0;\quad \alpha_2=0$$

so ergibt sich, nachdem man alle ϱ null gesetzt hat, aus den Gl. (15) sofort auch:

$$\alpha_3=0;\quad \beta_2=0;\quad \beta_3=0$$

wodurch die letzten 6 Gleichungen übergehen in

$$c\alpha_6=\left(c+\frac{2b}{a}\right)\frac{\beta_6}{\sqrt{3}};\quad \left(c+\frac{b}{a}\right)\alpha_6=\left(c-\frac{b}{a}\right)\frac{\beta_6}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha_4=-\left(1+\frac{2ac}{b}\right)\frac{\beta_4}{\sqrt{3}};\quad \alpha_4=\left(1+\frac{2ac}{b}\right)\frac{\beta_4}{\sqrt{3}}$$

$$\left(c+\frac{b}{a}\right)\alpha_5=-\left(c-\frac{b}{a}\right)\frac{\beta_5}{\sqrt{3}};\quad c\alpha_5=-\left(c+\frac{2b}{a}\right)\frac{\beta_5}{\sqrt{3}}$$

Die neben einander stehenden Gleichungen lassen sich offenbar nur durch Nullsetzung aller α und β vereinen.

Aus den Gl. (16) folgt dann, wie leicht zu sehen, auch

$$\alpha_7=0 \quad\text{und}\quad \beta_7=0.$$

Es hat sich ergeben, dass eine relative Verschiebung der K von der in Rede stehenden Configuration aus für constantes r unmöglich ist, also ein wachsendes r verlangt. Folglich ist der Wert (11) ein Minimum.

Hieran will ich noch zwei Bemerkungen knüpfen.

Nach dem Vorstehenden scheint es, dass überhaupt diejenige Configuration der K dem kleinsten r entspricht, welche die grösstmögliche Anzahl von Berührungen enthält.

Zwei Einwänden, die sich durch leichte Betrachtung heben, will ich nur nachträglich begegnen. Obgleich in den 2 untersuchten Fällen bei jeder Verschiebung alle ϱ in 1. Ordnung null sind, war es nicht überflüssig die Unmöglichkeit einer Verschiebung besonders zu beweisen. Denn könnte eine Verschiebung stattfinden, so wären die R eines Wachsens in 2. Ordnung fähig; bei gehöriger Verteilung der Incremente würden alle Berührungen der K aufhören, mithin eine Verkleinerung von r zulassen. Dagegen konnte, nachdem alle α, β, γ in 1. Ordnung null waren, eine Frage nach höherer Ordnung nicht mehr entstehen, weil die niedrigste Ordnung immer die Stelle der ersten einnimmt, und der Beweis für das Verschwinden auf sie anwendbar wird.

Kurze Notizen betreffend die Fälle von 9, 10 und 11 Kugeln.

Neun K lassen sich auf 3 parallelen Ebenen in Form dreier gleichseitigen Dreiecke ordnen. Die mittelste Ebene ist Aequator, die je 3 Kugeln auf den 2 äussersten berühren einander und ausserdem sechsfach den Mittelkranz. Im ganzen finden also 18 Berührungen statt. Die Figur hat 4 Symmetrieebenen, so dass die Berechnung leicht ist. Es ergibt sich:

$$r = \sqrt{3}$$

wie bei 8 Kugeln in Würfelform, und man hat den eigentümlichen Satz:

Eine Kugel M, die von 8 Kugeln K in Würfelform berührt wird, kann gerade noch von einer 9ten Kugel K in andrer Anordnung berührt werden.

Schaltet man am Pole vom M eine 10te K ein, welche die Berührung des nächsten Kugelkranzes natürlich aufheben muss, so fällt die Symmetrie in Bezug auf den Aequator weg. Die Gleichung für r würde entwickelt von sehr hohem Grade sein. Die approximative Lösung ist daher leichter am ursprünglichen Gleichungssystem zu vollziehen; sie ergibt:

$$r = 1{,}83397$$

Dieser Wert ist um 0,06814 kleiner als der für 12 Kugeln.

Schaltet man ebenso am andern Pole eine 11te Kugel ein, so wird die Symmetrie in Bezug auf den Aequator wieder hergestellt. Die Gleichung für r wird dann einfach und gibt genau denselben

Wert als den für 12 Kugeln. Es zeigt sich also, dass auf derselben Kugel M 11 Kugeln K in zweierlei Ordnung sich auflegen lassen, in der eben genannten und in der Ikosaederform mit Wegfall einer Ecke. Bei ersterer finden nur 18, bei letzterer 25 Berührungen der K unter einander statt. Ist der so erhaltene Wert von r wirklich der kleinst mögliche, so ist die Analogie des Falles mit dem bei 5 Kugeln hervorgetretenen bemerkenswert. Nämlich 6 und 12 Kugeln sind, was man so nennen kann, einer vollkommenen Berührung fähig, d. h. wo alle K, die eine K berühren, auch einander der Reihe nach berühren, so dass eine Verschiebung nicht denkbar ist. Lässt man nun eine Kugel K weg, so lässt sich bei aller Verschiebung r nicht kleiner machen. Auf 4 Kugeln, die sich gleichfalls vollkommen berühren, findet der Satz keine Anwendung.



X.

Zur Transformation der Thetafunctionen.

Von

Ferdinand Müller

aus Parchim.

In seinem handschriftlichen Nachlasse bringt Gauss meist ohne Ableitung und Beweis eine Reihe sehr eleganter Beziehungen zwischen Functionen, die sich später als identisch mit den Jacobi'schen Thetafunctionen erwiesen. Die methodische Aufstellung dieser Beziehungen ist schon wiederholt der Gegenstand von mathematischen Arbeiten gewesen, besonders haben sich Herr Professor Schröter und seine Schüler vielfach mit diesem Thema beschäftigt. In der Tat ist es auch Herrn Dr. Göring gelungen, eine einheitliche und zum Teil noch erweiterte Darstellung dieser Beziehungen zu geben, und zwar auf Grund der Inaugural-Dissertation und der Habilitationsschrift von Herrn Prof. Schröter (cf. Göring, Ueber die Teilwerte der Jacobi'schen Thetafunctionen, Math. Annalen VII. 1874. Pag. 311 etc.).

In neuerer Zeit hat nun Herr Prof. Krause in den Acta mathematica 3. Pag. 93 etc. eine Notiz veröffentlicht, in der er nachweist, dass man auch unmittelbar durch die Transformationsgleichungen zu solchen Beziehungen gelangen müsse, wenn man einerseits die in ihnen auftretenden Coefficienten nach der gewöhnlichen Methode durch die Wurzelwerte der Gleichungen bestimmt und andrerseits Relationen zwischen diesen Coefficienten herstellt, indem man jedes Glied der Gleichungen nach Potenzen des Arguments entwickelt und dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten einander gleich setzt.

In Folge dieser Wahrnehmung liess Herr Prof. Krause während des vorigen Semesters im mathematischen Seminar nach dieser Richtung hin arbeiten, und übernahm ich gegen Schluss des Semesters, nachdem für den speciellen Fall $n = 3$ die Gleichungen Göring § 3 (3) und (8) gefunden waren, die vollständige Durchführung dieser Untersuchung, um die Anwendbarkeit dieser Methode sowohl für den allgemeinen Fall, als auch für die speciellen Fälle nachzuweisen.

In der Tat stellte es sich auch im Laufe der Arbeit heraus, dass man auf diesem Wege nicht nur die Göring'schen Formeln erhält, sondern eine unbeschränkte Anzahl von Beziehungen zwischen diesen Grössen aufstellen kann, dass ferner die von Göring angegebenen Formeln zum Teil in viel allgemeinerem Sinne gelten, und dass endlich für den allgemeinen Fall diese Methode viel weiter reicht; und dabei ist diese Methode so ausserordentlich einfach, es kommt lediglich darauf an, die Theta- resp. Elliptischen Functionen und deren Potenzen und Producte in nach Potenzen des Arguments fortschreitenden Reihen zu entwickeln und dann die erhaltenen Resultate geschickt zu combiniren. Es ist somit das nach der Göring'schen Arbeit so complicirt erscheinende Problem zurückgeführt auf das in neuerer Zeit so vielfach behandelte Problem die Theta- resp. Elliptischen Functionen und deren Potenzen in Potenzreihen zu entwickeln. Die Arbeiten, die hierfür besonders in Betracht kommen, sind:

Jacobi, Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen Crelle Journal LIV. 1857 (cf. auch Schellbach, Elliptische Integrale §§ 93—96).

Die Arbeiten von Didon (Annales de Mathématiques 1872)
von Moreau Nouvelles Annales 1876
von Hermite Crelle Journal 1876 und besonders
Désiré André, Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances. Annales de l'École Normale VI. 1878. Pag. 265 etc.

Charakterisch ist noch für diese Methode, dass die Beziehungen zwischen den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 unter einander von den Beziehungen zwischen diesen und den Teilwerten der Thetafunctionen vollständig unabhängig gefunden werden.

In der vorliegenden Arbeit ist nur erst der specielle Fall der unpaaren Transformation behandelt, es leuchtet jedoch sofort ein, dass die hier befolgte Methode mit unwesentlichen Modificationen auch auf den paaren Transformationsgrad angewandt werden kann.

— Besonderes Gewicht ist darauf gelegt, für die speciellen Fälle sämmtliche unter diesen Gesichtspunkt fallende Gauss'sche und Göring'sche Relationen zu erhalten, und habe ich deshalb unter jeder Formel die entsprechende Göring'sche in Klammer citirt und nur die nicht von Göring gebrachten Relationen zum Teil mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Was speciell den Gang der Abhandlung anlangt, so sind im ersten Abschnitt die Beziehungen zwischen den transformirten Thetafunctionen für das Argument 0, also die sogenannten Gauss'schen Relationen, aufgestellt und im zweiten Abschnitt die Beziehungen zwischen diesen und den Teilwerten der Thetafunctionen, und zwar befindet sich für jeden Abschnitt in § 1 das zu Grunde gelegte Material zusammengestellt, in § 2 die allgemeinen Untersuchungen, in § 3 die speciellen Betrachtungen für $n = 3$, und in § 4 die für $n = 5$.

Schliesslich möchte ich noch an dieser Stelle Herrn Prof. Krause öffentlich meinen Dank aussprechen für das Interesse, welches er dieser Arbeit stets entgegenbrachte, und für die Bereitwilligkeit, mit der er mir zu jeder Zeit die nötigen Hülfsmittel an die Hand gab.

Abschnitt I.

§ 1.

Für diese ganze Arbeit kommt nur in Betracht die Kenntnis der Theorie der Thetafunctionen und der elliptischen Functionen, soweit Jacobi sie in den ersten sechs Paragraphen seiner Abhandlung „Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet" bringt, also die Kenntnis des Zusammenhanges der Thetafunctionen unter einander und mit dem elliptischen Integral erster Gattung und das Additionstheorem der Thetafunctionen und der elliptischen Functionen; ferner die Kenntnis der drei Transformationsgleichungen für den unpaaren Transformationsgrad, welche die Grundlage dieser ganzen Abhandlung bilden:

$$\text{I.}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v', \tau') = x_1\vartheta_1^n(v, \tau) + x_2\vartheta_1^{n-2}(v, \tau)\vartheta_0^2(v, \tau) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v, \tau)\vartheta_0^{n-1}(v, \tau)$$

$$\text{II.}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v', \tau') = x_1\vartheta_1^n(v, \tau) + x_2\vartheta_1^{n-2}(v, \tau)\vartheta_2^2(v, \tau) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v, \tau)\vartheta_2^{n-1}(v, \tau)$$

$$\text{III.}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v', \tau') = x_1\vartheta_1{}^n(v, \tau) + x_2\vartheta_1{}^{n-2}(v, \tau)\vartheta_3{}^2(v, \tau) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v, \tau)\vartheta_3{}^{n-1}(v, \tau)$$

wo n irgend eine beliebige ungerade Zahl ist, ferner $v' = tv$, $\tau' = \frac{t\tau - 8\xi}{t_1}$, wenn t ein Teiler von n, $t_1 = \frac{n}{t}$ und ξ eine beliebige ganze Zahl (0 incl.) $< t_1$, aber ohne einen gemeinsamen Teiler mit t und t_1 zugleich ist.

(cf. Königsberger, die Transformation der elliptischen Functionen).

Vermehrt man in diesen Gleichungen das Argument um halbe Perioden der Einheit und des Moduls τ, so folgen aus denselben unmittelbar auch die Ausdrücke für die drei andern transformirten Thetafunctionen, so dass man aus diesen drei Gleichungen sofort drei Gleichungssysteme von je vier Gleichungen erhält, die man vereinigt so schreiben kann:

A.

$$1)\quad \vartheta_{\alpha_1}(v', \tau') = x_1\vartheta_{\alpha_1}{}^n(v, \tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_1}{}^{n-2}(v, \tau)\vartheta_1{}^2(v, \tau) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_1}(v, \tau)\vartheta_1{}^{n-1}(v, \tau)$$

$$2)\quad \vartheta_{\alpha_2}(v', \tau') = x_1\vartheta_{\alpha_2}{}^n(v, \tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_2}{}^{n-2}(v, \tau)\vartheta_{\alpha_3}{}^2(v, \tau) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_2}(v, \tau)\vartheta_{\alpha_3}{}^{n-1}(v, \tau)$$

$$3)\quad \vartheta_{\alpha_3}(v', \tau') = x_1\vartheta_{\alpha}{}^n(v, \tau) \pm x_2\vartheta_{\alpha_3}{}^{n-2}(v, \tau)\vartheta_{\alpha_2}{}^2(v, \tau) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_{\alpha_3}(v, \tau)\vartheta_{\alpha_2}{}^{n-1}(v, \tau)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_1(v', \tau') = x_1\vartheta_1{}^n(v, \tau) + x_2\vartheta_1{}^{n-2}(v, \tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2(v, \tau) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_1(v, \tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^{n-1}(v, \tau)$$

wo die Indices α nach einander für die drei Fälle die Werte annehmen:

für I. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$

für II. $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 0$

für III. $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$

und wo im ersten Fall rechts überall das positive Zeichen zu wählen ist, im zweiten in den Ausdrücken für ϑ_{α_2}' und ϑ_{α_2} abwechselnd positives und negatives Zeichen, und ein gleiches im dritten Fall in den Ausdrücken für ϑ_{α_1} und ϑ_{α_2}.

Man kann nun schon diese sich unmittelbar ergebenden Gleichungssysteme zu Grunde legen und aus ihnen Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 herstellen, indem man auf beiden Seiten jedes Glied nach Potenzen von v entwickelt, nach Potenzen von v ordnet und dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von v auf beiden Seiten einander gleich setzt. Die Anzahl der sich so ergebenden Relationen wird um so grösser sein, da ausser den zu eliminirenden unbekannten Grössen x nur noch die Unbekannten $\vartheta_\alpha''(0, \tau)$ und $\vartheta_\alpha''(0, \tau')$ auftreten, wo man α fest gleich 0, 2 oder 3 annehmen kann, denn man kann ja die zweiten und höheren Ableitungen aller Thetafunctionen durch die Thetafunctionen selbst und die zweite Ableitung einer einzigen der drei genannten Thetafunctionen ausdrücken.

Hierbei aber tritt der Umstand erschwerend ein, dass diese zweiten Ableitungen nicht nur linear auftreten, sondern auch die Potenzen derselben. Deshalb ist es besser, man legt den Betrachtungen diese Gleichungen in der Form zu Grunde, wie sie Herr Prof. Krause für den Fall I. in seiner Notiz, Acta mathematica 3. Pag. 95 unter (3) angiebt. Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus den obigen durch den Zusammenhang der Thetafunctionen mit elliptischen Functionen und lauten für den Fall I. folgendermassen:

B.

I. 1)
$$\vartheta_3^n \frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v,\tau)} = x_1\vartheta_3^n + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\mathrm{sn}^2(u,k) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\mathrm{sn}^{n-1}(u,k)$$

2)
$$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0^n \mathrm{cn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v,\tau)}$$
$$= x_1\vartheta_2^n\mathrm{cn}^n(u,k) + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2\mathrm{cn}^{n-2}(u,k)\mathrm{dn}^2(u,k) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}^{n-1}(u,k)$$

3)
$$\frac{O_3}{O_0}\vartheta_0^n \mathrm{dn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v',\tau')}{\vartheta_0^n(v,\tau)}$$
$$= x_1\vartheta_3^n\mathrm{dn}^n(u,k) + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\mathrm{dn}^{n-2}(u,k)\mathrm{cn}^2(u,k) + \dots$$
$$\dots + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{cn}^{n-1}(u,k)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{O_2}{O_3} \vartheta_3^{n} \operatorname{sn}(u'\, c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^{n}(v, \tau)}$$
$$= x_1 \vartheta_2^{n} \operatorname{sn}^{n}(u, k) + x_2 \vartheta_2^{n-2} \vartheta_3^{2} \operatorname{sn}^{n-}\,(u, k)$$
$$\ldots + x_{\frac{n+1}{2}} \vartheta_2 \vartheta_3^{n-1} \operatorname{sn}(u, k)$$

wobei folgende Beziehungen stattfinden:

$$u = \pi \vartheta_3^2 v, \quad u' = \pi O_3^2 v' = tu \frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}. \quad k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}. \quad c = \frac{O_2^2}{O_3^2}.$$

wenn man setzt

$$\vartheta_\alpha(0, \tau) = \vartheta_n \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha(0, \tau') = O_\alpha.$$

Aehnliche, jedoch nicht so analoge Ausdrücke, dass man sie wie die Gleichungssysteme A. zusammenfassen kann, ergeben sich, wenn man A_{II} und A_{III} umformt. Der Kürze wegen gebe ich sie hier nicht an, zumal man sie sehr leicht aus den Gleichungssytemen A ableiten kann.

Um nun aus diesen Gleichungen Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen zu erhalten, muss man die elliptischen Fnnctionen sn, cn, dn, sowie die Potenzen und Producte derselben nach Potenzen von u entwickeln. Es ist nun aber nach Königsberger, Elliptische Fuuctionen II. Pag. 81 und 82, wenn man die Moduln und Complementarmoduln durch die Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrückt:

$$\operatorname{sn}(u) = u - \frac{u^3}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \frac{u^5}{5!} \frac{\vartheta_2^8 + 4\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + \vartheta_3^8}{\vartheta_3^8}$$
$$- \frac{u^7}{7!} \frac{\vartheta_2^{12} + 135\vartheta_2^8\vartheta_3^4 + 135\vartheta_2^4\vartheta_3^8 + \vartheta_3^{12}}{\vartheta_3^{12}} + \ldots$$

$$\operatorname{cn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} \frac{4\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - \frac{u^6}{6!} \frac{16\vartheta_2^8 + 44\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + \vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\operatorname{dn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} + \frac{u^4}{4!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{4\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} - \frac{u^6}{6!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{\vartheta_2^8 + 44\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8}$$
$$+ \ldots$$

$$\operatorname{sn}^2(u) = u^2 - \frac{2}{3!} u^4 \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \frac{1}{3.5!} u^6 \frac{16\vartheta_2^8 + 44\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} - \ldots$$

$$\operatorname{sn}^3(u) = u^3 - \frac{1}{2} u^5 \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \frac{1}{5!} u^7 \frac{13\vartheta_2^8 + 32\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 13\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} - \ldots$$

$$\operatorname{sn}^4(u) = u^4 - u^6 \frac{4}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \ldots$$

$$\mathrm{sn}^5(u) = u^5 - u^7 \frac{5}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \ldots$$

. . . .

$$\mathrm{cn}^2(u) = 1 - u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{3.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 104\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^3(u) = 1 - \frac{3}{2!} u^2 + u^4 \frac{3}{4!} \frac{4\vartheta_2^4 + 7\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{2.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 164\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 61\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^4(u) = 1 - \frac{4}{2!} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{2\vartheta_2^4 + 5\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{2}{3.5!} \frac{16\vartheta_2^8 + 224\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 136\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{cn}^5(u) = 1 - \frac{5}{2!} u^2 + u^4 \frac{1}{4!} \frac{20\vartheta_2^4 + 65\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{6!} \frac{80\vartheta_2^8 + 1420\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 1205\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

. . . .

$$\mathrm{dn}^2(u) = 1 - \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{3.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{16\vartheta_2^8 + 104\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^3(u) = 1 - \frac{3}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{3\vartheta_1^4(7\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4)}{\vartheta_3^4 . \vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{2.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{61\vartheta_2^8 + 164\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^4(u) = 1 - \frac{4}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{2}{3!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{5\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{2}{3.5!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{136\vartheta_2^8 + 244\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 16\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}^5(u) = 1 - \frac{5}{2!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} u^2 + u^4 \frac{1}{4!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{65\vartheta_2^4 + 20\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} - u^6 \frac{1}{6!} \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \frac{1205\vartheta_2^8 + 1420\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 80\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} + \ldots$$

. . . .

Ich habe hier diese Entwicklungen und nicht die Jacobi'schen zu Grunde gelegt, weil sie sich in dieser Form besser für unsern Zweck eignen; und ferner habe ich die Potenzen aus den einfachen

berechnet und sie nicht aus den von Désiré André gegebenen allgemeinen Resultaten durch Specialisirung abgeleitet, da ersteres für die bisher von mir behandelten speciellen Fälle viel leichter ist.

Ferner sind nun noch für die speciellen Fälle die Producte je zweier dieser Ausdrücke zu bilden und zwar die Producte, für welche die Summe der Exponenten respective = 3, 5 ... $2q+1$ sind. Der Kürze halber will ich jedoch auch diese hier nicht angeben, nur das möchte ich bemerken, dass die Producte $\mathrm{cn}^p(u)\,\mathrm{dn}^r(u)$ den Producten $\mathrm{cn}^r(u)\,\mathrm{dn}^p(u)$ ganz analog sind, dass man die letzteren unmittelbar bekommt, wenn man bei den Aus rücken für die ersteren die Indices 2 und 3 in den Zählern vertauscht.

Endlich ist nun noch der Quotient $\frac{\vartheta_\alpha(v', \tau')}{\vartheta_\alpha{}^n(v, \tau)}$ zu entwickeln. Da $v' = \frac{tu}{\pi\vartheta_3{}^2}$ und $v = \frac{u}{\pi\vartheta_3{}^2}$ ist, so kann man diesen Quotient als eine Function von u ansehen, und er wird entwickelt die Form annehmen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v', \tau')}{\vartheta_\alpha{}^n(v, \tau)} = f(u) = y_0 + y_1 u + y_2 u^2 + y_3 u^3 + \dots$$

Es lässt sich jedoch nachweisen und stellt sich auch bei den weiteren Untersuchungen heraus, dass alle $y_{2m+1} = 0$ sind, man erhält somit für $f(u)$ endgültig die Form:

$$f(u) = y_0 + y_2 u^2 + y_4 u^4 + \dots$$

Die Grössen y enthalten, wie man unmittelbar erkennt, wieder die Unbekannten ϑ_α'' und O_α'' und zwar in der Form $t^2 \frac{O_\alpha''}{O_\alpha} - n \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$ und der Potenzen von diesem Ausdruck. Wir betrachten deshalb bei der Aufstellung der Gauss'schen Relationen die y als Unbekannte und haben es so, wenn wir dann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u auf beiden Seiten einander gleich setzen, mit Gleichungen zu tun, in denen die Unbekannten x und y nur linear auftreten, was die Elimination derselben wesentlich erleichtert.

Bei den allgemeinen Betrachtungen müssen wir die Grössen y jedoch berechnen, da dort nicht so viele Gleichungen vorliegen, um auch die y zu eliminiren.

Hierbei ist es dann wesentlich, dass man die verschiedenen Ableitungen der Thetafunctionen mit dem Argument 0 durch die Thetafunctionen mit dem Argument 0 selbst und die zweite Ableitung einer einzigen ausdrücken kann. Ich will deshalb hier die Beziehungen zwischen diesen Grössen zusammenstellen, wie sie sich aus der Ent-

wicklung der Gleichungen der Jacobi'schen Tabelle C. (Jacobi's gesammelte Werke I. Pag. 510) ergeben:

Nach der hier gewählten Bezeichnungsweise ist

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$$

$$\vartheta_3^3\vartheta_3'' = \vartheta_0^3\vartheta_0''+\vartheta_2^3\vartheta_2''$$

$$\vartheta_3\vartheta_0'' = \vartheta_0\vartheta_3''+\pi^2\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2^4$$

$$\vartheta_3\vartheta_2'' = \vartheta_2\vartheta_3''-\pi^2\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0^4$$

$$\vartheta_1''' = 3\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3''-\pi^3\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4) = 3\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0''$$
$$-\pi^3\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4) = \ldots$$

$$\vartheta_0^{IV} = 3\frac{\vartheta_0''^2}{\vartheta_0}-2\pi^4\vartheta_0\vartheta_2^4\vartheta_3^4 = \ldots$$

$$\vartheta_2^{IV} = 3\frac{\vartheta_0''^2}{\vartheta_2}-2\pi^4\vartheta_0^4\vartheta_2\vartheta_3^4 = 3\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0^2}\vartheta_0''^2-6\pi^2\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\vartheta_3^4\vartheta_0''$$
$$+\pi^4\vartheta_2\vartheta_3^4(3\vartheta_3^4-2\vartheta_0^4) = \ldots$$

$$\vartheta_3^{IV} = 3\frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3}+2\pi^4\vartheta_0^4\vartheta_2^4\vartheta_3 = 3\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0^2}\vartheta_0''^2-6\pi^2\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\vartheta_2^4\vartheta_0''$$
$$+\pi^4\vartheta_2^4\vartheta_3(3\vartheta_2^4+2\vartheta_0^4) = \ldots$$

$$\vartheta_1^{V} = 15\pi\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0}\vartheta_0''^2-10\pi^3\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0''(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)$$
$$+\pi^5\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2^8+4\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8) = \ldots$$

. . . .

§ 2.

Setzt man in den Gleichungen B_I für die Potenzen und Producte der elliptischen Functionen und für $f(u)$ die Werte ein, so nehmen dieselben, wenn man bis zur fünften Potenz von u fortschreitet, folgende Gestalt an:

1) $$\vartheta_3^n(y_0+y_2u^2+y_4u^4+\ldots) = x_1\vartheta_3^n$$
$$+x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2\left(u^2-\frac{u^4}{3}\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}+\ldots\right)+x_3\vartheta_3^{n-4}\vartheta_2^4(u^4-\ldots)+\ldots$$

2) $$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0^n(y_0-\ldots) = x_1\vartheta_2^n(1-\ldots)+x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2(1-\ldots)+\ldots$$
$$\ldots+x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^{n-3}(1-\ldots)+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}(1-\ldots)$$

$$3)\quad \frac{\Theta_3}{\Theta_0}\vartheta_0^n(y_0 - \ldots) = x_1\vartheta_3^n(1-\ldots) + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2(1-\ldots)+\ldots$$

$$\ldots + x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3^3\vartheta_2^{n-3}(1-\ldots) + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}(1-\ldots)$$

$$4)\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{\Theta_2}{\Theta_3}\vartheta_3^n\Big\{tu\,y_0\frac{\Theta_3^2}{\vartheta_3^2} - \frac{u^3}{3!}\Big(y_0t^3\frac{\Theta_3^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{\Theta_2^4+\Theta_3^4}{\vartheta_3^4} - 6ty_2\frac{\Theta_3^2}{\vartheta_3^2}\Big)$$

$$+\frac{u^5}{5!}\Big(y_0t^5\frac{\Theta_3^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{\Theta_2^8+4\Theta_2^4\Theta_3^4+\Theta_3^8}{\vartheta_3^8}$$

$$-20t^3y_2\frac{\Theta_3^2}{\vartheta_3^2}\,\frac{\Theta_2^4+\Theta_3^4}{\vartheta_3^4} + 120t\,y_4\frac{\Theta_3^2}{\vartheta_3^2}\Big) - \ldots\Big\} =$$

$$x_1\vartheta_2^n(u^n - \ldots) + \ldots x_{\frac{n-3}{2}}\vartheta_2^5\vartheta_3^{n-5}(u^5 - \ldots)$$

$$+x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^{n-3}\Big(u^3 - \frac{u^5}{2}\,\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4}+\ldots\Big)$$

$$+x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}\Big(u - \frac{u^3}{3!}\,\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{\vartheta_3^4} + \frac{u^5}{5!}\,\frac{\vartheta_2^8+4\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8}{\vartheta_3^8} - \ldots\Big)$$

Hieraus ergeben sich durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von u folgende Gleichungen:

Aus 1)

a) $y_0 = x_1$

b) $\vartheta_3^2y_2 = \vartheta_2^2x_2$

c) $3\vartheta_3^6y_4 = -x_2\vartheta_2^2(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4) + 3x_3\vartheta_2^4\vartheta_3^2$

. . . .

Aus 2)

a) $\frac{\Theta_2}{\Theta_0}\vartheta_0^ny_0 = x_1\vartheta_2^n + x_2\vartheta_2^{n-2}\vartheta_3^2 + \ldots$

$\ldots + x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^{n-3} + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3^{n-1}$

. . . .

Aus 3)

a) $\frac{\Theta_3}{\Theta_0}\vartheta_0^ny_0 = x_1\vartheta_3^n + x_2\vartheta_3^{n-2}\vartheta_2^2 + \ldots$

$\ldots + x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3^3\vartheta_2^{n-3} + x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_3\vartheta_2^{n-1}$

. . . .

Aus 4)

a) $(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\Theta_2\Theta_3y_0 = \vartheta_2\vartheta_3x_{\frac{n+1}{2}}$

b) $(-1)^{\frac{t-1}{2}}t(y_0t^2\Theta_2\Theta_3(\Theta_2^4+\Theta_3^4) - 6y_2\vartheta_3^4\Theta_2\Theta_3)$

$= x_{\frac{n+1}{2}}\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4) - 6x_{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^3\vartheta_3^3$

$$\text{c)}\quad (-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3 \{ t^4 y_0 (O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8) - 20 t^2 y_2 \vartheta_3^4 (O_2^4 + O_3^4) + 120 y_4 \vartheta_3^8 \}$$
$$= \vartheta_2 \vartheta_3 \{ x_{\frac{n+1}{2}} (\vartheta_2^8 + 4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8) - 60 x_{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + 120 x_{\frac{n-3}{2}} \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 \}$$

Man sieht nun unmittelbar, dass diese Gleichungen nicht hinreichen, um alle y und x zu eliminiren, zumal man die sich aus 2) und 3) ergebenden allgemein garnicht benutzen kann, denn in denselben treten immer alle Grössen x von x_1 bis $x_{\frac{n+1}{2}}$ auf. Wohl aber können wir mit Hülfe aller sich aus 1) und 4) ergebenden Gleichungen nach einander alle Grössen x durch Thetafunctionen mit dem Argument 0 und die Grössen y ausdrücken, und da die y sich durch die Thetafunctionen und jenen die zweite Ableitung einer derselben für das Argument 0 enthaltenden Ausdruck, darstellen lassen, so wird man jede der Grössen x durch die genannten Grössen ausdrücken können. Da dieses später für die allgemeinen Betrachtungen bei den Teilwerten der Thetafunctionen benutzt wird, so will ich es gleich hier für die Grössen x_1, x_2, x_3, $x_{\frac{n+1}{1}}$, $x_{\frac{n-1}{2}}$ und $x_{\frac{n-3}{2}}$ durchführen:

Aus dem Taylor'schen und dem Leibnitz'schen Satz ergeben sich ür die y in der Entwicklung von $\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^n(v, \tau)}$, wenn man noch die Beziehungen zwischen den Grössen u und v berücksichtigt, folgende Werte:

$$y_0 = \frac{O_0}{\vartheta_0{}^n}$$

$$y_2 = \frac{1}{2!\,\pi^2} \frac{O_0}{\vartheta_3^4 \vartheta_0^n} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)$$

$$y_4 = \frac{1}{4!\,\pi^4} \frac{O_0}{\vartheta_3^8 \vartheta_0^n} \left\{ 3 \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)^2 - 2\pi^4 (t^4 O_2^4 O_3^4 - n \vartheta_2^4 \vartheta_3^4) \right\}$$

. . . .

Analoge Werte erhält man in den beiden andern Fällen für die y.

Setzt man diese Werte in die obigen Gleichungen ein, so ergeben sich für die Coefficienten folgende Ausdrücke:

I. für $\alpha_1 = 0$

$$x_1 = \frac{O_0}{\vartheta_0^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0^n \vartheta_2 \vartheta_3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{O_0}{\pi^2 \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 \vartheta_0^n} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{6 \vartheta_0^n \vartheta_2^3 \vartheta_3^3} \left\{ \frac{3}{\pi^2} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right) \right.$$
$$\left. - (t^2 (O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)) \right\}$$

$$x_3 = \frac{O_0}{\vartheta_0^n \vartheta_2^4 \vartheta_3^4} \left\{ \frac{1}{8\pi^4} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4}{6\pi^2} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right) - \frac{1}{12} (t^4 O_2^4 O_3^4 - n \vartheta_2^4 \vartheta_3^4) \right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0^n \vartheta_2^5 \vartheta_3^5} \left\{ \frac{1}{8\pi^4} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)^2 \right.$$
$$- \frac{t^2 (O_2^4 + O_3^4) - 3(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)}{12\pi^2} \left(t^2 \frac{O_0''}{O_0} - n \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right)$$
$$- \frac{1}{12} (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) [t^2 (O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)]$$
$$- \frac{1}{120} [t^4 (O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8)$$
$$\left. - (\vartheta_2^8 + (10n - 6) \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)] \right\}$$

II. für $\alpha_1 = 2$

$$x_1' = \frac{O_2}{\vartheta_2^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_2^n \vartheta_3}$$

$$x_2' = \frac{1}{2} \frac{O_2}{\pi^2 \vartheta_0^2 \vartheta_2^n \vartheta_3^2} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{t O_0 O_2 O_3}{6 \vartheta_0^3 \vartheta_2^n \vartheta_3^3} \left\{ \frac{3}{\pi^2} \left(t^2 \frac{O_2''}{O_2} - n \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right) \right.$$
$$\left. + (t^2 (O_0^4 + O_3^4) - (\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4)) \right\}$$

$$x_3' = \frac{O_2}{\vartheta_0^4\vartheta_2^n\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2\frac{O_2''}{O_2} - n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{\vartheta_0^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(t^2\frac{O_2''}{O_2} - n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) - \frac{1}{12}(t^4O_0^4O_3^4 - n\vartheta_0^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}}' = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{tO_0O_2O_3}{\vartheta_0^5\vartheta_2^n\vartheta_3^5}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2\frac{O_2''}{O_2} - n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2\right.$$

$$+ \frac{t^2(O_0^4+O_3^4) - 3(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(t^2\frac{O_2''}{O_2} - n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$- \frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)[t^2(O_0^4+O_3^4) - (\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)]$$

$$- \frac{1}{120}[t^4(O_0^8+4O_0^4O_3^4+O_3^8)$$

$$\left. -(\vartheta_0^8+(10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)]\right\}$$

III. für $\alpha_2 = 3$

$$x_1'' = \frac{O_3}{\vartheta_3^n}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t\frac{O_0O_2O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3^n}$$

$$x_2'' = -\frac{1}{2}\frac{O_3}{\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^n}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$x_{\frac{n-1}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{tO_0O_2O_3}{6\vartheta_0^3\vartheta_2^3\vartheta_3^n}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\right.$$

$$\left. -(t^2(O_0^4-O_2^4) - (\vartheta_0^4-\vartheta_2^4))\right\}$$

$$x_3'' = \frac{O_3}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4\vartheta_3^n}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{\vartheta_0^4-\vartheta_2^4}{6\pi^2}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) + \frac{1}{12}(t^4O_0^4O_2^4 - n\vartheta_0^4\vartheta_2^4)\right\}$$

$$x_{\frac{n-3}{2}}'' = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\frac{tO_0O_2O_3}{\vartheta_0^5\vartheta_2^5\vartheta_3^n}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2\right.$$

$$- \frac{t^2(O_0^4-O_2^4) - 3(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)}{12\pi^2}\left(t^2\frac{O_3''}{O_3} - n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$- \frac{1}{12}(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)[t^2(O_0^4-O_2^4) - (\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)]$$

$$- \frac{1}{120}[t^4(O_0^8-4O_0^4O_2^4+O_2^8)$$

$$\left. -(\vartheta_0^8-(10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_2^4+\vartheta_2^8)]\right\}.$$

§ 3.

In dem speciellen Falle $n = 3$ können wir uns auf eins der drei Gleichungssysteme B. beschränken z. B. auf B_I, denn man bekommt durch alle drei dieselben Gleichungen. Das System B_I nimmt aber für $n = 3$ folgende Form an:

1) $\vartheta_3{}^3 \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^3(v, \tau)} = x_1 \vartheta_3{}^3 + x_2 \vartheta_3 \vartheta_2{}^2 \mathrm{sn}^2(u, k)$

2) $\frac{O_2}{O_0} \vartheta_0{}^3 \mathrm{cn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^3(v, \tau)}$
$= x_1 \vartheta_2{}^3 \mathrm{cn}^3(u, k) + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3{}^2 \mathrm{cn}(u, k) \mathrm{dn}^2(u, k)$

3) $\frac{O_3}{O_0} \vartheta_0{}^3 \mathrm{dn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^3(v, \tau)}$
$= x_1 \vartheta_3{}^3 \mathrm{dn}^3(u, k) + x_2 \vartheta_3 \vartheta_2{}^2 \mathrm{dn}(u, k) \mathrm{cn}^2(u, k)$

4) $(-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{O_2}{O_3} \vartheta_3{}^3 \mathrm{sn}(u', c) \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^3(v, \tau)}$
$= x_1 \vartheta_2{}^3 \mathrm{sn}^3(u, k) + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3{}^2 \mathrm{sn}(u, k)$

Entwickelt man hier nun in der angegebenen Weise und setzt dann die Coefficienten gleich hoher Potenznn von u auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man, wenn man in den Entwicklungen bis zur fünften Potenz fortschreitet, folgende Gleichungen:

(1) $y_0 = x_1$

(2) $y_0 \vartheta_0{}^3 O_2 = x_1 \vartheta_2{}^3 O_0 + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3{}^2 O_0$

(3) $y_0 \vartheta_0{}^3 O_3 = x_1 \vartheta_3{}^3 O_0 + x_2 \vartheta_2{}^2 \vartheta_3 O_0$

(4) $(-1)^{\frac{t-1}{2}} y_0 t O_2 O_3 = x_2 \vartheta_2 \vartheta_3$

(5) $y_2 \vartheta_3{}^2 = x_2 \vartheta_2{}^2$

(6) $t^2 y_0 \vartheta_0{}^3 O_2 O_3{}^4 - 2 y_2 \vartheta_0{}^3 \vartheta_3{}^4 O_2$
$= 3 x_1 \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^4 O_0 + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3{}^2 O_0 (2 \vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$

(7) $t^2 y_0 \vartheta_0{}^3 O_2{}^4 O_3 - 2 y_2 \vartheta_0{}^3 \vartheta_3{}^4 O_3$
$= 3 x_1 \vartheta_2{}^4 \vartheta_3{}^3 O_0 + x_2 \vartheta_2{}^2 \vartheta_3 O_0 (\vartheta_2{}^4 + 2 \vartheta_3{}^4)$

(8) $(-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3 \{ - t^2 y_0 (O_2{}^4 + O_3{}^4) + 6 y_2 \vartheta_3{}^4 \}$
$= 6 x_1 \vartheta_2{}^3 \vartheta_3{}^3 - x_2 \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$

(9) $3 y_4 \vartheta_3{}^6 = - x_2 \vartheta_2{}^2 (\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$

(10) $t^4 y_0 \vartheta_0^3 O_2 O_3^4 (4 O_2^4 + O_3^4) - t^2 . 12 y_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 O_2 O_3^4 + 24 y_4 \vartheta_0^3 \vartheta_3^8 O_2$
$= 3 x_1 \vartheta_2^3 \vartheta_3^4 O_0 (4 \vartheta_2^4 + 7 \vartheta_3^4) + x_2 \vartheta_2 \vartheta_3^2 O_0 (8 \vartheta_2^8 + 24 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)$

(11) $t^4 y_0 \vartheta_0^3 O_2^4 O_3 (O_2^4 + 4 O_3^4) - t^2 . 12 y_2 \vartheta_0^3 \vartheta_3^4 O_2^4 O_3 + 24 y_4 \vartheta_0^3 \vartheta_3^8 O_3$
$= 3 x_1 \vartheta_2^4 \vartheta_3^3 O_0 (7 \vartheta_2^4 + 4 \vartheta_3^4) + x_2 \vartheta_2^2 \vartheta_3 O_0 (\vartheta_2^8 + 24 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + 8 \vartheta_3^8)$

(12) $(-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2 O_3 \{ t^4 y_0 (O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8)$
$- 20 t^2 y_2 \vartheta_3^4 (O_2^4 + O_3^4) + 120 y_4 \vartheta_3^8 \} = - x_1 60 \vartheta_2^3 \vartheta_3^3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$
$+ x_2 \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_2^8 + 4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 + \vartheta_3^8).$

Diese 12 Formeln, die man ja noch beliebig vermehren kann, wenn man in den Entwicklungen weiter geht, sind eine ergiebige Quelle für Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau')$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$. Combinirt man sie nach und nach mit einander, wie es die Klammern vorn angeben, so erhält man folgende Relationen:

(1, 2, 3) I $\vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2$

(1, 2, 4) II $\dfrac{\vartheta_0^3}{O_0} - \dfrac{\vartheta_2^3}{O_2} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \vartheta_3 O_3$

(1, 3. 4) III $\dfrac{\vartheta_0^3}{O_0} - \dfrac{\vartheta_3^3}{O_3} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \vartheta_2 O_2$

(2, 3, 4) IV $\dfrac{\vartheta_3^3}{O_3} - \dfrac{\vartheta_2^3}{O_2} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} t \vartheta_0 O_0$

(1, 2, 5, 6) V $t^2 O_3^4 - \vartheta_3^4 = 2 \dfrac{\vartheta_0 \vartheta_2}{O_0 O_2} (\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2)$

(1, 3, 5, 7) VI $t^2 O_2^4 - \vartheta_2^4 = 2 \dfrac{\vartheta_0 \vartheta_3}{O_0 O_3} (\vartheta_0^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_0^2)$

(V—VI) VII $t^2 O_0^4 + \vartheta_0^4 = 2 \vartheta_0 O_0 \left(\dfrac{\vartheta_2^3}{O_2} + \dfrac{\vartheta_3^3}{O_3} \right)$

(1, 5, 6, 4) VIII $t^2 O_3^4 - \vartheta_3^4 = 2 \vartheta_2 \vartheta_3 \dfrac{O_3}{O_2} ((-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_2^2 + \vartheta_2^2)$

(1, 5, 7, 4) IX $t^2 O_2^4 - \vartheta_2^4 = 2 \vartheta_2 \vartheta_3 \dfrac{O_2}{O_3} ((-1)^{\frac{t-1}{2}} t O_3^2 + \vartheta_3^2)$

(VIII—IX) X $t^2 O_0^4 - \vartheta_0^4 = 2 \dfrac{\vartheta_2 \vartheta_3}{O_2 O_3} (\vartheta_2^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_2^2)$

(1, 2, 5, 7) XI $t^2 O_2^4 + \vartheta_2^4 = 2 \vartheta_2 O_2 \left(\dfrac{\vartheta_0^3}{O_0} + \dfrac{\vartheta_3^3}{O_3} \right)$

(1, 3, 5, 6) XII $t^2 O_3^4 + \vartheta_3^4 = 2\vartheta_3 O_3\left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right)$

(1, 4, 6, 7) XIII $tO_2O_3\{-(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_3^4 + t\vartheta_3^2O_3^2 - t\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3 + t\vartheta_2^2O_2^2$
$-(-1)^{\frac{t-1}{2}}\vartheta_2^4\} = 3\vartheta_2^3\vartheta_3^3$

(1, 2, 6, 7) XIV $t^2\vartheta_0^3O_0^4O_2O_3 = 3\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_0O_0^2$
$+ \frac{\vartheta_0^4O_0O_2 - \vartheta_0\vartheta_2^3O_0^2}{\vartheta_3}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4 - (-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3)$

(1, 3, 6, 7) XV $t^2\vartheta_0^3O_0^4O_2O_3 = 3\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_0O_0^2$
$+ \frac{\vartheta_0^4O_0O_3 - \vartheta_0\vartheta_3^3O_0^2}{\vartheta_2}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4 - (-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3)$

1, 5, 6, 7) XVI $3\vartheta_0\vartheta_2^2\vartheta_3^2O_0(2t^2O_2^2O_3^2 + 3\vartheta_2^2\vartheta_3^2)$
$= t^2\vartheta_2O_2O_3^4(\vartheta_2^4 + 4\vartheta_3^4) - t^2\vartheta_3O_2^4O_3(4\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$

(1, 4, 5, 8) XVII $(-1)^{\frac{t-1}{2}}tO_2O_3\{t^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$
$= 6\vartheta_2\vartheta_3(t^2O_2^2O_3^2 - \vartheta_2^2\vartheta_3^2)$

(1, 2, 5, 8) XVIII $-(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3O_2O_3(O_2^4 + O_3^4)$
$+6(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_0^3\vartheta_2\frac{O_2^2O_3}{O_0} - 6(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_2^4O_2O_3$
$= 6\vartheta_2^3\vartheta_3^3 - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\left(\frac{\vartheta_0^3O_2}{\vartheta_3O_0} - \frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3}\right)$

(1, 3, 5, 8) XIX $-(-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3O_2O_3(O_2^4 + O_3^4)$
$+6(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_0^3\vartheta_3\frac{O_2O_3^2}{O_0} - 6(-1)^{\frac{t-1}{2}}t\vartheta_3^4O_2O_3$
$= 6\vartheta_2^3\vartheta_3^3 - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\left(\frac{\vartheta_0^3O_3}{\vartheta_2O_0} - \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_2}\right)$

(1, 4, 6, 8) XX $-(-1)^{\frac{t-1}{2}}2t^3O_3^4 + (-1)^{\frac{t-1}{2}}t^3O_2^4$
$= -(-1)^{\frac{t-1}{2}}9t\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3}\frac{O_0}{O_2}\vartheta_3^4 - 6\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3}{O_2O_3}$
$-3t^2\frac{\vartheta_3O_0O_3}{\vartheta_0^3}(2\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + (-1)^{\frac{t-1}{2}}t(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$

(1, 4, 7, 8) XXI $-(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 O_2^4 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 O_3^4$

$$= -(-1)^{\frac{t-1}{2}} 9t \frac{\vartheta_3^3 O_0}{\vartheta_0^3 O_3} \vartheta_2^4 - 6 \frac{\vartheta_2^3 \vartheta_3^3}{O_2 O_3}$$

$$-3t^2 \frac{\vartheta_2 O_0 O_2}{\vartheta_0^3} (\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

(1, 5, 6, 8) XXII $(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2^6 O_3 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3 O_0 O_2^5 O_3$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3 O_0 O_2 O_3^5 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 \vartheta_3^5 O_0 O_2^5 O_3$$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 \vartheta_3^5 O_0 O_2 O_3^5 + 30 \vartheta_0^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 O_2 - 3\vartheta_2^7 \vartheta_3^4 O_0$$

$$+9\vartheta_2^3 \vartheta_3^8 O_0 = (-1)^{\frac{t-1}{2}} 4t^3 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2^2 O_3^5$$

$$+t^2 \vartheta_0^3 O_2 O_3^4 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

(1, 5, 7, 8) XXIII $(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2 O_3^6 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_2 \vartheta_3^4 O_0 O_2 O_3^5$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2t^3 \vartheta_2 \vartheta_3^4 O_0 O_2^5 O_3 + (-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 \vartheta_2^5 O_0 O_2 O_3^5$$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} t^3 \vartheta_2^5 O_0 O_2^5 O_3 + 30 \vartheta_0^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 O_3 - 3\vartheta_2^4 \vartheta_3^7 O_0$$

$$+9\vartheta_2^8 \vartheta_3^3 O_0 = (-1)^{\frac{t-1}{2}} 4t^3 \vartheta_0^3 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2^5 O_3^2$$

$$+t^2 \vartheta_0^3 O_2^4 O_3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

(1, 6, 7, 8) XXIV $3t^3 \vartheta_2 (2\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) O_2^6 O_3 - 3t^3 \vartheta_3 (2\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) O_2 O_3^6$

$$+6t^3 \vartheta_3 (2\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) O_2^5 O_3^2 - 6t^3 \vartheta_2 (\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) O_2^2 O_3^5$$

$$+72(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^4 \vartheta_3^7 O_2 - 72(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^7 \vartheta_3^4 O_3$$

$$+27(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^8 \vartheta_3^3 O_2 - 27(-1)^{\frac{t-1}{2}} \vartheta_2^3 \vartheta_3^8 O_3$$

$$= -3(-1)^{\frac{t-1}{2}} t^2 \vartheta_0^3 O_0^3 O_2 O_3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

Alle diese Formeln gelten für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau')$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, also für den Fall $t = 3$ für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, und für den Fall $t = 1$ für $O_\alpha = \vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau - 8\xi}{3}\right)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$ oder, wenn man hier für $\frac{\tau - 8\xi}{3}$ τ einsetzt, für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau + 8\xi)$. Man erhält mithin auch im letzteren Falle für $\xi = 0$ Relationen zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$.

Specialisirt man jetzt wirklich, so erkennt man unmittelbar, dass von allen so erhaltenen 48 Gleichungen zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$ nur die ersten vier für jeden Fall Gauss'sche Relationen sind, und zwar die, welche Göring §. 3 unter (2) und (3) angiebt, und die Formel $\vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2$, welche letztere man sowohl für $t = 3$ als auch für $t = 1$, $\xi = 0$ aus I erhält. Auch wenn man noch weiter geht und aus den obigen 12 Gleichungen noch weitere Beziehungen aufstellt, so erhält man doch keine Gauss'schen Formeln mehr — für den speciellen Fall $t = 3$ habe ich deren 53 aufgestellt und zwar die einfachsten, von diesen sind aber die letzteren schon ausserordentlich complicirt. —

Somit kann es auf den ersten Blick scheinen, als ob man durch die hier eingeschlagene Methode allerdings auch Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen erhält, aber meist neue und nicht die gewünschten Gauss'schen. Dies ist jedoch nur scheinbar der Fall, denn in Wirklichkeit sind letztere schon sämtlich in den ersten 13 dieser Gleichungen enthalten, und wir erhalten sie zum Teil noch erweitert und ausserdem eine Menge andrer Beziehungen, wenn wir die Gleichungen V—XIII mit Hülfe der ersten 4 und der bekannten sich unmittelbar aus dem Additionstheorem der Thetafunctionen ergebenden Gleichung

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$$

umformen.

Indem ich dies jetzt durchführe, will ich zugleich hinter jeder Formel die entsprechenden Göring'schen citiren, welche für die speciellen Fälle $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ darin enthalten sind; im letzteren Falle muss man natürlich dann immer die Θ und ϑ vertauschen, da den Θ im ersten Falle die ϑ im zweiten Fall entsprechen und umgekehrt; ferner will ich, falls die Formeln nicht unter den von Göring angegebenen enthalten sind, die analogen durch gleiche lateinische Buchstaben mit Indices bezeichnen.

Die Gleichung I giebt sowohl für $t = 3$, als $t = 1$, $\xi = 0$ die von Göring angegebene Relation

$$\vartheta_3 O_3 = \vartheta_0 O_0 + \vartheta_2 O_2,$$

für $\xi = 1$ und 2 giebt sie eine Erweiterung derselben, da O_α dann auch resp. $\vartheta_\alpha(0, 3\tau + 8)$ oder $\vartheta_\alpha(0, 3\tau + 16)$ bezeichnet.

II, III und IV geben für $t = 3$ das Göring'sche Gleichungssystem § 3, (3) und für $t = 1$, $\xi = 0$ das Gleichungssystem (2) mit einer Erweiterung wie bei I. Aus (2) und (3) folgt sofort (4).

V, VI und X liefern uns in der unmittelbar vorliegenden Form das System

$$
\text{(A)}\quad
\begin{aligned}
t^2 O_3^4 - \vartheta_3^4 &= 2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}(\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2)\\
t^2 O_2^4 - \vartheta_2^4 &= 2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}(\vartheta_0^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_0^2)\\
t^2 O_0^4 - \vartheta_0^4 &= 2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_2^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_2^2)
\end{aligned}
$$

ein System, welches uns wie alle folgenden allgemeinen Systeme vier verschiedene Systeme repräsentirt, je nachdem man $t = 3$ oder bei $t = 1$, $\xi = 0$, 1 oder 2 setzt.

Subtrahirt man in Gleichung V auf beiden Seiten $2\vartheta_3^4$ und setzt für ϑ_3^4 rechts den Wert ein, der sich durch Multiplication von I mit III ergiebt, so erhält man die Gleichung

$$t^2 O_3^4 - 3\vartheta_3^4 = 2(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_3 O_3(\vartheta_2 O_2 - \vartheta_0 O_0)$$

Diese Gleichung liefert sowohl für $t = 3$, als auch für $t = 1$, $\xi = 0$ die Gleichung (8), für $\xi = 1$ und $\xi = 2$ wieder eine Erweiterung derselben. Verfährt man in analoger Weise mit VI und VII, so erhält man das Gleichungssystem

$$
\text{(8)}\quad
\begin{aligned}
t^2 O_3^4 - 3\vartheta_3^4 &= 2(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_3 O_3(\vartheta_2 O_2 - \vartheta_0 O_0)\\
t^2 O_2^4 - 3\vartheta_2^4 &= 2(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_2 O_2(\vartheta_0 O_0 + \vartheta_3 O_3)\\
t^2 O_0^4 - 3\vartheta_0^4 &= -2(-1)^{\frac{t-1}{2}} t\vartheta_0 O_0(\vartheta_2 O_2 + \vartheta_3 O_3)
\end{aligned}
$$

Formt man die Gleichungen V, VI und VII durch wiederholte Anwendung der Gleichungen II, III und IV so um, dass sie in Bezug auf die Θ homogen werden, so ergeben sich die Beziehungen

$$
\text{(B)}\quad
\begin{aligned}
\frac{(\vartheta_3^2 O_2^2 - \vartheta_2^2 O_3^2)(\vartheta_0^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_0^2)}{\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2} &= 2\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2\\
\frac{(\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2)(\vartheta_3^2 O_2^2 - \vartheta_2^2 O_3^2)}{\vartheta_0^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_0^2} &= 2\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3\\
\frac{(\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2)(\vartheta_0^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_0^2)}{\vartheta_3^2 O_2^2 - \vartheta_2^2 O_3^2} &= 2\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3
\end{aligned}
$$

Beachtet man nun, dass in diesen drei Gleichungen links nur dieselben drei Klammern auftreten, so folgen multiplicando unmittelbar folgende sehr elegante Relationen

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_3^2 O_0^2 - \vartheta_0^2 O_3^2 = 2\vartheta_2 O_2 \sqrt{\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3}\\
\text{(F)}\quad &\vartheta_2^2 O_3^2 - \vartheta_3^2 O_2^2 = 2\vartheta_0 O_0 \sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3}\\
&\vartheta_0^2 O_2^2 + \vartheta_2^2 O_0^2 = 2\vartheta_3 O_3 \sqrt{\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2}
\end{aligned}
$$

Diese drei Gleichungen sind für $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ identisch mit den Gleichungen (10), für $\xi = 1$ und $\xi = 2$ erweitern sie dieses Gleichungssystem.

Addirt man ferner in den Gleichungen V, VI und VII auf beiden Seiten $4\vartheta_3^4$ und dividirt resp. durch $\vartheta_3 O_3$, $\vartheta_2 O_2$ und $\vartheta_0 O_0$, so erhält man mit Hülfe von II, III und IV

$$
\text{(9)}\quad \frac{t^2 O_3^4 + 3\vartheta_3^4}{\vartheta_3 O_3} = \frac{t^2 O_2^4 + 3\vartheta_2^4}{\vartheta_2 O_2} = \frac{t^2 O_0^4 + 3\vartheta_0^4}{\vartheta_0 O_0} =
$$
$$
6\frac{\vartheta_2^3}{O_2} + 2(-1)^{\frac{t-1}{2}} t(\vartheta_0 O_0 + \vartheta_3 O_3) = \ldots
$$

Auch hier sind wieder die Formeln, die uns die speciellen Fälle $t = 3$ und $t = 1$, $\xi = 0$ liefern, identisch.

VII giebt uns mit XI und XII zusammen in der ursprünglichen Form das System

$$
\begin{aligned}
&t^2 O_3^4 + \vartheta_3^4 = 2\vartheta_3 O_3 \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right)\\
\text{(C)}\quad &t^2 O_2^4 + \vartheta_2^4 = 2\vartheta_2 O_2 \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)\\
&t^2 O_0^4 + \vartheta_0^4 = 2\vartheta_0 O_0 \left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)
\end{aligned}
$$

Ergänzen wir die linken Seiten dieser drei Gleichungen zum Quadrat, so erhalten wir eine Reihe sehr hübscher Relationen, die sich jedoch einfacher gestalten für die speciellen Fälle als für den allgemeinen; z. B. ergiebt sich aus XI die Beziehung

$$
(tO_2^2 \pm \vartheta_2^2)^2 = 2\vartheta_2 O_2 \left\{\frac{\vartheta_0^3}{O_0}\left(1 \pm (-1)^{\frac{t-1}{2}}\right) + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\left(1 \mp (-1)^{\frac{t-1}{2}}\right)\right\}
$$

Es ist nun aber $(-1)^{\frac{t-1}{2}}$ entweder $= +1$ oder $= -1$, in jedem Fall fällt also eins der Glieder rechts fort, welches ist aber im Allgemeinen nicht zu entscheiden; deshalb will ich hier die Formeln für die speciellen Fälle anführen und dabei gleich für den Fall $t = 1$, $\xi = 0$ die ϑ und Θ vertauschen, so dass überall ist $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$.

$$(H)\quad \begin{aligned}
(3O_0^2-\vartheta_0^2)^2 &= 4\vartheta_0 O_0 \frac{\vartheta_3^3}{O_3}; & (3O_0^2+\vartheta_0^2)^2 &= 4\vartheta_0 O_0 \frac{\vartheta_2^3}{O_2} \\
(3O_2^2-\vartheta_2^2)^2 &= 4\vartheta_2 O_2 \frac{\vartheta_0^3}{O_0}; & (3O_2^2+\vartheta_2^2)^2 &= 4\vartheta_2 O_2 \frac{\vartheta_3^3}{O_3} \\
(3O_3^2-\vartheta_3^2)^2 &= 4\vartheta_3 O_3 \frac{\vartheta_0^3}{O_0}; & (3O_3^2+\vartheta_3^2)^2 &= 4\vartheta_3 O_3 \frac{\vartheta_2^3}{O_2} \\
(O_0^2-\vartheta_0^2)^2 &= 4\vartheta_0 O_0 \frac{O_2^3}{\vartheta_2}; & (O_0^2+\vartheta_0^2)^2 &= 4\vartheta_0 O_0 \frac{O_3^3}{\vartheta_3} \\
(O_2^2-\vartheta_2^2)^2 &= 4\vartheta_2 O_2 \frac{O_3^3}{\vartheta_3}; & (O_2^2+\vartheta_2^2)^2 &= 4\vartheta_2 O_2 \frac{O_0^3}{\vartheta_0} \\
(O_3^2-\vartheta_3^2)^2 &= 4\vartheta_3 O_3 \frac{O_2^3}{\vartheta_2}; & (O_3^2+\vartheta_3^2)^2 &= 4\vartheta_3 O_3 \frac{O_0^3}{\vartheta_0}
\end{aligned}$$

Aus diesen Relationen folgen noch unmittelbar einige andere:

$$(7)\quad \begin{aligned}
O_3^2(3O_0^2-\vartheta_0^2) &= \vartheta_3^2(O_0^2+\vartheta_0^2) \\
O_0^2(\vartheta_2^2-3O_2^2) &= \vartheta_0^2(O_2^2+\vartheta_2^2) \\
O_3^2(3O_2^2+\vartheta_2^2) &= \vartheta_3^2(\vartheta_2^2-O_2^2)
\end{aligned}$$

ausserdem noch einige andre, die sich jedoch aus diesen ergeben, wenn man anders zusammenfasst.

Ferner folgt aus (H), wenn man je zwei Gleichungen multiplicirt:

$$(J)\quad \begin{aligned}
9O_0^4-\vartheta_0^4 &= 4\vartheta_0 O_0\sqrt{\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^3}{O_2O_3}}; & \vartheta_0^4-O_0^4 &= -4\vartheta_0 O_0\sqrt{\frac{O_2^3O_3^3}{\vartheta_2\vartheta_3}} \\
9O_2^4-\vartheta_2^4 &= -4\vartheta_2 O_2\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0O_3}}; & \vartheta_2^4-O_2^4 &= 4\vartheta_2 O_2\sqrt{\frac{O_0^3O_3^3}{\vartheta_0\vartheta_3}} \\
9O_3^4-\vartheta_3^4 &= 4\vartheta_3 O_3\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_2^3}{O_0O_2}}; & \vartheta_3^4-O_3^4 &= 4\vartheta_3 O_3\sqrt{\frac{O_0^3O_2^3}{\vartheta_0\vartheta_2}}
\end{aligned}$$

Die gerade nicht sehr eleganten Gleichungen VIII und IX übergehe ich hier: macht man sie aber in Bezug auf die O homogen, so erhalten wir, je nachdem wir dies mit der einen oder den andern der Gleichungen II, III und IV bewerkstelligen, folgende symmetrische Formeln

$$\begin{aligned}
\vartheta_0^4O_3^4-4\vartheta_0^3\vartheta_3O_0^3O_3+6\vartheta_0^2\vartheta_3^2O_0^2O_3^2-4\vartheta_0\vartheta_3^3O_0O_3^3+\vartheta_3^4O_0^4 &= 0 \\
\vartheta_2^4O_3^4-4\vartheta_2^3\vartheta_3O_2^3O_3+6\vartheta_2^2\vartheta_3^2O_2^2O_3^2-4\vartheta_2\vartheta_3^3O_2O_3^3+\vartheta_3^4O_2^4 &= 0 \\
\vartheta_0^4O_2^4-4\vartheta_0^3\vartheta_2O_0^3O_2-6\vartheta_0^2\vartheta_2^2O_0^2O_2^2-4\vartheta_0\vartheta_2^3O_0O_2^3+\vartheta_2^4O_0^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man, wenn man die Glieder in bestimmter Weise zusammenfasst, sowohl das Gleichungssytem (10) als auch das Gleichungssystem (5) herstellen. (10) hatten wir aber schon vorher direct bekommen und ebenso erhalten wir (5) unmittelbar, wenn wir die Gleichungssysteme (2) und (3) mit einander multipliciren. Aus obigen Gleichungen folgt nun aber, dass sie nicht nur für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ gelten, sondern auch für $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau+8)$ und $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 3\tau+16)$. Das Gleichungssystem (5) lautet folgendermassen

$$(5)\quad \begin{gathered} \left(\frac{O_0^3}{\vartheta_0} - \frac{O_3^3}{\vartheta_3}\right)\left(\frac{\vartheta_3^3}{O_3} - \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\right) = 3\vartheta_2^2 O_2^2 \\ \left(\frac{O_3^3}{\vartheta_3} - \frac{O_2^3}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} - \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right) = 3\vartheta_0^2 O_0^2 \\ \left(\frac{O_0^3}{\vartheta_0} - \frac{O_2^3}{\vartheta_2}\right)\left(\frac{\vartheta_2^3}{O_2} - \frac{\vartheta_0^3}{O_0}\right) = 3\vartheta_3^2 O_3^2 \end{gathered}$$

Macht man ferner auch XI und XII homogen, so ergeben sich die Relationen

$$(\mathrm{E})\quad \begin{gathered} \vartheta_3^2 O_2^2(\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2) + \vartheta_2^2 O_3^2(\vartheta_2^2 O_0^2 - \vartheta_0^2 O_2^2) = \\ 2\vartheta_2 O_0 O_2 O_3(\vartheta_3^3 O_3 + \vartheta_3^3 O_0) \\[1em] \vartheta_2^2 O_3^2(\vartheta_3^2 O_0^2 - \vartheta_0^2 O_3^2) + \vartheta_3^2 O_2^2(\vartheta_3^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_3^2) = \\ 2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(\vartheta_0^3 O_2 + \vartheta_2^3 O_0) \end{gathered}$$

Endlich liefert uns noch XIII, wenn wir es homogen machen, die aufgelösten Gleichungen (1) und zwar für $t = 3$ $(1)_1$ und für $t = 1$, $\xi = 0$ $(1)_2$. XIII erhält so die Form:

$$\begin{gathered} \vartheta_2^6 O_0^2 O_3^2 + \vartheta_3^6 O_0^2 O_2^2 + \vartheta_0^6 O_2^2 O_3^2 = \\ 2(\vartheta_2^3\vartheta_3^3 O_0^2 O_2 O_3 + \vartheta_0^3\vartheta_2^3 O_0 O_2 O_3^2 + \vartheta_0^3\vartheta_3^3 O_0 O_2^2 O_3) \end{gathered}$$

Die Gleichungen (1) selbst erhält man hieraus durch folgendes Verfahren:

Für den Fall $t = 3$ kann man die Gleichung auch so schreiben

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3}\right)^2 &= 2\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\left(\frac{\vartheta_0^3}{O_0} + \frac{\vartheta_3^3}{O_3} - \frac{\vartheta_2^3}{O_2}\right) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} \\ &= 2\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\left(\frac{\vartheta_3^3}{O_3} - 3\vartheta_3 O_3\right) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} \quad \text{(nach II)} \\ &= 2\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_3^2 - 3O_3^2) + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} \\ &= \frac{\vartheta_2^6}{O_2^2} - 4\frac{\vartheta_2^3}{O_2}\sqrt{\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3}} + 4\frac{\vartheta_0^3\vartheta_3^3}{O_0 O_3} \quad \text{(nach } \mathrm{H}_3) \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun unmittelbar

$$\frac{\vartheta_0^{\,3}}{O_0} + \frac{\vartheta_3^{\,3}}{O_3} + 2\sqrt{\frac{\vartheta_0^{\,3}\vartheta_3^{\,3}}{O_0 O_3}} = \frac{\vartheta_2^{\,3}}{O_2}$$

oder

$$\sqrt{\frac{\vartheta_0^{\,3}}{O_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,3}}{O_3}} = \sqrt{\frac{\vartheta_2^{\,3}}{O_2}} = (1)_1.$$

Ganz analog ergiebt sich für $t = 1$ $(1)_2$, so dass man erhält

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\sqrt{\frac{\vartheta_0^{\,3}}{O_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,3}}{O_3}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^{\,3}}{O_2}} = 0 \\ &\sqrt{\frac{O_3^{\,3}}{\vartheta_3}} + \sqrt{\frac{O_2^{\,3}}{\vartheta_2}} - \sqrt{\frac{O_0^{\,3}}{\vartheta_0}} = 0 \end{aligned}$$

Mit den Gleichungssystemen (1) (2) und (3) ist nach Vorgang von Göring auch sofort (6) gefunden. Zerlegt man nämlich die Gleichungen (2) und (3) und beachtet die Beziehungen (1), so folgt leicht

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\sqrt{\frac{O_3^{\,3}}{\vartheta_3}} - \sqrt{\frac{O_2^{\,3}}{\vartheta_2}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^{\,3}}{O_0}} = 0 \\ &\sqrt{\frac{O_3^{\,3}}{\vartheta_3}} + \sqrt{\frac{O_0^{\,3}}{\vartheta_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^{\,3}}{O_2}} = 0 \\ &\sqrt{\frac{O_0^{\,3}}{\vartheta_0}} + \sqrt{\frac{O_2^{\,3}}{\vartheta_2}} - \sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,3}}{O_3}} = 0 \\ &\sqrt[3]{\frac{O_3^{\,3}}{\vartheta_3}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^{\,3}}{O_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^{\,3}}{O_2}} = 0 \\ &\sqrt[3]{\frac{O_0^{\,3}}{\vartheta_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2^{\,3}}{O_2}} - \sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,3}}{O_3}} = 0 \\ &\sqrt[3]{\frac{O_2^{\,3}}{\vartheta_2}} + \sqrt{\frac{\vartheta_0^{\,3}}{O_0}} - \sqrt{\frac{\vartheta_3^{\,3}}{O_3}} = 0 \end{aligned}$$

In gleicher Weise könnte man fortfahren und auch die übrigen Gleichungen umformen.

Dieselben werden aber um so complicirter, je weiter man geht, und will ich für jetzt davon abstehen.

Ferner kann man auch noch die Gleichungen, die sich für die speciellen Fälle $t = 3$, und $t = 1$, $\xi = 0$ ergeben, mit einander combiniren, zumal die Gleichungen für $t = 3$ mit Hülfe von II, III und IV für $t = 1$, $\xi = 0$ umformen und umgekehrt.

Tut man dies bei den linken Seiten der Gleichungen F, so erhält man

$$(11)\qquad \begin{aligned} \vartheta_0^2(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - O_2^2O_3^2) &= O_0^2(\vartheta_2^2O_3^2 - \vartheta_3^2O_2^2) \\ O_0^2(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - 9O_2^2O_3^2) &= \vartheta_0^2(\vartheta_2^2O_3^2 - \vartheta_3^2O_2^2) \end{aligned}$$

und noch vier andre Gleichungen, die aber auch direct aus diesen entstehen, wenn man anders zusammenfasst.

Aus diesen Gleichungen und aus (F) folgt noch sofort

$$(G)\qquad \begin{aligned} (\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - O_2^2O_3^2)^2 &= 4\frac{O_0^6}{\vartheta_0^2}\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3 \\ (\vartheta_0^2\vartheta_3^2 - O_0^2O_3^2)^2 &= 4\frac{O_2^6}{\vartheta_2^2}\vartheta_0\vartheta_3O_0O_3 \\ (\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + O_0^2O_2^2)^2 &= 4\frac{O_3^6}{\vartheta_3^2}\vartheta_0\vartheta_2O_0O_2 \\ (\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - 9O_2^2O_3^2)^2 &= 4\frac{\vartheta_0^6}{O_0^2}\vartheta_2\vartheta_3O_2O_3 \\ (\vartheta_0^2\vartheta_3^2 - 9O_0^2O_3^2)^2 &= 4\frac{\vartheta_2^6}{O_2^2}\vartheta_0\vartheta_3O_0O_3 \\ (\vartheta_0^2\vartheta_2^2 + 9O_0^2O_2^2)^2 &= 4\frac{\vartheta_3^6}{O_3^2}\vartheta_0\vartheta_2O_0O_2 \end{aligned}$$

Die meisten Gleichungen, die man so erhält, sind schon unter den früheren als specielle Fälle enthalten, als neue habe ich nur noch gefunden:

$$(D)\qquad \begin{aligned} \frac{3O_3^4 - \vartheta_3^4}{\vartheta_3O_3} &= 2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_2^3 - 3O_0^3O_2}{\vartheta_0O_2} \\ \frac{3O_2^4 - \vartheta_2^4}{\vartheta_2O_2} &= 2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_3^3 - 3O_0^3O_3}{\vartheta_0O_3} \end{aligned}$$

Fassen wir jetzt Alles zusammen, so sehen wir, dass sämmtliche von Göring angegebene Relationen auch auf diesem Wege gefunden sind, und dass dieselben zum grossen Teil in erweitertem Sinne gelten, es bestehen nämlich die Relationen $(1)_2$, (2), (5), (8), (9) und (10) nicht nur zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$, sondern allgemein zwischen $\vartheta_\alpha(0, 3\tau + 8\xi)$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$, wo ξ die Werte 0, 1 und 2 annehmen kann.

Ausser diesen Beziehungen sind aber noch eine ganze Reihe anderer abgeleitet, von denen die meisten auch ganz allgemein gelten wenigstens für den Fall $t = 1$.

Die Formeln, die Göring zwischen $\vartheta_a(0, 3\tau)$, $\vartheta_a(0, \tau)$ und $\vartheta_a\left(0, \frac{\tau}{3}\right)$ angiebt, liegen ausserhalb des Bereiches der hier geführten Betrachtungen, ich wende mich deshalb jetzt sofort zum Fall $n = 5$.

§ 4.

Auch für den Fall $n = 5$ genügt es Zwecks Herstellung der Gauss'schen Formeln eins der Systeme B zu entwickeln. Ich wähle hier wieder das System B_I, dasselbe nimmt für $n = 5$ folgende Gestalt an:

1) $$\vartheta_3{}^5 \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_3{}^5 + x_2\vartheta_3{}^3\vartheta_2{}^2\mathrm{sn}^2(u, k) + x_3\vartheta_3\vartheta_2{}^4\mathrm{sn}^4(u, k)$$

2) $$\frac{O_2}{O_0}\vartheta_0{}^5\mathrm{cn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_2{}^5\mathrm{cn}^5(u, k) + x_2\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^2\mathrm{cn}^3(u, k)\mathrm{dn}^2(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_2\vartheta_3{}^4\mathrm{cn}(u, k)\mathrm{dn}^4(u, k)$$

3) $$\frac{O_3}{O_0}\vartheta_0{}^5\mathrm{dn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_3{}^5\mathrm{dn}^5(u, k) + x_2\vartheta_3{}^3\vartheta_2{}^2\mathrm{dn}^3(u, k)\mathrm{cn}^2(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_3\vartheta_2{}^4\mathrm{dn}(u, k)\mathrm{cn}^4(u, k)$$

4) $$\frac{O_2}{O_3}\vartheta_3{}^5\mathrm{sn}(u', c)\frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0{}^5(v, \tau)} = x_1\vartheta_2{}^5\mathrm{sn}^5(u, k) + x_2\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^2\mathrm{sn}^3(u, k)$$
$$+ x_3\vartheta_2\vartheta_3{}^4\mathrm{sn}(u, k)$$

Schreitet man auch hier bei der Entwicklung bis zur fünften Potenz von u vor, so erhält man folgende 12 Gleichungen:

(1) $y_0 = x_1$

(2) $\vartheta_0{}^5 O_2 y_0 = \vartheta_2{}^5 O_0 x_1 + x_2\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^2 O_0 + x_3\vartheta_2\vartheta_3{}^4 O_0$

(3) $\vartheta_0{}^5 O_3 y_0 = \vartheta_3{}^5 O_0 x_1 + x_2\vartheta_2{}^2\vartheta_3{}^3 O_0 + x_3\vartheta_2{}^4\vartheta_3 O_0$

(4) $t O_2 O_3 y_0 = \vartheta_2\vartheta_3 x_3$

(5) $\vartheta_3{}^2 y_2 = \vartheta_2{}^2 x_2$

(6) $t^2\vartheta_0{}^5 O_2 O_3{}^4 y_0 - 2y_2\vartheta_0{}^5\vartheta_3{}^4 O_2 = 5x_1\vartheta_2{}^5\vartheta_3{}^4 O_0$
$+ x_2\vartheta_2{}^3\vartheta_3{}^2 O_0(2\vartheta_2{}^4 + 3\vartheta_3{}^4) + x_3\vartheta_2\vartheta_3{}^4 O_0(4\vartheta_2{}^4 + \vartheta_3{}^4)$

(7) $t^2\vartheta_0{}^5 O_2{}^4 O_3 y_0 - 2y_2\vartheta_0{}^5\vartheta_3{}^4 O_3 = 5x_1\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^5 O_0$
$+ x_2\vartheta_2{}^2\vartheta_3{}^3 O_0(3\vartheta_2{}^4 + 2\vartheta_3{}^4) + x_3\vartheta_3{}^4\vartheta_3 O_0(\vartheta_2{}^4 + 4\vartheta_3{}^4)$

(8) $t^3 y_0 O_2 O_3 (O_2^4 + O_3^4) - 6 t y_2 \vartheta_3^4 O_2 O_3$
$$= -6 x_2 \vartheta_2^3 \vartheta_3^3 + x_3 \vartheta_2 \vartheta_3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$

(9) $3\vartheta_3^6 y_4 = -x_2 \vartheta_2^2 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) + 3 x_3 \vartheta_2^4 \vartheta_3^2$

(10) $t^4 y_0 \vartheta_0^5 O_2 O_3^4 (4 O_2^4 + O_3^4) - 12 t^2 y_2 \vartheta_0^5 \vartheta_3^4 O_2 O_3^4 + 24 y_4 \vartheta_0^5 \vartheta_3^8 O_2$
$$= x_1 \vartheta_2^5 \vartheta_3^4 O_0 (20\vartheta_2^4 + 65\vartheta_3^4)$$
$$+ x_2 \vartheta_2^3 \vartheta_3^2 O_0 (8\vartheta_2^8 + 56\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 21\vartheta_3^8)$$
$$+ x_3 \vartheta_2 \vartheta_3^4 O_0 (40\vartheta_2^8 + 44\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)$$

(11) $t^4 y_0 \vartheta_0^5 O_2^4 O_3 (O_2^4 + 4 O_3^4) - 12 t^2 y_2 \vartheta_0^5 \vartheta_3^4 O_2^4 O_3 + 24 y_4 \vartheta_0^5 \vartheta_3^8 O_3$
$$= x_1 \vartheta_2^4 \vartheta_3^5 O_0 (65\vartheta_2^4 + 20\vartheta_3^4)$$
$$+ x_2 \vartheta_2^2 \vartheta_3^3 O_0 (21\vartheta_2^8 + 56\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 8\vartheta_3^8)$$
$$+ x_3 \vartheta_2^4 \vartheta_3 O_0 (\vartheta_2^8 + 44\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 40\vartheta_3^8)$$

(12) $t^5 y_0 O_2 O_3 (O_2^8 + 4 O_2^4 O_3^4 + O_3^8) - 20 t^3 y_2 \vartheta_3^4 O_2 O_3 (O_2^4 + O_3^4)$
$$+ 120 t y_4 \vartheta_3^8 O_2 O_3 = 120 x_1 \vartheta_2^5 \vartheta_3^5 - 60 x_2 \vartheta_2^3 \vartheta_3^3 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)$$
$$+ x_3 \vartheta_2 \vartheta_4 (\vartheta_3^8 + 4\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + \vartheta_3^8)$$

Diese 12 Gleichungen enthalten nur die 6 Unbekannten $y_0, y_2, y_4, x_1, x_2, x_3$, ergeben also, wenn man diese eliminirt, eine Menge Relationen zwischen $\vartheta_\alpha(0, \tau')$ und $\vartheta_\alpha(0, \tau)$, wo $\vartheta_\alpha(0, \tau') = O_\alpha$ für $t = 5$ den Wert $\vartheta_\alpha(0, 5\tau)$ hat, dagegen für $t = 1$ die 5 verschiedenen Werte annehmen kann $\vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau - 8\xi}{5}\right)$, $\xi = 0, 1, 2, 3$ und 4. Die elegantesten dieser Relationen sind:

$$(1, 2, 3, 4) \quad \mathrm{I} \quad \vartheta_0\vartheta_3 O_2 - \vartheta_0\vartheta_2 O_3 + \vartheta_2\vartheta_3 O_0 = t O_0 O_2 O_3$$

oder

$$\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3} + \frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3} - \frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2} = t \quad \text{oder}$$

$$(21) \qquad \frac{O_0}{\vartheta_0} + \frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_3}{\vartheta_3} = t\,\frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}$$

Diese Formeln repräsentiren uns für die speciellen Fälle $t = 5$ und $t = 1$ das Göring'sche Gleichungssystem § 4. (21), für den Fall $t = 1$ natürlich wieder eine Erweiterung der Gleichungen $(21)_1$ und $(21)_3$.

Die übrigen Beziehungen, die man durch die Combination der Gleichungen (1), (2), (3), (4) (5), (6), (7) erhält, bieten sich zum Teil zunächst in nicht sehr schöner Form dar; da man sie ausserdem alle bis auf die Formel, die man durch Combination von (4), (5), (6) und (7) bekommt, mit Hülfe von I auf einander reduciren kann, will ich hier nur die elegantsten derselben angeben:



(2, 4, 5, 6) II $$t^2 O_3^4 - 3\vartheta_3^4 = 2\frac{\vartheta_0^5 O_2}{\vartheta_2 O_0} + 2\frac{\vartheta_2^5 O_0}{\vartheta_0 O_2} - 2t\vartheta_3^3 O_3\left(\frac{O_2}{\vartheta_2} + \frac{O_0}{\vartheta_0}\right)$$

(3, 4, 5, 7) III $$t^2 O_2^4 - 3\vartheta_2^4 = 2\frac{\vartheta_0^5 O_3}{\vartheta_3 O_0} - 2\frac{\vartheta_3^5 O_0}{\vartheta_0 O_3} + 2t\vartheta_2^3 O_2\left(\frac{O_0}{\vartheta_0} - \frac{O_3}{\vartheta_3}\right)$$

(II—III) IV $$t^2 O_0^4 - 3\vartheta_0^4 = 2\frac{\vartheta_2^5 O_3}{\vartheta_3 O_2} - 2\frac{\vartheta_3^5 O_2}{\vartheta_2 O_3} + 2t\vartheta_0^3 O_0\left(\frac{O_2}{\vartheta_2} - \frac{O_3}{\vartheta_3}\right)$$

(2, 3, 5, 6) V $$t^2 O_3^4 + \vartheta_3^4$$
$$= 2\vartheta_3^3 O_3\left(\frac{\vartheta_0}{O_0} + \frac{\vartheta_2}{O_2}\right) - 2\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}(\vartheta_0^2 O_0^2 + \vartheta_2^2 O_2^2)$$

(2, 3, 5, 7) VI $$t^2 O_2^4 + \vartheta_2^4$$
$$= 2\vartheta_2^3 O_2\left(\frac{\vartheta_3}{O_3} - \frac{\vartheta_0}{O_0}\right) + 2\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}(\vartheta_3^2 O_3^2 - \vartheta_0^2 O_0^2)$$

(2, 3, 6, 7) VII $$t^2 O_0^4 + \vartheta_0^4$$
$$= 2\vartheta_0^3 O_0\left(\frac{\vartheta_3}{O_3} - \frac{\vartheta_2}{O_2}\right) + 2\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_3^2 O_3^2 - \vartheta_2^2 O_2^2)$$

(4, 5, 6, 7) VIII $$2t^2\vartheta_0^6 O_0^4 O_2 O_3 + 3t^2\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(\vartheta_2^3 O_3^3 - \vartheta_3^3 O_2^3)$$
$$+ 2t^2\vartheta_0 O_0 O_2 O_3(\vartheta_3^5 O_3^3 - \vartheta_2^5 O_2^3) + 2t\vartheta_0 O_0 O_2 O_3$$
$$\times(\vartheta_2^7 O_2 + 4\vartheta_2^3\vartheta_3^4 O_2 - 4\vartheta_2^4\vartheta_3^3 O_3 - \vartheta_3^7 O_3)$$
$$- tO_0^2 O_2 O_3(2\vartheta_2^8 - 9\vartheta_2^4\vartheta_3^4 + 2\vartheta_3^8) = 5\vartheta_2^5\vartheta_3^5 O_0^2.$$

(2, 4, 5, 8) IX $$t\vartheta_3 O_0 O_2 O_3\{t^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$$
$$= 6t^2\vartheta_0^5 O_2 O_3^2 - 6t^2 O_3^2\vartheta_2^3 O_0 O_2^2 O_3^2 + 6\vartheta_3^2(\vartheta_2^5 O_0 - \vartheta_0^5 O_2)$$

(3, 4, 5, 8) X $$t\vartheta_2 O_0 O_2 O_3\{t^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$$
$$= 6t\vartheta_0^5 O_2^2 O_3 - 6t^2\vartheta_3^3 O_0 O_2^2 O_3^2 + 6\vartheta_2^2(\vartheta_3^5 O_0 - \vartheta_0^5 O_3)$$

(2, 3, 5, 8) XI $$t^3 O_0^2 O_2 O_3(O_2^4 + O_3^4)$$
$$= (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_2\vartheta_3 O_0^2 - 5\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_2 + 5\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_3 + 6\vartheta_0^2 O_2 O_3)$$
$$- 6\vartheta_0^2 O_2 O_3(\vartheta_3^2 O_3^2 + \vartheta_2^2 O_2^2)$$

(2, 4, 6, 8) XII $$t\vartheta_0 O_0 O_2 O_3\{t^2(2O_3^4 - O_2^4) - (5\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4)\}$$
$$= -6t^2\vartheta_3^3 O_0^2 O_2 O_3^2 + 6t\vartheta_2^5 O_0^2 O_3 + 6\vartheta_0\vartheta_3(\vartheta_0^5 O_2 - \vartheta_2^5 O_0)$$

(3, 4, 7, 8) XIII $$t\vartheta_0 O_0 O_2 O_3\{t^2(2O_2^4 - O_3^4) - (2\vartheta_2^4 + 5\vartheta_3^4)\}$$
$$= 6t^2\vartheta_2^3 O_0^2 O_2^2 O_3 - 6t\vartheta_3^5 O_0^2 O_2 + 6\vartheta_0\vartheta_2(\vartheta_0^5 O_3 - \vartheta_3^5 O_0)$$

(3, 4, 6, 8) XIV $$t\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_2 O_3\{t^2(2O_3^4 - O_2^4) + (7\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$$
$$= 3t^2 O_0^2 O_2 O_3^2(2\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) - 9t\vartheta_2\vartheta_3^5 O_0^2 O_3$$
$$+ 3t\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_3^2(2\vartheta_2^4 + 3\vartheta_3^4) + 6\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0^5 O_3 - \vartheta_3^5 O_0)$$

(2, 4, 7, 8) XV $$t\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2 O_3\{t^2(2O_2^4 - O_3^4) + (\vartheta_2^4 + 7\vartheta_3^4)\}$$
$$= -3t^2 O_0^2 O_2^2 O_3(\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) + 9t\vartheta_2^5\vartheta_3 O_0^2 O_2$$
$$+ 3t\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_2^2(3\vartheta_2^4 + 2\vartheta_3^4) + 6\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_0^5 O_2 - \vartheta_2^5 O_0)$$

$$\left\{\begin{aligned}
&(4,\,5,\,6,\,8)\quad \text{XVI}\quad 2t^3\vartheta_0{}^5 O_2{}^2 O_3(O_2{}^4-2O_3{}^4)+2t^3\vartheta_2{}^5 O_0 O_2 O_3(O_2{}^4+O_3{}^4)\\
&\qquad +3t^3\vartheta_2\vartheta_3{}^4 O_0 O_2 O_3(O_2{}^4+O_3{}^4)+6t^2\vartheta_3{}^3 O_0 O_2{}^2 O_3{}^2(4\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)\\
&\qquad +6t^2\vartheta_0{}^5\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3{}^4=2t\vartheta_0{}^5 O_2{}^2 O_3(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)\\
&\qquad +t\vartheta_2 O_0 O_2 O_3(2\vartheta_2{}^8-\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+9\vartheta_3{}^8)+30\vartheta_2{}^6\vartheta_3{}^5 O_0\\
&(4,\,5,\,7,\,8)\quad \text{XVII}\quad 2t^3\vartheta_0{}^5 O_2 O_3{}^2(O_3{}^4-2O_2{}^4)+2t^3\vartheta_3{}^5 O_0 O_2 O_3(O_2{}^4+O_3{}^4)\\
&\qquad +3t^3\vartheta_2{}^4\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(O_2{}^4+O_3{}^4)+6t^2\vartheta_2{}^3 O_0 O_2{}^2 O_3{}^2(\vartheta_2{}^4+4\vartheta_3{}^4)\\
&\qquad +6t^2\vartheta_0{}^5\vartheta_2\vartheta_3 O_2{}^4 O_3=2t\vartheta_0{}^5 O_2 O_3{}^2(\vartheta_2{}^4+\vartheta_3{}^4)\\
&\qquad +t\vartheta_3 O_0 O_2 O_3(9\vartheta_2{}^8-\vartheta_2{}^4\vartheta_3{}^4+2\vartheta_3{}^8)+30\vartheta_2{}^5\vartheta_3{}^6 O_0.
\end{aligned}\right.$$

. . . .

Aus diesen Relationen, die zum Teil schon sehr einfach sind, erhält man noch eine Reihe anderer, wenn man sie mit Hülfe der Gleichung I umformt. Macht man durch wiederholte Anwendung von I die Gleichungen II, III und IV homogen in Bezug auf die O, so ergeben sich folgende elegante Beziehungen

$$\text{(A)}\quad\begin{aligned}
(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2&=2\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2(\vartheta_3{}^2 O_3{}^2-\vartheta_0{}^2 O_0{}^2-\vartheta_2{}^2 O_2{}^2)\\
(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2&=2\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3(\vartheta_3{}^2 O_3{}^2-\vartheta_0{}^2 O_0{}^2-\vartheta_2{}^2 O_2{}^2)\\
(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2&=2\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3(\vartheta_3{}^2 O_3{}^2-\vartheta_0{}^2 O_0{}^2-\vartheta_2{}^2 O_2{}^2)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen unmittelbar durch Division je zweier Gleichungen die Formeln

$$\text{(F)}\quad\begin{aligned}
\vartheta_3 O_3(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2&=\vartheta_2 O_2(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2\\
\vartheta_2 O_3(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2&=\vartheta_0 O_0(\vartheta_0 O_3+\vartheta_2 O_0)^2\\
\vartheta_2 O_2(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^2&=\vartheta_0 O_0(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)^2
\end{aligned}$$

und somit nach (A)

$$\text{(G)}\quad 2\vartheta_3{}^2 O_3{}^2-2\vartheta_0{}^2 O_0{}^2-2\vartheta_2{}^2 O_2{}^2=\frac{(\vartheta_3 O_0-\vartheta_0 O_3)^4}{\vartheta_2{}^2 O_2{}^2}=\frac{(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^4}{\vartheta_0{}^2 O_0{}^2}$$
$$=\frac{(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^4}{\vartheta_3{}^2 O_3{}^2}$$

Ergänzt man ferner die linken Seiten der Gleichungen V, VI, VII zum Quadrat, so erhält man folgende sehr schöne Beziehungen:

$$\text{(B)}\quad\begin{aligned}
(\vartheta_3{}^2-tO_3{}^2)^2&=2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}(\vartheta_3{}^2 O_3{}^2-\vartheta_0{}^2 O_0{}^2-\vartheta_2{}^2 O_2{}^2)\\
(\vartheta_2{}^2-tO_2{}^2)^2&=2\,\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}(\vartheta_3{}^2 O_3{}^2-\vartheta_0{}^2 O_0{}^2-\vartheta_2{}^2 O_2{}^2)\\
(\vartheta_0{}^2-tO_0{}^2)^2&=2\,\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}(\vartheta_3{}^2 O_3{}^2-\vartheta_0{}^2 O_0{}^2-\vartheta_2{}^2 O_2{}^2)
\end{aligned}$$

Aus (B) und (G) könnte man nun noch eine Reihe von Beziehungen herleiten, ich verschiebe dies jedoch auf später.

Man hat somit schon eine ganze Reihe zum Teil sehr eleganter Relationen, unter allen diesen befinden sich ausser in I keine von Göring angegebene. Solche erhält man erst, wenn man die speciellen Fälle $t = 5$ und $t = 1$, $\xi = 0$ mit einander combinirt, dann aber ergeben sie sich meist in sehr einfacher Weise, wie folgt:

Ich will zu diesem Zwecke die Formeln, welche sich aus den obigen für $t = 5$ ergeben, mit einem Strich bezeichnen, und die für $t = 1$, $\xi = 0$ mit zweien.

Addirt man I′ und I″, so erhält man, wenn man richtig zusammenfasst, $(17)_2$, subtrahirt man beide Gleichungen, so $(17)_1$; und multiplicirt man I′ mit $\sqrt{5}$ und I″ mit 5, so ergibt sich addendo $(17)_4$ und subtrahendo $(17)_3$:

$$(17)\qquad \begin{aligned}
&(\vartheta_3 - O_3)(\vartheta_0 + O_0)(\vartheta_2 + O_2) = 4 O_0 O_2 O_3 \\
&(\vartheta_3 + O_3)(\vartheta_0 - O_0)(O_2 - \vartheta_2) = 4 O_0 O_2 O_3 \\
&(\sqrt{5}\, O_3 - \vartheta_3)(\sqrt{5}\, O_0 + \vartheta_0)(\sqrt{5}\, O_2 + \vartheta_2) = 4 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3 \\
&(\sqrt{5}\, O_3 + \vartheta_3)(\sqrt{5}\, O_0 - \vartheta_0)(\vartheta_2 - \sqrt{5}\, O_2) = 4 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3
\end{aligned}$$

Mit dem Gleichungssystem (17) hat man auch sofort (16), wenn man je zwei Gleichungen von (17) mit einander multiplicirt.

$$(16)\qquad \begin{aligned}
&(\vartheta_3^2 - O_3^2)(O_0^2 - \vartheta_0^2)(\vartheta_2^2 - O_2^2) = 16 O_0^2 O_2^2 O_3^2 \\
&(\vartheta_3^2 - 5 O_3^2)(\vartheta_0^2 - 5 O_0^2)(\vartheta_2^2 - 5 O_2^2) = 16 \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_3^2
\end{aligned}$$

Multiplicirt man I′ und I″, so folgt

$$(E)\qquad \begin{aligned}
8 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3 O_0 O_2 O_3 = {} & \vartheta_3 O_3 (\vartheta_0 O_2 + \vartheta_2 O_0)^2 - \vartheta_0 O_0 (\vartheta_2 O_3 - \vartheta_3 O_2)^2 \\
& - \vartheta_2 O_2 (\vartheta_0 O_3 - \vartheta_3 O_0)^2
\end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält sämmtliche Formeln (15) in sich. Man kann sie nämlich auch schreiben

$$\begin{aligned}
& \vartheta_0^2 \vartheta_2 O_3^2 O_2 + \vartheta_2 \vartheta_3^2 O_0^2 O_2 + 2 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3 O_0 O_2 O_3 - \vartheta_0 \vartheta_3 O_2 (\vartheta_0 O_2 O_3 - \vartheta_3 O_0 O_2) \\
& \qquad - \vartheta_2 O_0 O_3 (\vartheta_2 \vartheta_3 O_0 - \vartheta_0 \vartheta_2 O_3) = 0
\end{aligned}$$

Ergänzt man die Klammern so, dass man resp. I′ und I″ darauf anwenden kann, so erhält man unmittelbar die Gleichung $(15)_1$, in gleicher Weise erhält man, wenn man die Glieder, in denen die Ausdrücke $\vartheta_2 \vartheta_3 O_0$ und $\vartheta_0 O_2 O_3$ vorkommen, zusammenfasst, $(15)_2$ und ganz analog $(15)_3$:

$$(15)\qquad \begin{aligned}
&\vartheta_0^2 O_3^2 + \vartheta_3^2 O_0^2 + 4 \vartheta_0 \vartheta_3 O_0 O_3 - \vartheta_0^2 \vartheta_3^2 - 5 O_0^2 O_3^2 = 0 \\
&\vartheta_2^2 O_3^2 + \vartheta_3^2 O_2^2 + 4 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2 O_3 - \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 - 5 O_2^2 O_3^2 = 0 \\
&\vartheta_2^2 O_0^2 + \vartheta_0^2 O_2^2 + 4 \vartheta_0 \vartheta_2 O_0 O_2 - \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 - 5 O_0^2 O_2^2 = 0
\end{aligned}$$

Ersetzt man ferner in (E) zwei der Klammern durch Ausdrücke mit der dritten nach (F), so folgt die wichtige Relation

$$8\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3 = (\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^2\,\frac{\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2}{\vartheta_3 O_3}$$

oder nach G

$$\text{(H)}\quad 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3 = \frac{(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)^6}{\vartheta_3^3 O_3^3} = \frac{(\vartheta_3 O_0-\vartheta_0 O_3)^6}{\vartheta_2^3 O_2^3}$$
$$= \frac{(\vartheta_2 O_3-\vartheta_3 O_2)^6}{\vartheta_0^3 O_0^3}.$$

und andrerseits

$$\text{(14)}\quad 2\vartheta_3^2 O_2^2-2\vartheta_0^2 O_0^2-2\vartheta_2^2 O_2^2 = (16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{2}{3}}$$

Multiplicirt man (B)′ mit (B)″, so ergibt sich unmittelbar

$$\text{(8) und (9)}\quad (\vartheta_3^2-O_3^2)(5O_3^2-\vartheta_3^2) = (\vartheta_2^2-O_2^2)(\vartheta_2^2-5O_2^2)$$
$$= (\vartheta_0^2-O_0^2)(\vartheta_0^2-5O_0^2) = 2(\vartheta_3^2 O_3^2-\vartheta_0^2 O_0^2-\vartheta_2^2 O_2^2)$$

Diese Gleichung enthält ferner noch das Gleichungssystem (7), man erhält dieses daraus nur mit Hülfe von der Gleichung

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4+\vartheta_2^4.$$

Es lautet

$$\text{(7)}\quad \begin{aligned}
&(\vartheta_3^2-O_3^2)^2-(\vartheta_0^2-O_0^2)^2 = 4O_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\\
&(\vartheta_3^2-O_3)^2-(\vartheta_2^2-O_2^2)^2 = 4O_0^2(\vartheta_0^2-O_0^2)\\
&(\vartheta_2^2-O_2^2)^2+(\vartheta_0^2-O_0^2)^2 = 4O_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)\\
&(5O_3^2-\vartheta_3^2)^2-(5O_0^2-\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_2^2(5O_2^2-\vartheta_2^2)\\
&(5O_3^2-\vartheta_3^2)^2-(5O_2^2-\vartheta_2^2)^2 = 4\vartheta_0^2(5O_0^2-\vartheta_0^2)\\
&(5O_2^2-\vartheta_2^2)^2+(5O_0^2-\vartheta_0^2)^2 = 4\vartheta_3^2(5O_3^2-\vartheta_3^2)
\end{aligned}$$

Die Gleichungssysteme (8) (9) und (14) liefern uns sofort auch

$$\text{(13)}\quad (\vartheta_2^2-O_2^2)(\vartheta_2^2-5O_2^2) = (\vartheta_0^2-O_0^2)(\vartheta_0^2-5O_0^2)$$
$$= (\vartheta_3^2-O_3^2)(5O_3^2-\vartheta_3^2) = (16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{2}{3}}$$

und ebenso (B) und (14) die beiden Gleichungssysteme

$$\text{(18)}\quad \begin{aligned}
\vartheta_3^2-O_3^2 &= \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{3}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{3}}}}\\
\vartheta_2^2-O_2^2 &= \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{3}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{3}}}}\\
O_0^2-\vartheta_0^2 &= \sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}\,\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{3}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{3}}}}
\end{aligned}$$

und



$$5O_3^2 - \vartheta_3^2 = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{3}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$(19) \quad 5O_0^2 - \vartheta_0^2 = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{3}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\vartheta_2^2 - 5O_2^2 = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{3}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{3}}}$$

Mit den Gleichungen (18) und (19) sind dann aber nach Göring auch die Systeme (20) und (22) unmittelbar gefunden.

Zum Schluss möchte ich noch eine andere Schreibweise der Relationen (21) anführen, welche uns unmittelbar zu einer von Gauss angegebenen, von Göring aber nicht erwähnten Formel führt. Fasst man die Glieder in den Formeln (21) in bestimmter Weise zusammen, so nimmt dieses System die Form an

(L)

$$\vartheta_0(\vartheta_2\vartheta_3 - O_2O_3) = O_0(\vartheta_2O_3 - \vartheta_3O_2); \quad O_0(\vartheta_2\vartheta_3 - 5O_2O_3) = \vartheta_0(\vartheta_2O_3 - \vartheta_3O_2)$$

$$\vartheta_2(\vartheta_0\vartheta_3 - O_0O_3) = O_2(\vartheta_0O_3 - \vartheta_3O_0); \quad O_2(\vartheta_0\vartheta_3 - 5O_0O_3) = \vartheta_2(\vartheta_0O_3 - \vartheta_3O_0)$$

$$\vartheta_3(\vartheta_0\vartheta_2 + O_0O_2) = O_3(\vartheta_0O_2 + \vartheta_2O_0); \quad O_3(\vartheta_0\vartheta_2 + 5O_0O_2) = \vartheta_3(\vartheta_0O_2 + \vartheta_2O_0)$$

und hieraus folgt unmittelbar

$$\vartheta_0^2(\vartheta_2\vartheta_3 - O_2O_3) = O_0^2(\vartheta_2\vartheta_3 - 5O_2O_3)$$

$$(N) \quad \vartheta_2^2(\vartheta_0\vartheta_3 - O_0O_3) = O_2^2(\vartheta_0\vartheta_3 - 5O_0O_3)$$

$$\vartheta_3^2(\vartheta_0\vartheta_2 + O_0O_2) = O_3^2(\vartheta_0\vartheta_2 + 5O_0O_2)$$

Mit Hülfe von (K) liefert uns ferner (L) folgendes Gleichungssystem:

$$(\vartheta_2\vartheta_3 - O_2O_3)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0O_2O_3 \frac{O_0^9}{\vartheta_0^3}$$

$$(O_0O_3 - \vartheta_0\vartheta_3)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0O_2O_3 \frac{O_2^9}{\vartheta_2^3}$$

$$(M) \quad (\vartheta_0\vartheta_2 + O_0O_2)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0O_2O_3 \frac{O_3^9}{\vartheta_3^3}$$

$$(\vartheta_2\vartheta_3 - 5O_2O_3)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0O_2O_3 \frac{\vartheta_0^9}{O_0^3}$$

$$(\vartheta_0\vartheta_3 - 5O_0O_3)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0O_2O_3 \frac{\vartheta_2^9}{O_2^3}$$

$$(\vartheta_0\vartheta_2 + 5O_0O_2)^6 = 16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0O_2O_3 \frac{\vartheta_3^9}{O_3^3}$$

Eine dieser Gleichungen giebt Gauss an (cf. Gauss Werke II 475), jedoch muss dort ein Versehen vorliegen, denn er giebt als Wert von $\vartheta_0\vartheta_2 + O_0 O_2$ den, welchen wir für $\vartheta_0\vartheta_2 + 5 O_0 O_2$ haben.

Es ergeben sich also auch für den Fall $n = 5$ alle von Göring und Gauss angegebenen Formel nach unsrer Methode und ausserdem noch eine ganze Reihe andrer eleganter Beziehungen.

Nach diesen Ausführungen wird es einleuchten, wie lohnend der hier eingeschlagene Weg ist, um Relationen zwischen den transformirten Thetafunctionen aufzustellen, und offenbar erhält man für jeden Wert von n eine ganze Reihe von Beziehungen. Jedoch will ich für jetzt hier abbrechen, indem ich hoffe, dass es mir gelungen ist, die Fruchtbarkeit dieser Methode nach dieser Richtung hin nachzuweisen.

Abschnitt II.

§ 1.

Um die Beziehungen zwischen den Teilwerten der Thetafunctionen und den transformirten Thetafunctionen für das Argument 0 aufzustellen, müssen wir nur noch den drei Gleichungssystemen A eine dritte Form geben. Sucht man die n verschiedenen Wurzeln der rechten Seite, so ergiebt sich unmittelbar, dass man die Gleichung A_4) für den Fall $t = n$ auch so schreiben kann:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(nv, n\tau) = c\vartheta_1(v) \prod_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\vartheta_1^2(v)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right) - \vartheta_\alpha^2(v), \vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\right)$$

wobei

$$c = \frac{x_1}{\prod_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

ist.

Analog erhält man für den Fall $t = 1$

$$\vartheta_1\left(v, \frac{\tau - 8\xi}{n}\right) = c\vartheta_1(v) \prod_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\vartheta_1^2(v)\,\vartheta_\alpha^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right) - \vartheta_\alpha^2(v)\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\right)$$

wobei

$$c = \frac{x_1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_\alpha^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

ist.

Diese Formeln ergeben sich auch als specielle Fälle aus den von Herrn Prof. Königsberger angegebenen (siehe Königsberger, Elliptische Functionen II Pag. 95 oder Transformation der elliptischen Functionen § 24).

Vermehrt man jetzt wieder um halbe Perioden von 1 und τ, so folgen für $t = n$ die drei Gleichungssysteme

$$I''$$

1) $$\vartheta_{\alpha_1}(nv, n\tau) =$$
$$c\vartheta_{\alpha_1}(v,\tau) \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \left(\vartheta_{\alpha_1}{}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right) \mp \vartheta_1{}^2(v,\tau)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\right)$$

2) $$\vartheta_{\alpha_2}(nv, n\tau) =$$
$$c\vartheta_{\alpha_2}(v,\tau) \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \left(\vartheta_{\alpha_2}{}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right) \mp \vartheta_{\alpha_3}{}^2(v,\tau)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\right)$$

3) $$\vartheta_{\alpha_3}(nv, n\tau) =$$
$$c\vartheta_{\alpha_3}(v,\tau) \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \left(\vartheta_{\alpha_3}{}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right) \mp \vartheta_{\alpha_2}{}^2(v,\tau)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\right)$$

4) $$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1(nv, n\tau) =$$
$$c\vartheta_1(v,\tau) \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \left(\vartheta_1{}^2(v,\tau)\vartheta_{\alpha_1}{}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right) - \vartheta_{\alpha_1}{}^2(v,\tau)\vartheta_1{}^2\left(\frac{h}{n},\tau\right)\right)$$

wo die Indices α der Reihe nach wieder dieselben Werte annehmen wie bei A, und wo überall das negative Zeichen gültig ist ausser in den Fällen, wo bei A abwechselndes Zeichen zu nehmen ist, dann muss man hier das positive Zeichen wählen.

Ganz analoge Formeln erhält man für den Fall $t = 1$, nur tritt überall an Stelle von $\frac{h}{n}$ rechts $h\frac{\tau-8\xi}{n}$ und links natürlich an Stelle von $\vartheta_\alpha(nv, n\tau)$, $\vartheta_\alpha\left(v, \frac{\tau-8\xi}{n}\right)$; wir wollen diese Gleichungen hier nicht angeben, sie jedoch mit I''' bezeichnen.

§. 2.

Für die allgemeinen Betrachtungen sowohl wie für die speciellen Fälle wollen wir hier überall von vorne herein die Fälle $t = n$ und $t = 1$ unterscheiden, erstere liefern uns die Beziehungen für die Teilwerte der reellen Periode, und letztere die für die Teilwerte der imaginären Periode.

Bestimmt man zunächst die Coefficienten der Gleichungssysteme A durch die Wurzelwerte der Gleichungen, wie sie sich unmittelbar durch Vergleichung der Gleichungssysteme A und Γ ergeben, so erhält man für den Fall $\underline{t = n}$:

$$x_1 = c \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right) = \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n};$$

also

$$c = \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \frac{1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{r}\right)}$$

$$x_{\frac{n+1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . c \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$x_2 = - c \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{2}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= - \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)} \quad \text{oder}$$

$$= - \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right) \ldots \vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots \vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

$$x_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-3}{2}} c \sum_1^{\frac{n-3}{2}} \vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{2}{n}\right) \ldots \vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots$$

$$\ldots \vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

$$= (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$

$$x_3 = c \sum_{h=1\;k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\;k=\frac{n-1}{2}}{}_{h,k} \vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \sum_{h=1\;k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\;k=\frac{n-1}{2}}{}_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_{h=1\;k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\;k=\frac{n-1}{2}}{}_{h,k} \frac{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots}{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots}$$

$$\frac{\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

wo überall die Summe nach h und k zu nehmen ist, und für jeden Wert von h, k alle ganzzahligen Werte von $h+1$ bis $\frac{n-1}{2}$ durchlaufen muss; dasselbe gilt von den folgenden Ausdrücken

$$x_{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\frac{n-5}{2}} c \sum_{h=1\;k=2}^{h=\frac{n-1}{2}\;k=\frac{n-1}{2}}{}_{h,k} \vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{k-1}{n}\right)\vartheta_\alpha^2\left(\frac{k}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-5}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sum_{k=2}^{k=\frac{n-1}{2}}{}_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{1}{n}\right) \ldots \vartheta_1^2\left(\frac{h-1}{n}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{1}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha^2\left(\frac{h-1}{n}\right) \vartheta_\alpha^2\left(\frac{h+1}{n}\right) \ldots}$$

$$\frac{\ldots \vartheta_1^2\left(\frac{k-1}{n}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{k+1}{n}\right) \ldots \vartheta_1^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}{\ldots \vartheta_\alpha^2\left(\frac{k-1}{n}\right) \vartheta_\alpha^2\left(\frac{k+1}{n}\right) \ldots \vartheta_\alpha^2\left(\frac{n-1}{2n}\right)}$$

$$= (-1)^{\frac{n-5}{2}} \frac{O_\alpha}{\vartheta_\alpha^n} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right)} \sum_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}} \sum_{k=2}^{k=\frac{n-1}{2}}{}_{h,k} \frac{\vartheta_\alpha^2\left(\frac{h}{n}\right) \vartheta_\alpha^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right) \vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für den Fall $t = 1$, nur tritt überall an Stelle von $\frac{l}{n}$ $\frac{l(\tau - 8\xi)}{n}$.

Setzt man nun in diesen Formeln für die Coefficienten x_r die in Abschnitt I. § 2. gefundenen Werte ein, so kann man jede dieser Summen resp. Producte der Teilwerte der Thetafunctionen durch die transformirten Thetafunctionen und jenen die zweiten Ableitungen derselben enthaltenden Ausdruck darstellen. Der Ausdruck für x_1 liefert so nichts Neues, wohl aber alle übrigen von $x_{\frac{n+1}{2}}$ ab. Man erhält so folgende merkwürdigen Relationen zwischen diesen Grössen:

a) durch den Coefficienten $x_{\frac{n+1}{2}}$.

α) für die imaginäre Periode.

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_2 O_3}{\vartheta_2 \vartheta_3}$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_0 O_3}{\vartheta_0 \vartheta_3}$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h \cdot \frac{\tau - 8\xi}{n}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{O_0 O_2}{\vartheta_0 \vartheta_2}$$

Diese drei Gleichungen setzen uns in den Stand, sämmtliche von Herrn Dr. Göring für den allgemeinen Fall abgeleiteten Beziehungen zwischen den Teilwerten der imaginären Periode und den transformirten Thetafunctionen herzustellen, wenn wir nur die Gleichung hinzuziehen

$$2\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(2x,\tau)$$

Auch Herr Dr. Göring hat dieselbe benutzt und giebt sie § 1 (19) an, sie folgt unmittelbar aus der ersten Gleichung der Jacobi'schen Tabelle A (Jacobi's Werke I 507)

$$\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\vartheta_3(v) + \vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\vartheta_2(v) = \vartheta_3(x', y', z', v') + \vartheta_2(x', y', z', v')$$

wenn man $x = x - \frac{1}{2}$, $y = x - \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, $z = x + \frac{\tau}{2}$ und $u = x$ setzt.

Giebt man x der Reihe nach die Werte $\frac{\tau - 8\xi}{n}$, $2\frac{\tau - 8\xi}{n}$, ... $\frac{n-1}{2}\frac{\tau - 8\xi}{n}$ und multiplicirt alle diese Gleichungen, so folgt

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\, \vartheta_0\left(h.\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\, \vartheta_1\left(h.\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\, \vartheta_2\left(h.\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) \times \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\, \vartheta_3\left(h.\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) = (\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\, \vartheta_1\left(2h\frac{\tau - 8\xi}{n}\right)$$

Es ist nun aber, wenn $\frac{n-1}{2}$ eine gerade Zahl bezeichnet,

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\, \vartheta_1\left(2h\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) = \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_h\, \vartheta_1\left(h\frac{\tau - 8\xi}{n}\right) e^{-\frac{\pi i\tau}{n}\frac{(n+1).(n-1)}{8}} e^{2\pi i\xi\frac{(3n+1).(n-1)}{n}}$$

wie sich analog den Göring'schen Betrachtungen für den speciellen Fall $\xi = 0$ § 9 I leicht nachweisen lässt.

Ist dagegen $\frac{n-1}{2}$ eine ungerade Zahl, so erhält der letzte Factor die Form $e^{2\pi i\xi\frac{(3n-1).(3n+1)}{n}}$.

Man müsste demnach im Folgenden zwischen diesen zwei Fällen

unterscheiden, setzt man jedoch jetzt $\frac{\tau - 8\xi}{n} = \tau$, so ergiebt sich sowohl, wenn $\frac{n-1}{2}$ gerade ist, als auch, wenn es ungerade ist,

$$\Pi_h{}_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(2h\tau, n\tau + 8\xi) = \Pi_h{}_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(h\tau, n\tau + 8\xi) e^{-\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{8}}$$

denn der letzte Factor nimmt dann in beiden Fällen die Form $e^{2\pi i m} = 1$ an.

Für den speciellen Wert $\xi = 0$ fällt diese Gleichung mit der Göring'schen § 9 I (5) zusammen.

Setzt man dies in der früheren Gleichung ein, so folgt

$$2^{\frac{n-1}{2}} \Pi_h{}_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) \Pi_h{}_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2(h\tau, n\tau + 8\xi) \Pi_h{}_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_3(h\tau, n\tau + 8\xi) =$$

$$(\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{8}}$$

wo

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau + 8\xi)$$

ist; diese Formel schliesst wieder als speciellen Fall die Göring'sche § 9 I (6) in sich.

Nach den früheren Gleichungen können wir nun aber jedes der in der letzten Gleichung auftretenden Producte durch jedes andere ausdrücken, eliminirt man mithin zwei derselben, so bekommt man einen Ausdruck für das dritte Product und somit auch sofort die entsprechenden Werte der anderen Producte ausgedrückt in Thetafunctionen mit dem Argument 0.

Eliminiren wir z. B. die Producte der Teilwerte ϑ_2 und ϑ_3, so erhalten wir die Relation

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i \tau \frac{(n+1).(n-1)}{24}} \Pi_h{}_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}} \frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

oder

$$e^{\pi i \tau \frac{n+1.n-1}{24}} \Pi_h{}_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0(h\tau, n\tau + 8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_2 \vartheta_3}{O_2 O_3}} \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} \left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wobei

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau), \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau + 8\xi)$$

ist.

Mit dieser Relation sind aber sofort auch die folgenden gefunden:

$$(-1)^{\frac{n-1}{4}} 2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i\tau\frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

oder

$$(-1)^{\frac{n-1}{4}} e^{\pi i\tau\frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(h\tau, n\tau+8\xi) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} \left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = A.$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i\tau\frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

oder

$$e^{\pi i\tau\frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}}\, A.$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} e^{\pi i\tau\frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_3(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

oder

$$e^{\pi i\tau\frac{(n+1).(n-1)}{24}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_3(h\tau, n\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}}\, A.$$

Diese Gleichungen repräsentiren uns für den speciellen Fall $\xi = 0$ genau die Gleichungssysteme von Göring § 9 2. (16) und (17), wenn wir beachten, dass unser $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau+8\xi)$ und $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, und dass $n = \alpha$ bei Göring, dagegen jenes $n = \frac{n-1}{2}$ ist.

β) für die reelle Periode.

Verfährt man in analoger Weise, wie für $t = 1$, für $t = n$, so erhält man unmittelbar die Göring'schen Gleichungen § 9 3. (23) und (24):

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{5}\sqrt{\frac{O_0 O_2 O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

(23)
$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

(23)

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{h}\, \vartheta_2\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{h}\, \vartheta_3\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{n}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

oder, wenn man

$$\left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{n-3}{6}} = B$$

setzt

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{h}\, \vartheta_1\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{n}\, B$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{h}\, \vartheta_0\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}}\, B$$

(24)

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{h}\, \vartheta_2\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}}\, B$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{h}\, \vartheta_3\left(\frac{h}{n}, \tau\right) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}}\, B$$

Combinirt man diese Resultate noch mit denen der imaginären Periode, so ergeben sich ohne weiteres auch die Gleichungen (25) (26) und (27).

Wir haben damit nach unsrer Methode nicht nur sämmtliche Göring'schen Formeln für den allgemeinen Fall, dass n eine ungerade Zahl ist, gefunden, sondern auch noch wenigstens für die imaginäre Periode bedeutende Erweiterungen dieser Resultate.

Unsre Methode reicht jedoch noch viel weiter, wir erhalten völlig neue Relationen, wenn wir nun auch die Ausdrücke für die übrigen Coefficienten vergleichen, und zwar zunächst

b) die für die Coefficienten x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}}$.



α) **Für die imaginäre Periode** ergeben sich so folgende Beziehungen:

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = \frac{1}{2\pi^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left(n\,\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{O_0''}{O_0}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\,\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{O_0''}{O_0}\right) - \left((\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)-(O_2^4+O_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = \frac{1}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left(n\,\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{O_2''}{O_2}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_2^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\,\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{O_2''}{O_2}\right) + \left((\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)-(O_0^4+O_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} = -\frac{1}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left(n\,\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{O_3''}{O_3}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_3^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left\{\frac{3}{\pi^2}\left(n\,\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{O_3''}{O_3}\right) - \left((\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)-(O_0^4-O_2^4)\right)\right\}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die Summen der Producte der Quotienten zu je $\frac{n-3}{2}$, wie sie in den dritten Werten für die Coefficienten x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}}$ enthalten sind. Da man diese jedoch direct aus den obigen erhält, wenn man respective mit $\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_\alpha^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$ oder $\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(h\,\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$ multiplicirt und diese Pro-

ducte rechts nach a) durch die transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrückt, so will ich sie hier nicht noch speciell angeben.

β) In gleicher Weise folgen für die reelle Periode folgende Relationen:

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{n}{2\pi^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$
$$= -\frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)-\left(n^2(O_2^4+O_3^4)-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{n}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left(n\frac{O_2''}{O_2}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$
$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_2''}{O_2}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)+\left(n^2(O_0^4+O_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\right)\right\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{n}{2\pi^2\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left(n\frac{O_3''}{O_3}-\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}$$
$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\left\{\frac{3n}{\pi^2}\left(n\frac{O_3''}{O_3}-\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)-\left(n^2(O_0^4-O_2^4)-(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)\right)\right\}$$

In diesen letzten sechs Gleichungen ist überall $O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$, während in b)α) $O_\alpha = \vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau-8\xi}{n}\right)$ und $\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$ ist.



Diese Formeln finden sich nicht mehr in der Göring'schen Abhandlung, wohl aber gelangt man durch Specialisirung der von Herrn Dr. Herstowski in seiner Inaugural-Dissertation § 3 (6) — (17) aufgestellten Relationen zu ganz ähnlichen, jedoch nicht mit diesen identischen Formeln. Es sind dies die schon von Herrn Prof. Kronecker angegebenen Formeln. — In obigen Gleichungen tritt ausser den Teilwerten der Thetafunctionen und den transformirten Thetafunctionen noch jener die zweiten Ableitungen derselben enthaltende Ausdruck auf. Diesen zu entfernen ist im Allgemeinen nicht möglich, wenigstens nicht auf dem hier eingeschlagenen Wege; für die speciellen Fälle jedoch können wir obige Summen rational durch die transformirten Thetafunctionen allein ausdrücken, da wir dann $t^2 \frac{O_\alpha''}{O_\alpha} - n \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$ durch diese Grössen darstellen können. Z. B. ist

für $n = 3$

$$3 \frac{\vartheta_0''(0, 3\tau)}{\vartheta_0(0, 3\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)} = -2\pi^2 \vartheta_2 \vartheta_3 O_2 O_3 = \dots$$

für $n = 5$

$$5 \frac{\vartheta_0''(0, 5\tau)}{\vartheta_0(0, 5\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)} = \frac{1}{15} \pi^2 \{25(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\} = \dots$$

Können wir nun auch die einzelnen Summen nicht allein durch Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausdrücken, so können wir doch Relationen zwischen diesen Summen aufstellen, in denen ausserdem nur noch Thetafunctionen mit dem Argument 0 auftreten. Ich will mich hier auf die der reellen Periode und auf die der imaginären Periode beschränken, in denen die Teilwerte derselben zwei Thetafunctionen vorkommen, und auf solche zwischen der reellen und imaginären Periode unter einander, für die ein gleiches statt hat. Offenbar kann man auch zwischen allen übrigen Relationen aufstellen, was unmittelbar klar ist, wenn man bedenkt, dass die Gleichungen bestehen

$$\left(n \frac{\vartheta_3''(0, n\tau)}{\vartheta_3(0, n\tau)} - \frac{\vartheta_3''(0, \tau)}{\vartheta_3(0, \tau)}\right) = \left(n \frac{\vartheta_0''(0, n\tau)}{\vartheta_0(0, n\tau)} - \frac{\vartheta_0''(0, \tau)}{\vartheta_0(0, \tau)}\right) - \pi^2(n O_2^4 - \vartheta_2^4), \text{ etc.}$$

Man findet so durch Elimination der zweiten Ableitungen folgende Beziehungen:

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = -\frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\{n^2(O_2^4 + O_3^4) - (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\{n^2(O_0^4+O_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_3^2\left(\frac{h}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\{n^2(O_0^4-O_2^4)-(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)\}$$

wobei

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$$

ist; ferner

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$
$$= \frac{1}{6\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\{(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)-(O_2^4+O_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} - \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$
$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_3^2}\{(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)-(O_0^4+O_3^4)\}$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$
$$= -\frac{1}{6\vartheta_0^2\vartheta_2^2}\{(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)-(O_0^4-O_2^4)\}$$

wo

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau-8\xi}{n}\right), \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau)$$

ist.

Um nun Beziehungen zwischen den Summen der Teilwerte der reellen und imaginären Periode für $\xi = 0$ herzustellen, müssen wir noch in den Gleichungen für die imaginäre Periode statt $\frac{\tau}{n}$ τ einführen; dann nehmen die in denselben auftretenden Ausdrücke die Form an, es wird

$$\vartheta_\alpha\left(h\frac{\tau}{n}, \tau\right) = \vartheta_\alpha(h\tau, n\tau), \quad O_\alpha = \vartheta_\alpha(0, \tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, n\tau)$$

Es ist dann also Θ_α der imaginären Periode gleich, ϑ_α der reellen Periode und ϑ_α der imaginären Periode gleich, Θ_α der reellen. Vertauscht man deshalb in den Ausdrücken der imaginären Periode Θ_α und ϑ_α und eliminirt dann $n\frac{\Theta_\alpha''}{\Theta_\alpha}-\frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$, so erhält man

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2(h\tau, n\tau)}{\vartheta_0^2(h\tau, n\tau)} = -\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3^2}{n\Theta_2^2\Theta_3^2}\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}, \tau\right)} + n\Theta_2^2\Theta_3^2\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_h \frac{\vartheta_0^2(h\tau, n\tau)}{\vartheta_1^2(h\tau, n\tau)}$$

$$= \frac{n-1}{6}\left\{n(\Theta_2^4+\Theta_3^4)+(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\right\}$$

und analog für die andern Summen.

c) Geben wir jetzt noch einen Schritt weiter und untersuchen, welche Relationen sich aus der Vergleichung der Ausdrücke für die Coefficienten x_3 und $x_{\frac{n-3}{2}}$ ergeben, so erhalten wir

α) für die imaginäre Periode.

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_0^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_0''}{\Theta_0}-n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2+\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(\frac{\Theta_0''}{\Theta_0}-n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}(\Theta_2^4\Theta_3^4-n\vartheta_2^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_0^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_0^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_0''}{\Theta_0}-n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2-\frac{(\Theta_2^4+\Theta_3^4)-3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(\frac{\Theta_0''}{\Theta_0}-n\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\left[(\Theta_2^4+\Theta_3^4)-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{120}\left[(\Theta_2^8+4\Theta_2^4\Theta_3^4+\Theta_3^8)-(\vartheta_2^8+(10n-6)\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)\right]\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_0}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2-\frac{\vartheta_0^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}(\Theta_0^4\Theta_3^4-n\vartheta_0^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)^2+\frac{(\Theta_0^4+\Theta_3^4)-3(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(\frac{\Theta_2''}{\Theta_2}-n\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)[(\Theta_0^4+\Theta_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)]$$

$$\left.-\frac{1}{120}[(\Theta_0^8+4\Theta_0^4\Theta_3^4+\Theta_3^8)-(\vartheta_0^8+(10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)]\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_3^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_3''}{\Theta_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2+\frac{\vartheta_0^4-\vartheta_2^4}{6\pi^2}\left(\frac{\Theta_3''}{\Theta_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}(\Theta_0^4\Theta_2^4-n\vartheta_0^4\vartheta_2^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_3^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_3^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_2^4}\left\{\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{\Theta_3''}{\Theta_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)^2-\frac{(\Theta_0^4-\Theta_2^4)-3(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)}{12\pi^2}\left(\frac{\Theta_3''}{\Theta_3}-n\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)[(\Theta_0^4-\Theta_2^4)-(\vartheta_0^4-\vartheta_2^4)]$$

$$\left.-\frac{1}{120}[(\Theta_0^8-4\Theta_0^4\Theta_2^4+\Theta_2^8)-(\vartheta_0^8-(10n-6)\vartheta_0^4\vartheta_2^4+\vartheta_2^8)]\right\}$$

Ganz analoge Formeln ergeben sich für die Summe der Producte zu je $\frac{n-5}{2}$ nach den dritten Ausdrücken für die Coefficienten x_3 und $x_{\frac{n-3}{2}}$,

dieselben unterscheiden sich von den obigen nur durch die Factoren vor den gewundenen Klammern und entstehen aus ihnen einfach durch Multiplication mit $\Pi_h \dfrac{\vartheta_\alpha^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$ resp. $\Pi_h \dfrac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_\alpha^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$.

In allen obigen Gleichungen ist die Summe nach h und k zu nehmen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ und zwar muss k für jeden Wert von h alle Werte von $h+1$ bis $\frac{n-1}{2}$ durchlaufen; ferner bedeutet überall O_α $\vartheta_\alpha\left(0, \frac{\tau-8\xi}{n}\right)$, ϑ_α $\vartheta_\alpha(0, \tau)$.

β) Auch die Beziehungen für die reelle Periode haben eine ganz ähnliche Form, und will ich mich deshalb damit begnügen, die zwei ersten anzugeben:

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_0^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{n^2}{8\pi^4}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2 + n\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{6\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{n}{12}(n^3O_2^4O_3^4-\vartheta_2^4\vartheta_3^4)\right\}$$

$$\Sigma_{h,k} \frac{\vartheta_0^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_0^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{n^2}{8\pi^4}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)^2\right.$$

$$- n\frac{n^2(O_2^4+O_3^4)-3(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(n\frac{O_0''}{O_0}-\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right)$$

$$- \frac{1}{12}(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)[n^2(O_2^4+O_3^4)-(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)]$$

$$\left. - \frac{1}{120}[n^4(O_2^8+4O_2^4O_3^4+O_3^8)-(\vartheta_2^8+(10n-6)\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)]\right\}$$

Diese Formeln oder auch ihnen ähnliche habe ich nirgends gefunden.

Legt man dieselben nun wieder als Ausgangsgleichungen zu

Grunde, so kann man aus ihnen wieder eine Menge Relationen herleiten, welche die Beziehungen zwischen diesen Summen unter sich und zwischen diesen und den früheren Summen angeben.

Diese alle aufzustellen, würde jedoch zu weit führen, und will ich hier nur je eine für die reelle und imaginäre Periode vorführen, um zu zeigen, wie sich dieselben gestalten. Es ist z. B.

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}-\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{k}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(\frac{h}{n}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\left\{n\,\frac{n^2(O_0^4+O_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(n\,\frac{O_2''}{O_0}-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\left[n^2(O_0^4+O_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{120}\left[n^2(O_0^8-6O_0^4O_3^4+O_3^8)-(\vartheta_0^8-6\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)\right]\right\}$$

$$\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}-\Sigma_{h,k}\frac{\vartheta_1^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}{\vartheta_2^2\left(h\frac{\tau-8\xi}{n}\right)\vartheta_2^2\left(k\frac{\tau-8\xi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\vartheta_0^4\vartheta_3^4}\left\{\frac{(O_0^4+O_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)}{12\pi^2}\left(\frac{O_2''}{O_2}-n\,\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\left[(O_0^4+O_3^4)-(\vartheta_0^4+\vartheta_3^4)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{120}\left[(O_0^8-6O_0^4O_3^4+O_3^8)-(\vartheta_0^8-6\vartheta_0^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^8)\right]\right\}$$

Hier treten also schon in diese Beziehungen die zweiten Ableitungen der Thetafunctionen ein. Nimmt man aber noch die früheren Summen hinzu, so kann man dieselben auch hieraus eliminiren und bekommt dann rationale Beziehungen zwischen zweien dieser letzteren Summen, einer der früheren und den transformirten Thetafunctionen mit dem Argument 0. Man kann die zweiten Ableitungen aber auch allein durch eine oder mehrere der früheren Summen eliminiren und so rationale Beziehungen zwischen einer von diesen Summen und einer oder mehreren der früheren herstellen.

In gleicher Weise könnte man nun weiter gehen und die Coefficienten x_4 und $x_{\frac{n-5}{2}}$, x_5 und $x_{\frac{n-7}{2}}$, ... auf zweifache Weise ausdrücken, und würde so zu Summen von Producten zu je 3 oder je

$\frac{n-5}{2}$, zu je 4 oder je $\frac{n-7}{2}$, ... der Quotienten der Teilwerte gelangen immer ausgedrückt durch die Thetafunctionen für die Nullwerte des Arguments und zunächst durch Potenzen von $t^2\frac{O_\alpha''}{O_\alpha}-n\frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}$; da man diese aber stets mit Hülfe der früheren und der gleichartigen Summen eliminiren kann, wird man alle Summen, zu denen man gelangt, rational durch alle gleichartigen und niederen Summen und die transformirten Thetafunctionen ausdrücken können.

Fassen wir schliesslich Alles zusammen, so ergiebt sich:

1) Allgemein kann man nur die Producte der $\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Teilwerte der Thetafunctionen durch die Thetafunctionen selbst mit dem Argument 0 ausdrücken.

2) Rationale Beziehungen zwischen gleichartigen Summen, nur in Thetafunctionen mit dem Argument 0 ausgedrückt, kann man lediglich für die Summen, welche man aus den Coefficienten x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}}$ erhält, aufstellen.

3) Alle höheren Summen kann man durch alle niederen Summen und die Thetafunctionen für das Argument 0 rational darstellen, hierbei können auch Summen gleich hohen Grades auftreten, jedoch nicht ausschliesslich.

§ 3.

Für den **speciellen Fall** $n=3$ erhalten wir die wichtigsten Formeln unmittelbar durch Specialisirung der allgemeinen, und zwar kommt hier nur die erste Reihe der allgemeinen Untersuchungen in Betracht, die sich auf die Coefficienten x_1 und $x_{\frac{n+1}{2}}=x_2$ beziehen.

Specialisirt man so die Formeln § 2. a)$_{\alpha)}$, so folgen die Beziehungen für die imaginäre Periode

$$\sqrt{-1}\,e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\vartheta_1(\tau,3\tau+8\xi)=\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\vartheta_0(\tau,3\tau+8\xi)=\sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

§ 2. $(11)_{1-4}$.

§ 2. $(11)_{1-4}$.

$$e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\vartheta_2(\tau,\ 3\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_0 O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi i\tau}\vartheta_3(\tau,\ 3\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{O_0 O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wobei

$$O_\alpha = \vartheta_\alpha(0,\ 3\tau+8\xi) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha(0,\ \tau)$$

ist. Für $\xi = 0$ sind diese Gleichungen mit den ersten vier Gleichungen Göring § 2. (11) identisch.

In gleicher Weise folgen aus § 2. $a)_{\beta)}$ für $n = 3$.

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{3},\ \tau) = \sqrt{3}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$(11)_{5-8}$

$$\vartheta_0(\tfrac{1}{3},\ \tau) = \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\vartheta_2(\tfrac{1}{3},\ \tau) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\vartheta_3(\tfrac{1}{3},\ \tau) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}}\left(\frac{O_0 O_2 O_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Zu diesen Gleichungen gelangt man für diesen speciellen Fall $n = 3$ auch, wenn man statt der Jacobi'schen Gleichungen Tabelle (A), welche ja bei den allgemeinen Betrachtungen hinzugezogen sind, die der Tabelle (C) zu Hülfe nimmt. Setzt man dort in den Gleichungen 6, 4 und 2 $x = y = \frac{1}{3}$ resp. $= \frac{\tau - 8\xi}{3}$ und eliminirt dann nach den Gleichungen für die Quotienten der Producte der Teilwerte, welche sich in dem Fall $n = 3$ auf Quotienten zweier einfachen Teilwerte reduciren, eine der Grössen $\vartheta_\alpha(\frac{1}{3})$ resp. $\vartheta_\alpha\left(\frac{\tau-8\xi}{3}\right)$, so ergeben sich zunächst die auch nicht ganz unsymmetrischen Formeln:

$$\sqrt{-1}\,e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\vartheta_1(\tau,\ 3\tau) = O_0\,\frac{\vartheta_2^{\frac{1}{6}}\vartheta_3^{\frac{1}{6}}O_2^{\frac{1}{6}}O_3^{\frac{1}{6}}}{(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - O_2^2 O_3^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\vartheta_0(\tau,\ 3\tau) = O_0\,\frac{O_2^{\frac{1}{3}}O_3^{\frac{1}{3}}}{(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - O_2^2 O_3^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\vartheta_2(\tau,\ 3\tau) = \frac{\vartheta_2^{\frac{1}{3}}}{\vartheta_0^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{O_0^{\frac{1}{3}}O_2^{\frac{1}{6}}O_3^{\frac{1}{3}}}{(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - O_2^2 O_3^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$e^{\frac{\pi i\tau}{3}}\vartheta_3(\tau,\ 3\tau) = \frac{\vartheta_3^{\frac{1}{3}}}{\vartheta_0^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{O_0^{\frac{1}{3}}O_2^{\frac{1}{3}}O_3^{\frac{1}{6}}}{(\vartheta_2^2\vartheta_3^2 - O_2^2 O_3^2)^{\frac{1}{4}}}$$

und ähnliche Formeln für die reelle Periode. Mit Hülfe der Gleichungen Abschnitt I. § 3. (G) reduciren sie sich unmittelbar auf die obigen.

Mit dem Gleichungssystem (11) sind nun aber auch sofort die Systeme (8) und (10) gefunden, sie entstehen ja ohne weiteres durch Multiplication der Gleichung für $\vartheta_1(\tau, 3\tau)$ resp. $\vartheta_1(\frac{1}{3}, \tau)$ mit den übrigen Gleichungen derselben Periode; ferner folgt auch unmittelbar (9), denn setzt man in dem Ausdruck für $\vartheta_1(\frac{1}{3}, \tau)$ für τ $\frac{\tau}{3}$, so erhält man

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{3}, \frac{\tau}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

woraus sofort klar ist, dass die Beziehung stattfindet

$$(9)\quad \vartheta_1\left(\frac{1}{3}, \frac{\tau}{3}\right) = i\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi i \tau}{3}}\vartheta_1(\tau, 3\tau).$$

Auch das Gleichungssystem (5) kann man als eine Folgerung des Systems (11) ansehen; denn bildet man $\vartheta_0 . \vartheta_0(\tau, 3\tau) + \vartheta_3 . \vartheta_3(\tau, 3\tau)$ so ergiebt sich nach Göring § 3. $(1)_1$ die Beziehung

$$(5)_1\quad \vartheta_0 . \vartheta_0(\tau, 3\tau) + \vartheta_3 . \vartheta_3(\tau, 3\tau) = \vartheta_2 . \vartheta_2(\tau, 3\tau)$$

und ebenso ergiebt sich nach § 3. $(1)_2$

$$(5)_2\quad O_2 . \vartheta_2(\tfrac{1}{3}) + O_3 . \vartheta_3(\tfrac{1}{3}) = O_0 . \vartheta_0(\tfrac{1}{3})$$

Multiplicirt man ferner Göring § 2. $(5)_1$ mit $\vartheta_1{}^2(\tau, 3\tau)$ und setzt die Werte nach § 2 (8) ein, so kommt

$$(7)\quad \vartheta_0{}^2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3} + \vartheta_3{}^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2} = \vartheta_2{}^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3}$$

und eine analoge Formel erhält man, wenn man § 2. $(5)_2$ mit $\vartheta_1{}^2(\frac{1}{3})$ multiplicirt und nach (10) einsetzt:

$$O_2{}^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3 O_0 O_3} + O_3{}^2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2 O_0 O_2} = O_0{}^2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3}$$

Hiermit sind aber sämmtliche für uns in Betracht kommende Göring'schen Beziehungen für $n = 3$ gefunden.

§ 4.

Für den speciellen Fall $n = 5$ kommen von den allgemeinen Untersuchungen die in Betracht, welche sich auf die Coefficienten $x_{\frac{n+1}{2}} = x_3$, x_2 und $x_{\frac{n-1}{2}} = x_2$ beziehen, und es folgen die ersten der

Göring'schen Formeln wieder einfach durch Specialisirung der allgemeinen und zwar

a) der, welche wir durch $x_{\frac{n+1}{2}} = x_3$ mit Hülfe des Jacobi'schen Gleichungssystemes (A) erhielten. Für den speciellen Fall $n = 5$ hätten wir auch statt dessen die Jacobi'sche Tabelle (B) hinzuziehen können, es ergeben sich auch dann ganz einfache Beziehungen ähnlich denen, welche wir bei $n = 3$ angegeben haben; jedoch da man dieselben auch aus den durch Specialisirung der allgemeinen resultirenden erhalten kann, wenn man sie durch das Gleichungssystem Abschnitt I. § 4. (M) umformt, und da die letzteren noch etwas einfacher sind, will ich mich hier begnügen diese anzugeben. Sie lauten folgendermassen:

α) für die imaginäre Periode:

$$-4e^{\pi i\tau}\vartheta_1(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_1(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{O_0 O_2 O_3}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}}$$

oder

$$= (16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}$$

Göring § 4. (12) und (8), nach (13)

$$= \sqrt{2}\sqrt{\vartheta_3^2 O_3^2 - \vartheta_0^2 O_0^2 - \vartheta_2^2 O_2^2}$$

Göring § 4. (9)

$= \ldots$ nach Abschnitt I. § 4.

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_0(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_0(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}} = O_0^2 - \vartheta_0^2$$

$(18)_2$ und $(3)_2$

$$= \sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}}$$

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_2(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}} = (\vartheta_2^2 - O_2^2)$$

$(18)_3$ und $(3)_3$

$$= \sqrt{\frac{O_0O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}}$$

$$4e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau+8\xi)\vartheta_3(2\tau, 5\tau+8\xi) = \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{5}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{6}}}} = \vartheta_3^2 - O_3^2$$

$(18)_1$ und $(3)_1$

$$= \sqrt{\frac{O_0O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{4}}}$$



β) für die reelle Periode.

$$4\vartheta_1(\tfrac15)\vartheta_1(\tfrac25) = \sqrt5\sqrt{\frac{O_0O_2O_3}{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac32}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac12}}}$$
$$= \sqrt5(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac14}$$
$$= \sqrt5\sqrt{2\vartheta_3^2O_3^2-2\vartheta_0^2O_0^2-2\vartheta_2^2O_2^2} = \ldots$$

$$4\vartheta_0(\tfrac15)\vartheta_0(\tfrac25) = \sqrt{\frac{O_0}{\vartheta_0}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac32}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac12}}} = 5O_0^2-\vartheta_0^2 \qquad \underline{(19)_2} \text{ und } \underline{(5^b)_2}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac14}$$

$$4\vartheta_2(\tfrac15)\vartheta_2(\tfrac25) = \sqrt{\frac{O_2}{\vartheta_2}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac32}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac12}}} = \vartheta_2^2-5O_2^2 \qquad \underline{(19)_3} \text{ und } \underline{(5^b)_3}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac14}$$

$$4\vartheta_3(\tfrac15)\vartheta_3(\tfrac25) = \sqrt{\frac{O_3}{\vartheta_3}\,\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac32}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac12}}} = 5O_3^2-\vartheta_3^2 \qquad \underline{(19)_1} \text{ und } \underline{(5^b)_1}$$
$$= \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3O_0O_2O_3)^{\frac14}$$

Ferner folgen noch unmittelbar durch Vergleichung der reellen und imaginären Periode für $\xi = 0$ unter einander

$$\vartheta_1(\tfrac15)\vartheta_1(\tfrac25) = -\sqrt5\,e^{\pi i\tau}\vartheta_1(\tau, 5\tau)\vartheta_1(2\tau, 5\tau) \qquad \underline{(6)}$$

$$\vartheta_0(\tfrac15)\vartheta_0(\tfrac25) = \frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2O_3}e^{\pi i\tau}(\vartheta_0(\tau, 5\tau)\vartheta_0(2\tau, 5\tau)$$

$$\vartheta_2(\tfrac15)\vartheta_2(\tfrac25) = \frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0O_3}e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau)\vartheta_2(2\tau, 5\tau)$$

$$\vartheta_3(\tfrac15)\vartheta_3(\tfrac25) = \frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau)\vartheta_3(2\tau, 5\tau)$$

Hier bedeutet überall ϑ_α $\vartheta_\alpha(0, \tau)$ und O_α $\vartheta_\alpha(0, 5\tau)$, ebenso oben in β), während in α) O_α allgemein gleich $\vartheta_\alpha(0, 5\tau+8\xi)$ ist.

Ferner folgen aus der Form der obigen Gleichungen, welche Göring unter (3) und (5) angiebt, die zwischen (5^a) und (5^b) angegebenen Formeln:

$$\vartheta_0(\tfrac15, \tau)\vartheta_0(\tfrac25, \tau) = O_0^2+e^{\pi i\tau}\vartheta_0(\tau, 5\tau)\vartheta_0(2\tau, 5\tau)$$
$$-\vartheta_2(\tfrac15, \tau)\vartheta_2(\tfrac25, \tau) = O_2^2-e^{\pi i\tau}\vartheta_2(\tau, 5\tau)\vartheta_2(2\tau, 5\tau)$$
$$\vartheta_3(\tfrac15, \tau)\vartheta_3(\tfrac25, \tau) = O_3^2-e^{\pi i\tau}\vartheta_3(\tau, 5\tau)\vartheta_3(2\tau, 5\tau)$$

Hiermit sind sämmtliche uns interessirenden Formeln, die Göring in § 4. angiebt, auf unserm Wege gefunden.

b) Wir gehen deshalb jetzt dazu über die Formeln zu betrachten, welche sich durch den Coefficienten x_2 ergeben. Diese könnten wir nun auch unmittelbar durch Specialisirung aus den allgemeinen ableiten, und es würden sich jedenfalls die Ausdrücke für $\Sigma\frac{\vartheta_1^2(-1)}{\vartheta_\alpha^2(-1)}$ sehr gut dazu eignen, um analog dem im Folgenden eingeschlagenen Verfahren die einzelnen Teilwerte zu berechnen; ich habe dies jedoch schon ausgeführt, bevor ich die allgemeinen Untersuchungen anstellte, und dabei hauptsächlich die Gleichungen Abschnitt I. § 4. (2) und (3) benutzt, also Gleichungen, welche für den allgemeinen Fall nicht anwendbar sind. Die Resultate müssen ja schliesslich dieselben sein, wenigstens muss man sie mit Hülfe der für $n = 5$ zwischen den transformirten Thetafunctionen aufgestellten Beziehungen auf einander reduciren können. Mein Verfahren war nun folgendes:

α) für die reelle Periode.

Zunächst combinirte ich jene Gleichungen (2) und (3) und eleminirte daraus den Coefficienten x_3 — man könnte allerdings auch eine dieser Gleichungen zu Grunde legen, jedoch bietet die Combination den Vorzug, dass die Resultate dann von vorn herein symmetrischer werden —; hierdurch ergiebt sich zwischen x_2 und x_1 die Relation

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2 O_0 x_2 = x_1\{\vartheta_3^3(\vartheta_0 O_3-\vartheta_3 O_0)-\vartheta_2^3(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)\}$$

oder nach Abschnitt I. § 4. (II)

$$= -x_1(\vartheta_0 O_2+\vartheta_2 O_0)\sqrt{\vartheta_2 O_2}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\right)$$

Setzt man hierin für x_2 und x_1 die Wurzelwerte ein, so folgt

$$\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})+\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})$$
$$= \vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})\frac{\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3 O_2 O_3}}{\vartheta_2^2\vartheta_3^2 O_0}(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\right)$$

oder wenn man für $\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})$ nach a) seinen Wert einsetzt,

$$\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})+\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})=\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\right)$$

Würde man diesen Ausdruck quadriren und $4\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}).\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})$ auf beiden Seiten subtrahiren, so würde man auch für die Differenz $\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5})-\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5})$ einen Wert in transformirten Thetafunctio-

nen erhalten und somit auch einen Ausdruck für die einzelnen Glieder. Diese Differenz erhält man aber noch leichter durch die Gleichung 8. der Jacobi'schen Tabelle (C), wenn man $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ setzt. Man bekommt so unmittelbar

$$\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) - \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}) = \vartheta_0^2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5})$$
$$= \sqrt{5}\,\vartheta_0^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich unmittelbar addendo und substrahendo

$$\left.\begin{array}{l} 2\vartheta_0^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) = \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_0^2(\tfrac{2}{5}) = \end{array}\right\}$$
$$= \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_0}{O_0}} \left\{ \sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}} \pm \sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3 O_0} \right\}$$

oder wenn man die Klammer mit Hülfe der Gleichungssysteme Göring § 4 (18) und (19) umformt

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}\,\frac{\vartheta_0}{O_0}}\, \{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2 - O_3^2) + \vartheta_2^2(\vartheta_2^2 - O_2^2) \pm \sqrt{5}\,\vartheta_0 O_0 (O_0^2 - \vartheta_0^2)\}$$

In gleicher Weise erhält man aus den Gleichungssystemen II. und III.

$$\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}} \left\{ \sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}} \right\}$$
$$\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) - \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{5}\,\vartheta_2^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\vartheta_2^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) = \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2^2(\tfrac{2}{5}) = \end{array}\right\}$$
$$= \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}} \left\{ \sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}} - \sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}} \pm \sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3 O_2} \right\}$$

oder

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}\,\frac{\vartheta_2}{O_2}}\, \{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2 - O_3^2) - \vartheta_0^2(O_0^2 - \vartheta_0^2) \pm \sqrt{5}\,\vartheta_2 O_2 (\vartheta_2^2 - O_2^2)\}$$

und

$$\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}} \right)$$
$$\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) - \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{5}\,\vartheta_3^2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\vartheta_3^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5}) = \\ 2\vartheta_1^2(\tfrac{1}{5})\vartheta_3^2(\tfrac{2}{5}) = \end{array}\right\}$$
$$= \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\vartheta_3}{O_3}} \left\{ \sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}} \pm \sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3 O_3} \right\}$$

$$-\tfrac14\sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0O_2}\frac{\vartheta_3}{O_3}}\;\{\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2)\}$$

Um nun die Werte der einzelnen Teilwerte zu erhalten, ziehen wir die schon im allgemeinen Fall benutzte Gleichung hinzu:

$$2\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(2x,\tau).$$

Giebt man x den Wert $\frac15$ und quadrirt, so folgt eine Gleichung, die man auch so schreiben kann

$$\tfrac12.2\vartheta_0^2(\tfrac15)\vartheta_1^2(\tfrac25).\vartheta_1^2(\tfrac15)\vartheta_1^2(\tfrac25).2\vartheta_2^2(\tfrac15)\vartheta_1^2(\tfrac25).2\vartheta_3^2(\tfrac15)\vartheta_1^2(\tfrac25)=\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_1^{10}(\tfrac25)$$

eine ganz analoge Formel, die hieraus entsteht, wenn man nur die Argumente $\frac15$ und $\frac25$ vertauscht, ergiebt sich, wenn man x den Wert $\frac25$ giebt. Setzt man in diesen Gleichungen links die oben gefundenen Werte ein, so folgt unmittelbar

$$\left.\begin{matrix}\vartheta_1^{10}(\tfrac15)=\\ \vartheta_1^{10}(\tfrac25)=\end{matrix}\right\}=\frac58\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac76}\left(\frac{O_0O_2O_3}{2}\right)^{\frac16}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3O_0}\right)$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\mp\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)$$

oder

$$=\frac{5}{128}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac23}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac43}}\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0^2-\vartheta_0^2)\}$$
$$\times\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-O_2^2)\}$$
$$\times\{\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\mp\sqrt{5}\vartheta_8O_3(\vartheta_3^2-O_3^2)\}$$

Hieraus ergeben sich nun unmittelbar nach den früheren Gleichungen auch die Werte für die übrigen Teilwerte und zwar ist

$$\left.\begin{matrix}2^5\vartheta_0^{10}(\tfrac15)=\\ 2^5\vartheta_0^{10}(\tfrac25)=\end{matrix}\right\}=\tfrac25(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac76}(O_0O_2O_3)^{\frac16}\frac{\vartheta_0^{\frac54}}{O_0^{\frac34}}$$
$$\times\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3O_0}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)}$$
$$=\frac{1}{5.8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{6}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac16}}\frac{\vartheta_0^{\frac52}}{O_0^{\frac52}}$$
$$\times\frac{\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0^2-\vartheta_0^2)\}^4}{(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-O_2^2))\times(\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}.\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2))}$$

$$\left.\begin{array}{l}2^5\vartheta_2^{10}(\frac{1}{5})=\\ 2^5\vartheta_2^{10}(\frac{2}{5})=\end{array}\right\} = \frac{2}{5}(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{4}}(O_0O_2O_3)^{\frac{1}{4}}\frac{\vartheta_2^{\frac{1}{2}}}{O_2^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3\vartheta_0}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)}$$

oder

$$=\frac{1}{5.8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{4}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{4}}}\frac{\vartheta_2^{\frac{1}{2}}}{O_2^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times\frac{\{\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-O_2^2)\}^4}{(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0^2-\vartheta_0^2))\times(\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2))}$$

$$\left.\begin{array}{l}2^5\vartheta_3^{10}(\frac{1}{5})=\\ 2^5\vartheta_3^{10}(\frac{2}{5})=\end{array}\right\} = \frac{2}{5}(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{4}}(O_0O_2O_3)^{\frac{1}{4}}\frac{\vartheta_3^{\frac{1}{2}}}{O_3^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_3^3O_3}\right)^4}{\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2^5}{O_2}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_0^3O_0}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3^5}{O_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^5}{O_0}}\pm\sqrt{5}\sqrt{\vartheta_2^3O_2}\right)}$$

oder

$$=\frac{1}{5.8}\frac{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{11}{4}}}{(4O_0O_2O_3)^{\frac{1}{4}}}\frac{\vartheta_3^{\frac{1}{2}}}{O_3^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times\frac{\{\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_3O_3(\vartheta_3^2-O_3^2)\}^4}{(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)+\vartheta_2^2(\vartheta_2^2-O_2^2)\pm\sqrt{5}\vartheta_0O_0(O_0^2-\vartheta_0^2))\times(\vartheta_3^2(\vartheta_3^2-O_3^2)-\vartheta_0^2(O_0^2-\vartheta_0^2))\pm\sqrt{5}\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-O_2^2))}$$

β) In gleicher Weise ergeben sich für die imaginäre Periode folgende Relationen:

Ich will dieselben hier nur in der letzten Form angeben und zwar folgende Bezeichnungen einführen

$O_3^2(5O_3^2-\vartheta_3^2)-O_2^2(\vartheta_2^2-5O_2^2)\pm\vartheta_0O_0(5O_0^2-\vartheta_0^2)$ resp. $=A'$ od. A''
$O_0^2(5O_0^2-\vartheta_0^2)+O_3^2(5O_3^2-\vartheta_3^2)\pm\vartheta_2O_2(\vartheta_2^2-5O_2^2)$ resp. $=B'$ od. B''
$O_0^2(5O_0^2-\vartheta_0^2)+O_2^2(\vartheta_2^2-5O_2^2)\pm\vartheta_3O_3(5O_3^2-\vartheta_3^2)$ resp. $=C'$ od. C''

wobei für A', B' und C' das obere Zeichen gilt und für A'', B'' und C'' das untere.

Wir erhalten so folgende einfache Gleichungen:

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_0^2(\tau,5\tau)\vartheta_1^2(2\tau,5\tau)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}\frac{O_0}{\vartheta_0}}\,A'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_0{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\overline{O_2 O_3}}{\vartheta_2\vartheta_3}\,\frac{O_0}{\vartheta_0}}\,A''$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_2{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_1{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\overline{O_0 O_3}}{\vartheta_0\vartheta_3}\,\frac{O_2}{\vartheta_2}}\,B'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_2{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\overline{O_0 O_3}}{\vartheta_0\vartheta_3}\,\frac{O_2}{\vartheta_2}}\,B''$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_3{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_1{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\overline{O_0 O_2}}{\vartheta_0\vartheta_2}\,\frac{O_3}{\vartheta_3}}\,C'$$

$$-2e^{2\pi i\tau}\vartheta_1{}^2(\tau, 5\tau)\vartheta_3{}^2(2\tau, 5\tau) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\overline{O_0 O_2}}{\vartheta_0\vartheta_2}\,\frac{O_3}{\vartheta_3}}\,C''$$

ferner

$$e^{8\pi i\tau}\vartheta_1{}^{10}(\tau, 5\tau) = -\frac{1}{128}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{2}{3}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{4}{3}}}\,A''.B''.C''$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_0{}^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_0{}^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_0{}^{\frac{5}{2}}}\,\frac{A'^4}{B'.C'}$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_2{}^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_2{}^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_2{}^{\frac{5}{2}}}\,\frac{B'^4}{A'.C'}$$

$$2^5e^{2\pi i\tau}\vartheta_3{}^{10}(\tau, 5\tau) = \frac{1}{8}\frac{(4O_0O_2O_3)^{\frac{11}{6}}}{(4\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{7}{6}}}\,\frac{O_3{}^{\frac{5}{2}}}{\vartheta_3{}^{\frac{5}{2}}}\,\frac{C'^4}{A'.B'}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für $\vartheta_\alpha(2\tau, 5\tau)$, dieselben unterscheiden sich von diesen nur dadurch, dass, wo hier X' steht dort X'' stehen muss und umgekehrt.

Von allen diesen Beziehungen, welche wir streng nach unserer Methode erhalten haben, findet sich bei Göring keine einzige, und es ist auch das schliessliche Resultat für die einzelnen Teilwerte bei ihm ein anderes als das unsrige. Jedenfalls aber wird man unsere Ausdrücke auf eine der vier von Göring angegebenen verschiedenen Formen reduciren können. Jedoch würde es sehr umständlich sein auf diese Weise aus unsren Gleichungen die Göring'schen abzuleiten; ich versuchte daher, ob ich nicht dadurch, dass ich in den Gleichungssystemen Γ dem Argument x bestimmte Werte beilegte, direct die Bemühungen herleiten könnte, die Göring in § 5 angiebt, jedoch waren alle diese Bemühungen ohne Erfolg; ich fand dabei aber, dass man mit Hülfe der in a) aufgestellten Relationen sehr einfach aus den Formeln der Jacobi'schen Tabelle (C) diese Beziehungen erhält, wie folgt:



Setzt man in der funfzehnten Gleichung der Jacobi'schen Tabelle (C) $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, so nimmt sie die Gestalt an

$$2\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) \,.\, \vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) + \vartheta_1(\tfrac{1}{5})\vartheta_1(\tfrac{2}{5}) \,.\, \vartheta_2(\tfrac{1}{5})\vartheta_2(\tfrac{2}{5})$$

Setzen wir rechts für die Producte $\vartheta_\alpha(\frac{1}{5}) \,.\, \vartheta_\alpha(\frac{2}{5})$ die Werte ein, so ergiebt sich

$$4\vartheta_3(\tfrac{1}{5})\vartheta_0(\tfrac{2}{5}) = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{O_2}}\,(16\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 O_0 O_2 O_3)^{\frac{1}{6}}(\vartheta_2 + \sqrt{5}\,O_2)$$

oder nach Abschnitt I. § 4. (H)

$$(5)_1 \quad = (\sqrt{5}\,O_0 - \vartheta_0)(\sqrt{5}\,O_3 + \vartheta_3)$$

Setzt man $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, so folgt ganz analog

$$(5)_2 \quad 4\vartheta_0(\tfrac{1}{5})\vartheta_3(\tfrac{2}{5}) = (\sqrt{5}\,O_0 + \vartheta_0)(\sqrt{5}\,O_3 - \vartheta_3)$$

In gleicher Weise ergeben sich aus $(C)_{14}$ $(5)_3$ und $(5)_4$ und aus $(C)_{13}$ $(5)_5$ und $(5)_6$.

Setzt man für x und y resp. $\frac{\tau}{5}$ und $\frac{2\tau}{5}$, so erhält man ganz analog die Relationen für die imaginäre Periode § 5. (3).

Nachdem es so gelungen ist auf einem von Göring abweichenden Wege, ohne Hülfe der Schröter'schen Arbeiten, die Gleichungen herzustellen, von denen Göring ausgeht, um die einzelnen Teilwerte allein durch die transformirten Thetafunctionen auszudrücken, können wir im übrigen seinen sehr hübschen Entwicklungen folgen und bekommen so ganz elementar fünf verschiedene Darstellungen für die Teilwerte. Zu diesen kommt nun noch als sechste die, welche wir streng nach unsrer Methode erhalten haben.

Nachdem ich nun nachgewiesen habe, dass auch für die speciellen Fälle $n = 3$ und $n = 5$ unsre Methode nach jeder Richtung hin brauchbar ist, will ich für jetzt die Arbeit hier abschliessen. Offenbar wird sie auch für höhere Fälle $n = 7$ etc. ausreichend sein, da ja immer eine grosse Menge Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen.

XI.

Miscellen.

1.

Zur Polaritätstheorie des Dreiseites.

J sei das Inkreiscentrum des Axendreiecks ABC. AJ treffe BC in J_a. $Q \equiv q_a q_b q_c$ sei ein beliebiger Punkt in der Dreieckebene. AQ treffe BC in Q_a. $Q_b Q_c$ schneide AJ_a in $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}'$ liege zu J_a bezüglich $A\mathfrak{A}$ harmonisch.

Wir finden:

$$\begin{array}{rccc}
Q_b \equiv & q_a & 0 & q_c \\
Q_c \equiv & q_a & q_b & 0 \\
Q_b Q_c \equiv & -\,q_b q_c & q_c q_a & q_a q_b \\
AJ \equiv & 0 & 1 & -1 \\
\mathfrak{A} \equiv & q_a q_b + q_c q_a & q_b q_c & q_b q_c
\end{array}$$

Verbinden wir die Punkte B, C mit A und $\mathfrak{A}$; so trifft die Verbindungsgerade der Schnittpunkte

$$(BA,\quad C\mathfrak{A}),\qquad (B\mathfrak{A},\quad CA)$$

die AJ_a in $\mathfrak{A}'$. Es ist:

$$\begin{array}{rccc}
BA = & 0 & 0 & 1 \\
C\mathfrak{A} \equiv & -\,q_b q_c & q_a q_b + q_c q_a & 0 \\
CA \equiv & 0 & 1 & 0 \\
B\mathfrak{A} \equiv & -\,q_b q_c & 0 & q_a q_b + q_c q_a
\end{array}$$



Somit erhalten wir:

$$(BA,\quad C\mathfrak{A}) \equiv q_a q_b + q_c q_a \qquad q_b q_c \qquad 0$$
$$(B\mathfrak{A},\quad CA) \equiv q_a q_b + q_c q_a \qquad 0 \qquad q_b q_c$$

Die Verbindungsgerade dieser Punkte hat die Form:

$$-q_b q_c \qquad q_a q_b + q_c q_a \qquad q_a q_b + q_c q_a$$

Sie trifft die AJ_a in

$$\mathfrak{A}' \equiv 2q_a q_b + 2q_c q_a \qquad q_b q_c \qquad q_b q_c$$

Die $\mathfrak{A}'$ liegen in einer Geraden, wenn

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2q_a q_b + 2q_c q_a & q_b q_c & q_b q_c \\ q_c q_a & 2q_b q_c + 2q_a q_b & q_c q_a \\ q_a q_b & q_a q_b & 2q_c q_a + 2q_b q_c \end{vmatrix} = 0$$

Man findet:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2q_b q_c + 2q_c q_a + 2q_a q_b & q_b q_c & q_b q_c \\ 2q_b q_c + 2q_c q_a + 2q_a q_b & 2q_b q_c + 2q_a q_b & q_c q_a \\ 2q_b q_c + 2q_c q_a + 2q_a q_b & q_a q_b & 2q_c q_a + 2q_b q_c \end{vmatrix}$$

$$= 2q_b q_c \Sigma q_b q_c \begin{vmatrix} 1 & q_c & q_b \\ 1 & 2q_c + 2q_a & q_a \\ 1 & q_a & 2q_a + 2q_b \end{vmatrix}$$

$$= 2q_b q_c \Sigma q_b q_c \begin{vmatrix} 1 & q_c & q_b \\ 0 & q_c + 2q_a & q_a - q_b \\ 0 & q_a - q_c & 2q_a + q_b \end{vmatrix}$$

$$= 2q_b q_c \Sigma q_b q_c \begin{vmatrix} q_c + 2q_a & q_a - q_q \\ q_a - q_c & 2q_a + q_b \end{vmatrix}$$

$$= 6q_a q_b q_c \Sigma q_b q_c . \Sigma q_a$$

Die Curve

$$x_a x_b x_c \Sigma x_a \Sigma x_b x_c = 0$$

zerfällt in die Geraden

$$x_a = 0, \qquad x_b = 0, \qquad x_c = 0,$$

die Axen des Coordinatensystems,

$$\Sigma x_a = 0,$$

die Harmonikale von J und in den Kegelschnitt

$$\Sigma x_b x_c = 0,$$

die konische Polare von J.

Den Ort der Punkte Q, für welche die $\mathfrak{A}'$ in einer Geraden liegen, bilden also ausser den Dreieckseiten die gerade und konische Polare des Inkreiscentrums.

Durch Projection erhalten wir folgenden allgemeinen Satz:

P, Q seien zwei Punkte in der Ebene des Dreiecks ABC. AP, AQ treffen BC in P_a, Q_a. $Q_b Q_c$ schneide AP_a in $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}'$ liege zu P_a bezüglich $A\mathfrak{A}$ harmonisch. Die $\mathfrak{A}'$ liegen in einer Geraden, wenn Q auf der geraden oder konischen Polare des Punktes P bezüglich des Dreiseites ABC liegt.

Wien, März 1884.

Emil Hain.

2.

Bemerkung zu einer Dreiecksaufgabe.

Der von Herrn Jackwitz im 67. Bande des Archivs, S. 336, behandelten Aufgabe:

> „Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche die Schenkel eines gegebenen gleichschenkeligen Dreiecks so schneidet, dass der obere Abschnitt auf dem einen gleich dem unteren Abschnitt auf dem anderen Schenkel ist“,

lässt sich noch durch folgende Betrachtung eine interessante Seite abgewinnen.

Sieht man zunächst von der Bedingung ab, dass die gesuchte Gerade durch den festen Punkt P gehen soll, und fasst man alle diejenigen Geraden ins Auge, die der anderen Bedingung genügen, so umhüllen dieselben bekanntlich eine Parabel; die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, an diese Parabel von einem gegebenen Punkte die Tangenten zu ziehen.

Es ist nun in der Tat möglich, diese Aufgabe mit Lineal und Zirkel zu lösen, ohne die Parabel selbst zu zeichnen.

Ist (wie a. a. O.) BC die Grundlinie, A die Spitze des gegebenen Dreiecks, und sind wieder D und E die Mitten der gleichen

Schenkel, so gehört DE zu den einhüllenden Geraden und ist die Scheiteltangente der Parabel; die Parabelaxe ist die Höhe AH, ihr Scheitel die Mitte S derselben. Auch AB und AC genügen der gegebenen Bedingung, sind also Tangenten, und HB und HC sind die Ordinaten ihrer Berührungspunkte, weil $SH = SA$; mithin sind B und C selbst Parabelpunkte. Schneidet das in C auf CA errichtete Lot die verlängerte AH in Q, so ist HQ als Subnormale gleich dem Halbparameter, der Brennpunkt ist also der Schnittpunkt der Höhe mit der Mittelsenkrechten DC von AC, d. h. er ist der Mittelpunkt des Umkreises von ABC.

Beachtet man nun, dass jede Tangente der Parabel das vom Brennpunkte auf sie gefällte Lot auf der Scheiteltangente DE trifft, so zeigt sich, dass ein zweiter Punkt Z der gesuchten Tangente derjenige ist, in dem der über PO als Durchmesser beschriebene Kreis die Gerade DE schneidet.

Somit ergiebt sich folgende Construction:

Man verbinde die Mitten D und E der gleichen Seiten des gegebenen Dreiecks, bestimme den Mittelpunkt O des Umkreises und zeichne den Kreis, der PO zum Durchmesser hat. Schneidet DE diesen Kreis in den Punkten Z_1 und Z_2, so lösen die Geraden PZ_1 und PZ_2 die gestellte Aufgabe.

Was die Determination betrifft, so ist die notwendige Bedingung, dass P ausserhalb der Parabel liege. Die Scheitelgleichung derselben ist, wie leicht ersichtlich, $y^2 = \frac{2a^2x}{h}$, wo a die halbe Grundlinie, h die Höhe des Dreiecks bedeutet. Die Coordinaten von P müssen also der Bedingung $y^2 \geqq \frac{2a^2x}{h}$ genügen.

Lässt man als Lösungen der Aufgabe auch die Tangenten gelten, die erst die Verlängerungen der Dreiecksschenkel in der geforderten Weise schneiden, so giebt es bei Erfüllung der angegebenen Ungleichheit, die durch eine einfache Construction zu untersuchen ist, stets zwei Gerade, die im Grenzfall (wo P auf der Parabel liegt, z. B. in S) zu einer einzigen zusammenrücken. Man übersieht ferner leicht, dass man zwei Lösungen im engeren Sinne erhält, wenn P innerhalb des Winkels BAC, zwei Lösungen im weiteren Sinne, wenn P in dem Scheitelwinkel desselben liegt, während jeder Punkt P innerhalb eines der Nebenwinkel zwei Lösungen verschiedener Art liefert.

Die oben gefundene Construction lässt sich übrigens auch ohne Kegelschnittsbetrachtungen begründen; die betreffenden Gedanken unterscheiden sich nur wenig von denen, die zu der von Herrn Jackwitz gegebenen Lösung führen.

Berlin, April 1884.

Heinrich Simon.

XII.

Ueber Projectivität und partielle Differentialgleichungen in der Geometrie.

Von

Th. Sanio.

Das Fundament der Geometrie in ihrem rationellen Aufbau bilden seit Steiner („Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten") die Begriffe der Projectivität der Punktreihen und der Strahlbüschel. Will man diese Begriffe mit Steiner geometrisch definiren, so geschieht das bekanntlich mit Hilfe der auf reiner Anschauung beruhenden Vorstellungen der Perspectivität und Congruenz. (Man verschiebt ein Gebilde, zum Beispiel eine Punktreihe, ohne Veränderung der Form ihres Trägers und der gegenseitigen Lage ihrer Elemente; eine derartige Verschiebung involvirt den Begriff der Congruenz). Die analytische Geometrie ermöglicht eine in gewisser Hinsicht directere Definition der Projectivität.

Seien x und ξ die Abstände zweier entsprechender Punkte P, Π der beiden Punktreihen von zwei bestimmten, übrigens beliebigen Punkten 0, 0′ derselben, welche keineswegs entsprechende Punkte zu sein brauchen, so sind die Punktreihen dann projectivisch, wenn zwischen den Abständen x, ξ eine lineare Relation

$$\xi = \frac{b_1 + b_2 x}{a_1 + a_2 x}$$

besteht.

Drückt man durch Auflösung dieser Gleichung nach x letzteres durch ξ aus, so erhält man für x eine Function von derselben Form;

auch durch Verschiebung der Coordinatenanfangspunkte 0, 0′ auf ihren Trägern wird die allgemeine Form dieser Relation nicht verändert.

Ich will nun sofort zur analytisch-geometrischen Definition der Projectivität geradliniger Strahlbüschel übergehen, da die Projectivität der Strahlbüschel die Basis der folgenden Betrachtungen bilden wird.

Seien 0, 0′ die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, a und a' zwei beliebige Anfangsrichtungen, von welchen aus man die Winkel zählt, und welche keineswegs entsprechende Strahlen zu sein brauchen, p, π aber zwei entsprechende Strahlen. Bezeichnet man nun die trigonometrischen Tangenten der Winkel (ap), $(a'\pi)$ respective durch t und τ, so sind die Strahlbüschel dann perspectivisch, wenn zwischen t und τ eine lineare Relation

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}$$

besteht.

Anmerkung. Hier liesse sich die Theorie der Doppelverhältnisse und ihrer besondern Fälle, also namentlich der harmonischen Teilung, anschliessen. Will man nämlich die Gleichung der Projectivität durch Paare entsprechender Strahlen ausdrücken, so ist aus der Anzahl der Coefficienten klar, dass drei Paare entsprechender Strahlen gegeben sein müssen, um die Coefficienten der Gleichung zu bestimmen. Nennt man die trigonometrischen Tangenten der Winkel welche diese Strahlen mit zwei beliebigen Anfangsrichtungen bilden, respective t_1, t_2, t_3 und τ_1, τ_2, τ_3, und das vierte Paar wieder t, τ, so findet man die Gleichung der Projectivität sofort in der Form:

$$\begin{vmatrix} t\tau, & t, & \tau, & 1 \\ t_1\tau_1, & t_1, & \tau_1, & 1 \\ t_2\tau_2, & t_2, & \tau_2, & 1 \\ t_3\tau_3, & t_3, & \tau_3, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Umformung vermittelst der bekannten Determinantensätze reducirt sich diese Gleichung auf die überraschend einfache Form:

$$\frac{t - t_1}{t_1 - t_3} : \frac{t - t_2}{t_2 - t_3} = \frac{\tau - \tau_1}{\tau_1 - \tau_3} : \frac{\tau - \tau_2}{\tau_2 - \tau_3}.$$

Die Function auf jeder Seite des Gleichheitszeichens ist das sogenannte Doppelverhältniss oder anharmonische Function.

Vier Paare entsprechender Strahlen zweier perspectivischer Strahlbüschel haben also gleiches Doppelverhältniss.

Diese Relation besitzt analog der für Punktreihen geltenden die merkwürdige Eigenschaft, dass bei Veränderung der Anfangsrichtungen a, a', von welchen aus man die Winkel rechnet, die lineare Form bestehen bleibt; es ist dieses, wie man leicht sieht, eine Folge der so überaus einfachen [rationalen und in Beziehung auf jeden der beiden Bestandteile linearen] Form des Additionstheorems der Function tangens, wodurch sich diese vor den Functionen sinus und cosinus auszeichnet; der innere Grund dafür, dass die projectivische Beziehung der Strahlbüschel gerade durch die Function tangens dargestellt wird. Uebrigens kann man sich bei dieser Darstellung an Stelle der Tangente auch einer allgemeinern Function bedienen, welche im Wesentlichen denselben Charakter hat.

Bezieht man die Winkel jedes Strahlbüschels auf eine andere Anfangsrichtung, so ändern sich die Werte der t und τ, und man hat, wenn man die neuen von den alten durch einen Strich unterscheidet:

$$t = \frac{t' - k}{1 + t'k}, \quad t_1 = \frac{t_1' - k}{1 + t_1 k}$$

u. s. w. Die Substitution dieser Werte in die anharmonische Function ergiebt

$$\frac{t - t_1}{t_1 - t_3} : \frac{t - t_2}{t_3 - t_3} = \frac{t' - t_1'}{t_1' - t_3'} : \frac{t' - t_2'}{t_2' - t_3'}$$

Der Wert des Doppelverhältnisses ist demnach unabhängig von der Anfangsrichtung, auf welche man die Winkel bezieht. Errichtet man nun in irgend einem Punkte der Anfangsrichtung auf ihr eine Senkrechte, welche von den Strahlen p, p_1, p_2, p_3 in den Punkten P, P_1, P_2, P_3 geschnitten wird, so ist klar, dass das Doppelverhältniss

$$\frac{t - t_1}{t_1 - t_3} : \frac{t - t_2}{t_2 - t_3} = \frac{PP_1}{P_1P_3} : \frac{PP_2}{P_2P_3}$$

wird. Man hat daher Veranlassung, den rechter Hand stehenden Ausdruck als das Doppelverhältniss der vier Punkte der Transversale zu definiren. Da nach dem Vorigen der Wert dieses Doppelverhältnisses von der Anfangsrichtung a — der Normale der Transversale — unabhängig ist, so ist klar, dass für alle möglichen durch das Strahlbüschel (p, p_1, p_2, p_3) gelegten Transversalen das Doppelverhältniss denselben Wert behält. Damit ist die Grundlage für die Lehre von der Reciprocität der Punktreihen und Strahlbüschel gegeben. — Da bei der allgemeinen Untersuchung des Correlationsbegriffes die harmonischen Verhältnisse wie die sogenannten „metrischen Relationen“ überhaupt, so viel ich sehe, nicht von selbst und ungesucht „in das Gesichtsfeld des Beobachters treten“, so geschieht ihrer in dem Folgenden keine Erwähnung.

Sei BAZ ein beliebiger Winkel z, und man schneide die Schenkel desselben durch eine Gerade BZ, welche mit der Richtung AB einen bestimmten Winkel $\varkappa$ bildet; alsdann ist das Verhältniss $\frac{BZ}{AB}$ eine Function des Winkels z, welche ausserdem nur noch von dem constanten Winkel $\varkappa$ abhängt. Man könnte sie etwa als „schiefe Tangente des Winkels z“ bezeichnen, da sie von der trigonometrischen Tangente sich dadurch unterscheidet, dass der von beiden Verhältnisslinien eingeschlossene Winkel anstatt eines rechten ein schiefer ist.

Bezeichnen wir diese Function für den Augenbick durch $\varphi(z)$, so findet sich leicht

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{\sin\varkappa - \cos\varkappa . \operatorname{tg} z},$$

oder umgekehrt:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin\varkappa . \varphi(z)}{1 + \cos\varkappa . \varphi(z)}.$$

Vermitelst der letztern Formel kann das Additionstheorem der trig. Tangente in das Additionstheorem der Function φ transformirt werden. Man erhält:

$$\varphi(z+u) = \frac{\varphi(z) + \varphi(u) + 2\cos\varkappa . \varphi(z)\,\varphi(u)}{1 - \varphi(z)\,\varphi(u)}$$

Diese Formel hat, da $\varkappa$ constant ist, im Wesentlichen denselben Charakter als diejenige für $\operatorname{tg}(z+u)$.

Man kann nun in der Definitionsgleichung der projectivischen Beziehung zweier Strahlbüschel an Stelle der trigonometrischen Tangenten die Function φ einführen, wobei die beiden den Tangenten der Winkel (ap) und $(a'p)$ entsprechenden Functionen auf zwei verschiedene Parameterwinkel $\varkappa$, $\varkappa_1$ bezogen werden dürfen.

Nach diesen Bemerkungen über die Definition des Begriffs der Projectivität soll nun eine ganz beliebige Correlation zweier Punkte P, Π der Ebene ins Auge gefasst werden. (Ich beschränke mich hier auf die Betrachtung der Correlationen gleichartiger Elemente in der Ebene).

Die Coordinaten der Punkte P, Π seien, auf dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem bezogen, respective x, y und ξ, η.

Eine solche Correlation wird analytisch durch zwei Gleichungen definirt; man denke sich aus diesen ξ und η als Functionen von x und y dargestellt, es sei

$$\xi = f(x, y)$$
$$\eta = g(x, y).$$

Einer unendlich kleinen Verschiebung $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ des Punktes P wird im Allgemeinen eine Verschiebung $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ des Punktes Π von demselben Grade der Kleinheit entsprechen. Vermöge des Zusammenhanges der Grössen ξ, η und x, y wird

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy.$$

Die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel der Elemente ds, $d\sigma$ gegen die Abscissenaxe mögen respective durch t, τ bezeichnet werden, so dass also

$$\frac{dy}{dx} = t, \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \tau$$

gesetzt wird.

Auf diese Weise erhält man durch Division der für $d\xi$, $d\eta$ gegebenen Differentialausdrücke die lineare Relation

$$\tau = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} . t}{\frac{\partial \xi}{dx} + \frac{\partial \xi}{\partial y} . t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

zwischen t und τ.

Denkt man sich t und dem ensprehend τ veränderlich, so entspricht dem in der Anschauung die Drehung des Elements ds um den Punkt P und des entsprechenden Elements $d\sigma$ um den Punkt Π. Dabei beschreiben die Elemente ds, $d\sigma$ zwei projectivische Strahlbüschel.

So führt der Begriff der geometrischen Verwandtschaft (Correlation) in seiner ganzen Allgemeinheit genommen — denn auch für den Raum ergiebt sich ein entsprechendes Resultat — sofort auf die Projectivität der Strahlbüschel, und man würde Veranlassung haben, das durch den Schnitt entsprechender Strahlen der beiden projectivischen Büschel entstehende Gebilde zu untersuchen, wenn solches nicht bereits von den Schöpfern der neuern Geometrie, am Umfassendsten durch den grossen Geometer Steiner, geschehen wäre.

Diese Untersuchung würde sich sehr simpel, dabei ohne grosse Rechnung, durch Benutzung des gewöhnlichen Cartesius'schen rechtwinkligen Coordinatensystems führen lassen, wenn man voraussetzt, dass die einfachsten Eigenschaften der Kegelschnitte als Curven

zweiter Ordnung zuvor durch dieselben Hilfsmittel festgestellt worden sind.

Da die Sätze, um welche es sich handelt, und welche dem Folgenden zur Grundlage dienen, sehr bekannt sind, so wird es genügen, sie hier einfach anzugeben:

1. Die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlbüschel liegen auf einem Kegelschnitt, welcher auch durch die Mittelpunkte der Strahlbüschel hindurchgeht.

2. Wenn die beiden Strahlbüschel einen Strahl gemeinschaftlich haben, welcher in diesem Falle die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ist, so wird die Schnittcurve eine gerade Linie (man sagt: die Strahlbüschel liegen perspectivisch) oder, wie man die Sache auch auffassen darf, ein Linienpaar, indem die Verbindungslinie der Mittelpunkte als die zweite Gerade des Paares anzusehen ist.

Ein dritter Satz, welcher ebenfalls eine allgemeine Eigenschaft der projectivischen Strahlbüschel ausspricht und ebenso, wie die beiden vorigen, zu den Fundamentalsätzen der Steiner'schen Geometrie gehört, folgt aus Formeln, welche das Ergebniss einer Transformation der Gleichung der perjectivischen Beziehung sind; diese Formeln sind für die allgemeine Theorie der Correlationen von Wichtigkeit und müssen daher entwickelt werden.

Zur Abkürzung mag

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = b_1$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = a_2, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = b_2$$

gesetzt werden.

Die Fundamentalformel I. lautet auf diese Weise:

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}.$$

Die Winkel, deren trigonometrische Tangenten t und τ sind, beziehen sich beide auf eine und dieselbe Anfangsrichtung, die Richtung der Abscissenaxe des Coordinatensystems. Da nach dem Frühern durch die Einführung beliebiger anderer Anfangsrichtungen an Stelle dieser die lineare Form der Gleichung sich nicht ändert, so liegt es sehr nahe, durch Einführung passender neuer Anfangsrichtungen die Gleichungen zu vereinfachen, was dem Begriff einer **Coordinatentransformation** entspricht.

Seien resp. k und $\varkappa$ die Tangenten der Winkel, welche die beiden neuen Anfangsrichtungen mit der ursprünglichen, der Richtung der Abscissenaxe bilden, und t', τ' die Tangenten der neuen veränderlichen Winkel, so wird vermöge des Additionstheorems der Function tangens

$$t = \frac{k + t'}{1 - \varkappa\tau'} \qquad \tau = \frac{\varkappa + \tau'}{1 - k\tau'},$$

und die Substitution dieser Ausdrücke liefert die Gleichung der Projectivität in der neuen Form, welche ausserdem nach den Variabeln t' und τ' geordnet werden mag. Dieselbe lautet:

$$\begin{aligned}&[a_2 - ka_1 + \varkappa(b_2 - kb_1)]t'\tau' + [a_1 + ka_2 + \varkappa(b_1 + kb_2)]\tau'\\ &+ [\varkappa(a_2 - ka_1) - (b_2 - kb_1)]t' + \varkappa(a_1 + ka_2) - (b_1 + kb_2) = 0\end{aligned}$$

Man wird sich also die Aufgabe stellen, zwei der Coefficienten dieser Gleichung durch geeignete Verfügung über k und $\varkappa$ zum Verschwinden zu bringen.

Es ist zu erwarten, dass dieses für die Coefficienten von $t'\tau'$ und von t' zugleich, oder für die Coefficienten von $t'\tau'$ und τ' zugleich im Allgemeinen nicht möglich sein wird, ebenso wenig für das constante Glied und einen der Coefficienten von t' und τ', weil in allen diesen Fällen eine der Variabeln t' und τ' von der andern unabhängig werden und in eine Constante degeneriren würde.

Führt man die Rechnung dennoch für einen dieser Fälle durch, etwa für den ersten, setzt also die Coefficienten von $t'\tau'$ und τ' gleich Null, so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}&a_2 - ka_1 + \varkappa(b_2 - kb_1),\\ &a_1 + ka_2 + \varkappa(b_1 + kb_2) = 0\end{aligned}$$

durch Elimination von $\varkappa$ die Gleichung

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(1 + k^2) = 0.$$

Das Nullsetzen des zweiten Factors dieser Gleichung führt zu einer für jede Stelle des Gebiets vorhandenen Lösung, welche aber imaginär ist. Sie lautet:

$$\begin{aligned}&k = i,\\ &\varkappa = -\frac{a_2 - ia_1}{b_2 - ib_1} = -\frac{a_1 + ia_2}{b_1 + ib_2},\end{aligned}$$

worin i die beiden Werte der $\sqrt{-1}$ bezeichnet; erfüllt man aber die Gleichung dadurch, dass man den ersten Factor derselben gleich Null setzt, also festsetzt, dass sich

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

verhalten soll, so setzt man damit eine besondere Eigenschaft der Correlation fest, welche (wie sich nachweisen lässt) keiner allgemein und einer beliebig gegebenen nur an bestimmten Stellen des Gebiets zukommt, nämlich auf einer Curve, welche durch jene Gleichung bestimmt wird. Wir werden nachher auf die Gleichung

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

oder

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

noch durch eine andere Betrachtung geführt werden.

Da die drei andern oben genannten Combinationen im Wesentlichen auf eben dasselbe Resultat (nämlich auf die Gleichung $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$) führen, so bleiben nur noch zwei Combinationen zu untersuchen.

Setzt man den Coefficienten von $t'\tau'$ und das constante Glied gleich Null, also

$$a_2 - ka_1 + \varkappa(b_2 - kb_1) = 0$$
$$\varkappa(a_1 + ka_2) - (b_1 + kb_2) = 0,$$

so erhält man aus diesen Gleichungen, indem man die eine der beiden Unbekannten eliminirt, quadratische Gleichungen für k und $\varkappa$, welche sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\frac{k}{1-k^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2}$$
$$\frac{\varkappa}{1-\varkappa^2} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_1^2}$$

Wir erhalten demnach zwei Werte für k und ebenso für $\varkappa$, und aus der Gestalt der Gleichungen, von welchen wir ausgingen, folgt, dass zu jedem Wert von k einer und nur einer von $\varkappa$ gehört, und umgekehrt.

Setzt man endlich die Coefficienten von t' und τ' gleich Null, also

$$a_1 + ka_2 + \varkappa(b_1 + kb_2) = 0$$
$$\varkappa(a_2 - ka_1) - (b_2 - kb_1) = 0,$$

so folgen hieraus für k und $\varkappa$ genau dieselben quadratischen Gleichungen wie vorher; der Unterschied beider Transformationen kann

also nur in der Verschiedenheit der Zusammenordnung der Werte von k und $\varkappa$ liegen.

Wir wollen diese beiden quadratischen Gleichungen einer genauern Diskussion unterwerfen.

Die Grössen k und $\varkappa$ bezeichnen, wie schon gesagt worden ist, Tangenten der Neigungswinkel der neuen Anfangsrichtungen gegen die Abscissenaxe des Coordinatensystems. Mögen diese Winkel selbst respective durch 0 und ω bezeichnet, also

$$k = \operatorname{tg} o, \quad \varkappa = \operatorname{tg} \omega$$

gesetzt werden.

Nach dem Additionstheorem der Tangente ist

$$\frac{2k}{1-k^2} = \operatorname{tg} 2o, \quad \frac{2k}{1-k^2} = \operatorname{tg} 2\omega.$$

Die beiden mehrerwähnten quadratischen Gleichungen nehmen also die Gestalt an:

$$\operatorname{tg} 2o = \frac{2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}$$

II.

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}$$

Da die Grösse eines Winkels um π vermehrt werden kann, ohne dass dadurch die Tangente ihren Wert ändert, so ist klar, dass die beiden Winkel o, welche den beiden Werten von k entsprechen, um $\frac{\pi}{2}$ verschieden sein werden. Dasselbe gilt von den Winkeln ω, welche den beiden Werten von $\varkappa$ entsprechen.

Die beiden Paare von Anfangsrichtungen, welche die Coordinatentransformation als für die Vereinfachung der Projectivität zweckmässig ergeben hat, bilden also rechte Winkel.

Bezieht man die Gleichung der Projectivität auf diese Anfangsrichtungen, so nimmt sie nach dem Vorigen entweder die Gestalt

$$At'\tau' + D = 0,$$

oder die Gestalt

$$B\tau' + Ct' = 0$$

an, je nach der Wahl der Anfangsrichtungen unter den zulässigen Paaren.

Es ist ziemlich gleichgültig welche dieser beiden Formen man wählt, da sich beide mit gleicher Leichtigkeit anwenden lassen; wünscht man aber, dass die gewählten Anfangsrichtungen zugleich zwei entsprechende Strahlen sein sollen, also $t' = 0$, $\tau' = 0$ entspreche, was eine sehr natürliche Festsetzung ist, so wird dieselbe nur durch die zweite Form erfüllt, welche in so fern einen Vorzug besitzt und daher als die Normalform der Gleichung der Projectivität zweier Strahlbüschel angesehen werden darf.

Seien nun τ', t' irgend zwei entsprechende Werte der Variabeln, so geht aus der Form der Gleichung

$$B\tau' + Ct' = 0$$

sofort hervor, dass $-\tau'$, $-t'$ ebenfalls entsprechende Werte sein müssen.

Wir haben demnach einen dritten Fundamentalsatz der Steinerschen Geometrie, welcher lautet:

Zwei projectivische Strahlbüschel besitzen ein Paar entsprechende rechte Winkel; jedem Paar zu dem einem Schenkel des rechten Winkels — und demnach auch zu dem andern — symmetrisch liegender Strahlen entspricht in dem andern Büschel ein Paar zu den Schenkeln seines rechten Winkels ebenfalls symmetrisch liegender Strahlen.

Dieser Satz in seiner allgemeinen Anwendung auf Correlationen mag hier kurz als „Princip der Winkelsymmetrie", die Schenkel der rechten Winkel als „Symmetrieaxen" bezeichnet werden. Wir sehen in dem Vorstehenden eine besondere Eigenschaft des rechten Winkels, wodurch derselbe sich vor andern Winkeln auszeichnet. Paare entsprechender gleicher Winkel giebt es bei projectivischen Strahlbüscheln unendlich viele, aber nur die Schenkel des Paares entsprechender rechter Winkel besitzen die genannte Symmetrieeigenschaft.

Die Axen der Winkelsymmetrie haben noch eine andere Symmetrieeigenschaft. Wir betrachteten bisher nur die Richtungen entsprechender Elemente ds, $d\sigma$; jetzt soll auch das Verhältniss ihrer (unendlich kleinen) Längen ins Auge gefasst werden.

Die Gleichung

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

ist, wenn man $d\sigma$ constant sein lässt, die Gleichung eines um Π als Mittelpunkt mit ds als Radius beschriebenen Kreises. Die ent-

sprechende Curve des andern Gebiets erhält man dadurch, dass man in dieser Gleichung vermittelst der Formeln

$$d\xi = a_1\,dx + a_2\,dy, \quad d\eta = b_1\,dx + b_2\,dy$$

die Incremente $d\xi$, $d\eta$ durch die Incremente dx, dy ersetzt.

So wird:

$$d\sigma^2 = (a_1{}^2 + b_1{}^2)\,dx^2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)\,dx\,dy + (a_2{}^2 + b_2{}^2)\,dy^2.$$

Das ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt P ist. [Man kann leicht nachweisen, dass die rechte Seite der Gleichung eine positive Form ist].

Transformirt man dieselbe auf die Hauptaxen, indem man

$$dx = u\cos o - v\sin o$$
$$dy = u\sin o + v\cos o$$

setzt und o so bestimmt, dass in der neuen Gleichung der Coefficient von uv verschwindet, so erhält man:

$$\operatorname{tg} 2o = \frac{2(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_1{}^2 + b_1{}^2 - a_2{}^2 - b_2{}^2},$$

also dieselbe Formel, welche vorhin für die Winkel-Symmetrieaxen des Punktes P gefunden wurde.

Da für das andere Gebiet das Entsprechende gilt, so hat man den merkwürdigen der Differentialgeometrie angehörigen Satz:

Wenn man das Element $d\sigma$ um Π als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben lässt, so beschreibt das Element ds um P als Mittelpunkt im Allgemeinen eine Ellipse, deren Hauptaxen mit den Symmetrieaxen der projectivischen Beziehung zusammenfallen; das Gleiche gilt in dem andern Gebiet.

Eine besonders merkwürdige Gruppe der Correlationen wird durch diejenigen gebildet, welchen die Eigenschaft der Conformität oder der Aehnlichkeit in den kleinsten Teilen zukommt.

Die Bedingungsgleichungen der Conformität ergeben sich ungezwungen aus den zur Bestimmung der Symmetrieaxen dienenden Formeln, wenn man den Fall in Betrachtung zieht, in welchem dieselben unbestimmt werden.

Setzt man den Zähler und Nenner der Formel

$$\operatorname{tg} 2o = \frac{2(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_1{}^2 + b_1{}^2 - a_2{}^2 - b_2{}^2}$$

gleich Null, so folgt aus diesen Gleichungen, wenn man sie in der Form

$$a_1^3 - a_2^2 = -b_1^2 + b_2^2$$

$$2a_1 a_2 = -2b_1 b_2$$

aufschreibt, alsdann ins Quadrat erhebt und addirt, dass

$$(a_1^2 + a_2^2)^2 = (b_1^2 + b_2^2)^2$$

sein muss, also, wenn man nur reelle Werte der Variabelen zulässt

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2.$$

Die Combination dieser Gleichung mit der frühern

$$a_1^2 - a_2^2 = -b_1^2 + b_2^2$$

ergiebt:

$$a_1^2 = b_2^2, \quad a_2^2 = b_1^2.$$

Hieraus folgt mit Berücksichtigung der Bedingung

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0,$$

dass

$$a_1 = \varepsilon b_2, \quad a_2 = -\varepsilon b_1$$

sein muss, wenn ε die positive oder negative Einheit bezeichnet, welches die bekannten Bedingungen der Conformität sind. Man sieht, dass, wenn sie erfüllt sind, auch die andere Formel:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2}$$

den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ erhält, wie es sein muss.

Je nachdem man $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ nimmt, erhält man zwei Arten der Conformität, deren charakteristischer Unterschied durch die Benutzung zweier Formeln gefunden werden kann, welche aus denen für $\operatorname{tg} 2o$ und $\operatorname{tg} 2\omega$ folgen und hier nur angegeben werden mögen. Man findet:

$$\operatorname{tg}(2\omega - 2o) = \frac{2(a_1 + b_2)(b_1 - a_2)}{(a_1 + b_2)^2 - (b_1 - a_2)^2}$$

$$\operatorname{tg}(2\omega + 2o) = \frac{2(a_1 - b_2)(b_1 + a_2)}{(a_1 - b_2)^2 - (b_1 + a_2)^2}.$$

Setzt man hierin

$$a_1 = b_2, \quad a_2 = -b_1,$$

so folgt

$$\operatorname{tg}(2\omega - 2o) = \text{Const},$$

$$\operatorname{tg}(2\omega + 2o) = \frac{0}{0},$$

woraus man leicht schliesst, dass die congruenten Strahlbüschel in *gleichem* Drehungssinne durchlaufen werden; setzt man aber

$$a_1 = -b_2, \quad a_2 = b_1,$$

so folgt:

$$\operatorname{tg}(2\omega - 2o) = \infty,$$
$$\operatorname{tg}(2\omega + 2o) = \text{Const},$$

woraus hervorgeht, dass in diesem Falle die congruenten Strahlbüschel in entgegengesetztem Drehungssinne durchlaufen werden.

Die Eigenschaft der Conformität im Allgemeinen kommt, wie gesagt, nur einer bestimmten Classe von Correlationen zu, welche durch die simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

charakterisirt wird; man darf aber behaupten, dass im Allgemeinen *jede Correlation in einzelnen Punkten des Gebiets* den Gleichungen der Conformität genügen wird.

Solche Punkte darf man mit Recht *Conformitätspunkte* nennen, da in ihrer Nähe die entsprechenden Elemente congruente Büschel beschreiben, und demnach an diesen Stellen Aehnlichkeit in den kleinsten Teilen stattfindet.

Die Ergebnisse der Betrachtungen über Conformität können zum Zwecke der Anwendung kurz in folgenden Satz zusammengefasst werden:

An allen denjenigen Stellen des P- und Π-Gebietes einer Correlation, an welchen die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

oder die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

erfüllt werden, während die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

weder verschwindet, noch unendlich wird, sind die Büschel, welche von den Richtungen entsprechender Elemente ds, $d\sigma$ beschrieben werden, congruent, und zwar im ersten Falle von gleichem, im zweiten aber vom entgegengesetztem Drehungssinn.

Die Bedeutung der Functionaldeterminante für die richtige Abgrenzung der Giltigkeitssphäre des so eben ausgesprochenen Satzes wie der projectivischen Beziehungen überhaupt wird durch die folgende Ueberlegung deutlich werden.

Die fundamentale Formel

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}.$$

in welcher sich das Gesetz der Projectivität ausspricht, gilt jedenfalls nur unter der Voraussetzung, dass die partiellen Differentialquotienten a_1, a_2, b_1, b_2 an den betreffenden Stellen des Gebiets einen bestimmten Wert besitzen und nicht zu gleicher Zeit verschwinden.

Geschieht das Letztere, so können je nach den besondern Umständen mannigfaltige andere Relationen an die Stelle der linearen Beziehungen treten.

Der einfachste Fall wird der sein, dass nur die ersten partiellen Differentialquotienten verschwinden, während die zweiten:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = a_{11}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} = a_{12} \quad \text{u. s. w.}$$

an dieser Stelle endlich bleiben.

Man hat alsdann nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$d\xi = \tfrac{1}{2}(a_{11}\, dx^2 + 2a_{12}\, dx\, dy + a_{22}\, dy^2)$$
$$d\eta = \tfrac{1}{2}(b_{11}\, dx^2 + 2b_{12}\, dx\, dy + b_{22}\, dy^2),$$

und daher durch Division folgende **nicht** lineare Beziehung zwischen t und τ:

$$\tau = \frac{b_{11} + 2b_{12}t + b_{22}t^2}{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}t^2}$$

Die Curve, welche durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen gebildet wird, ist in diesem Falle natürlich kein Kegelschnitt, vielmehr eine Curve dritter Ordnung. Die Mittelpunkte der Strahlbüschel sind hier nicht, wie bei den Kegelschnitten beliebige, sondern charakteristische Punkte der Curve.

Dieses ist ein Beispiel unter vielen; man sieht leicht, dass Correlationen gedacht werden können, welche für ein bestimmtes Paar



zusammengehöriger Punkte P^0, Π^0 Strahlbüschel von beliebig festgesetzter Beschaffenheit liefern.

Aber auch bei endlich bleibenden ersten Differentialquotienten ist ein Ausnahmefall denkbar, welcher freilich, wenn man will, noch unter das allgemeine Gesetz der Projectivität subsumirt werden kann.

Wenn sich nämlich

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

verhält, so degenerirt die Function $\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}$ in eine Constante. Diese beiden, im Uebrigen wesentlich von einander verschiedenen Fälle haben das mit einander gemein, dass die Functionaldeterminante verschwindet.

Da ferner nach einer bekannten Eigenschaft der Functionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 1$$

ist, so entspricht dem Nullwerden der Functionaldeterminante des einen Gebietes ein Unendlichwerden der des andern; daher werden beide Fälle zu berücksichtigen sein.

Man darf also den Satz aussprechen:

Das Gesetz der Projectivität der Correlationen erleidet nur an solchen Stellen des Gebietes eine wesentliche Modification oder eine Ausnahme an welchen die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

entweder verschwindet, oder unbestimmt, oder unendlich wird.

Die Functionaldeterminante, durch deren Verschwinden oder Unendlichwerden für jede Correlation gewisse charakteristische Curven bestimmt werddn, deren Punkte, wie wir gesehen haben, von allen Uebrigen eine Ausnahme machen, hat noch eine andere geometrische Eigenschaft, welche leicht nachweisbar, auch aus der Theorie der Functionaldeterminanten bekannt ist und daher hier nur angegeben werden soll:

Wenn dO und $d\Omega$ ein Paar entsprechender Flächenelemente bezeichnen, so ist

$$d\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x}, & \frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial\xi}{\partial y}, & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} . dO;$$

die Functionaldeterminante giebt also das Verhältniss entsprechender Flächenelemente an.

Setzt man

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 1,$$

so hat man die analytische Bedingung der Flächengleichheit.

Es ist durch die bisherigen Betrachtungen — allerdings zum Teil nur andeutungsweise — zu zeigen versucht worden, wie der Begriff der Correlation, wenn man ihn mit den primitivsten analytischen Hilfsmitteln bearbeitet, sofort auf den Begriff der Projectivität der Strahlbüschel, das Fundament der neuern Geometrie, führt, und wie eine ebenso einfache Untersuchung der Projectivität auf den Begriff und die analytischen Bedingungen zweier besonderer Classen von Correlationen — derer der Conformität und der Flächengleichheit — hinleitet, deren genauere Erforschung eine interessante Aufgabe der Integralrechnung bildet. So haben die synthetische und die Differentialgeometrie — scheinbar die am weitesten von einander abstehenden Zweige geometrischer Forschung — eine gemeinschaftliche Wurzel. Man könnte einwenden, dass mit dem blossen Auftauchen des Begriffs der Projectivität als einer linearen Relation zwischen trigonometrischen Tangenten gewisser Winkel bei Strahlbüscheln, für die reine Geometrie wenig gewonnen sei; aber auch die geometrischen Eigenschaften dieser Gebilde ergeben sich nicht minder einfach, wofür die vorhergehenden Skizzen ebenfalls bereits Beispiele bieten. Der Satz von der Winkelsymmetrie spricht sicher eine charakteristische und für die Anwendung höchst wichtige Eigenschaft projectivischer Strahlbüschel aus, und der Begriff der Conformitätspunkte erweist sich als sehr nützlich für die geometrische Construction der Correlationen. Er allein genügt beispielsweise, um die Verwandtschaft der Collineation auf die einfachste Weise zu construiren.

Dieselbe ist bekanntlich durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{a + a_1 x + a_2 y}{c + c_1 x + c_2 y}$$

$$\eta = \frac{b + b_1 x + b_2 y}{c + c_1 x + c_2 y}$$

definirbar. Man erkennt aus diesem sofort, dass die Punkte einander gegenseitig eindeutig entsprechen, und dass Geraden Gerade und Kegelschnitten Kegelschnitte entsprechen.

Sucht man nun die beiden Arten von Conformitätspunkten vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

so erkennt man auch ohne Durchführung der Rechnung sofort, dass ihrer nur zwei in jedem Gebiet existiren, nämlich von jeder Art einer.

Seien dieselben respective durch A, B und A, B bezeichnet, wobei die zu A, A gehörigen Strahlbüschel die von gleichem, die zu B, B gehörigen diejenigen von entgegengesetztem Drehungssinn sein mögen. Da A, A und ebenso B, B entsprechende Punkte sind, so sind auch AB, AB entsprechende Strahlen (BA, BA natürlich desgleichen). Hieraus wird die bestehend gegebene (bekannte) Construction entsprechender Punkte ohne weitere erklärende Worte verständlich sein.

Es ist zweckmässig, im Anschluss an diese Construction für die beiden Gebiete zwei verschiedene Coordinatensysteme einzuführen. Wählt man nämlich die Mitte M von AB als Coordinatenanfangspunkt des P-Gebiets, MA als x Axe, MY als y Axe und macht das Entsprechende in dem andern Gebiet, so nehmen, wenn man

$$AB = 2c, \quad \mathrm{AB} = 2\gamma$$

setzt, die Gleichungen der Collineation die höchst einfache Gestalt an:

$$\xi = \frac{\gamma c}{x}$$

$$\eta = \frac{\gamma y}{x}$$

oder umgekehrt:

$$x = \frac{c\gamma}{\xi}$$

$$\eta = \frac{cy}{\xi}.$$

Die gefundene Construction veranlasst zu der Frage nach der Natur derjenigen Correlation, welche entsteht, wenn man die congruenten Strahlbüschelpaare beide von derselben Art sein lässt. Man erkennt sofort, dass die Verwandtschaft der Aehnlichkeit resultirt, welche, bekanntlich ein specieller Fall der Collineation, vom Standpunkte dieser Construction als ein Ausnahmefall erscheint.

Bleiben wir indessen bei der Collination.

Nachdem die Conformitätspunkte in Betrachtung gezogen worden sind, also diejenigen Punkte, für welche die Symmetrieaxen unbestimmt werden und daher jede hindurchgelegte Linie als Symmetrieaxe angesehen werden darf, ist es naturgemäss die nächste Aufgabe, die Symmetrieaxen jedes beliebigen andern Punktes aufzusuchen. Diese Aufgabe findet durch folgende Sätze ihre vollständige Erledigung:

1. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Symmetrieaxen constante Richtung haben, ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die beiden Conformitätspunkte des Gebiets hindurchgeht und die Mitte der Verbindungslinie der Conformitätspunkte zu ihrem Mittelpunkt hat. Die Asymptoten der Hyperbel geben die Symmetrieaxenrichtungen.

2. Dieser gleichseitigen Hyperbel entspricht in dem andern Gebiet ein Kreis, welcher durch die Conformitätspunkte des Gebiets hindurchgeht; die Symmetrieaxen aller Punkte dieses Kreises gehen durch zwei feste Punkte hindurch, welche ebenfalls auf dem Kreise liegen; es sind nämlich die Punkte, in welchen der Kreis von der im Halbirungspunkte der Verbindungslinie der Conformitätspunkte errichteten Senkrechten geschnitten wird.

Also entspricht der Schaar der durch A, B gehenden Kreise des Π-Gebiets in dem andern Gebiete eine Schar concentrischer durch A, B gehender gleichseitiger Hyperbeln, und der Schar concentrischer, durch A, B gehender gleichseitiger Hyperbeln eine Schaar durch A, B gehender Kreise.

Um die Symmetrieaxen eines beliebigen Punktes P zu finden, hat man also durch A, B und P einen Kreis zu legen und die Punkte J, K zu bestimmen, in welchen der Kreis von der im Mittel-

punkt von AB errichteten Senkrechten geschnitten wird; dann sind die Verbindungslinien PJ und PK die Symmetrieaxen des Punktes P.

Der Beweis dieser Sätze ist leicht; ich möchte denselben übergehen, ebenso ihre Anwendung zur Production interessanter Winkeleigenschaften der gleichseitigen Hyperbel, weil es nicht in meiner Absicht liegt, hier eine vollständige Theorie der Collineation zu geben, sondern nur an einem interessanten Beispiel zu zeigen, wie die Anwendung des allgemeinen Princips der Projectivität und seiner nächsten Consequenzen die geometrischen Eigenschaften jeder besondern Correlationsart offenbar werden lässt.

Sucht man die zusammenfallenden Punkte der beiden Systeme oder, wie man zu sagen pflegt, die sich selbst entsprechenden Punkte, indem man in die ursprünglichen, auf ein Coordinatensystem bezogenen Gleichungen der Collineation

$$\xi = x, \quad \eta = y$$

substituirt, so erhält man für x oder y durch Elimination einer dieser beiden Unbekannten eine Gleichung dritten Grades, wie ebenfalls ohne Durchführung der Rechnung ersichtlich ist.

Es kann daher im Allgemeinen nicht mehr als drei sich selbst entsprechende Punkte geben, und einer derselben muss stets reell sein.

Bisher sind die beiden Punkte P, Π als Punkte einer Ebene gedacht worden; jetzt wollen wir uns zwei Ebenen auf einander liegend und in einer derselben den Punkt P, in der andern den Punkt Π befindlich denken. Das ursprüngliche Coordinatensystem verwandelt sich dem entsprechend in zwei auf einander fallende, jedes mit seiner Ebene in fester Verbindung stehend. Ich will diese Ebenen kurz als die P-Ebene und die Π-Ebene bezeichnen.

Wenn nun die Π-Ebene auf der P-Ebene auf irgend eine Weise verschoben wird, so wird dadurch der Abstand entsprechender Punkte P, Π ein anderer als vorher; die früher sich selbst entsprechenden Punkte werden jetzt voraussichtlich nicht mehr auf einander fallen (dafür freilich andere). Man wird also zugeben müssen, dass die Correlation durch die geometrische Operation der Verschiebung eine andere geworden ist, wenn auch das Princip der Aenderung, vom Standpunkte der geometrischen Anschauung betrachtet, einfacher ist, als alle andern, welche man denken könnte.

Man erkennt aber nach den bekannten Gesetzen der Coordinatentransformation sehr leicht, dass der analytische Charakter der all-

gemeinen Gleichungen der Collineation durch die Verschiebung der Ebenen keine Veränderung erleidet.

Daher werden auch bei der neuen Correlation Geraden Gerade und Kegelschnitten Kegelschnitte entsprechen.

Um es kurz auszudrücken:

Der allgemeine Charakter der Collineation bleibt durch Drehung und Verschiebung der beiden Systeme gegen einander unverändert.

Dieser letztere Satz bringt gewissermassen die geometrische Untersuchung der Collineation in Fluss; es wird der synthetischen Geometrie, indem sie sich der vorhin aufgestellten Sätze — oder auch nur eines Teils derselben — bemächtigt, leicht, die Collineation im Allgemeinen und die speciellen Fälle derselben als Instrument zu handhaben, welches die interessanteren Eigenschaften zum Mindesten der Curven 1 ter und 2 ter Ordnung offenbar werden lässt.

Die Collineation [welche, wie oben gezeigt wurde, zwei Paare congruenter Strahlbüschel besitzt] besitzt auch zwei Paare congruenter Punktreihen.

Man findet diesen Satz, indem man das *II*-Gebiet so verschiebt, dass die Conformitätspunkte *A*, A auf einander fallen und das andere Paar *B*, B mit *A* in eine gerade Linie fällt (was übrigens auf zweierlei Weise bewerkstelligt werden kann).

Bei dieser Lage der Systeme giebt es unendlich viele sich selbst entsprechende Punkte, nämlich die Punkte derjenigen Geraden, welche senkrecht durch die Mitte von *B*B hindurchgeht. Bringt man nun wieder Alles auf seinen ursprünglichen Platz zurück, so wird die zuletzt genannte Gerade zwar in zwei Punktreihen deplacirt, welche aber ihre Gestalt nicht ändern, also congruent bleiben.

Hieraus ergiebt sich leicht die folgende Construction der congruenten Punktreihen.

Man bilde den halben Unterschied der Distanzen *AB* und AB und verlängere die kürzere, verkürze die längere auf beiden Seiten um ihn. Die in den so gefundenen Punkten auf *AB* und AB errichteteten Senkrechten bilden die beiden Paare entsprechender congruenter Punktreihen.

Die so eben skizzirte Betrachtungsweise giebt ein Beispiel des Verfahrens, welches in der synthetischen Geometrie in ähnlicher Weise häufig wiederkehrt; man darf dasselbe wohl als „eine Uebersetzung des Princips der Coordinatentransformation in das Geometrische“ bezeichnen.

Soviel über das Instrument selbst; nun noch ein Wort über die Anwendung desselben. Der Kreis ist ein Kegelschnitt; nach dem Frühern muss daher einem jeden Kreise des einen Gebietes ein Kegelschnitt des andern entsprechen. Ueberdies schneiden sich nach dem Fundamentalprincip der Projectivität sämmtliche Paare entsprechender Strahlen, welche von einem Paar entsprechender Punkte P, Π ausgehen, auf einem Kegelschnitt; man wird daher Sätze vom Kreise in solche, welche sich auf Kegelschnitte beziehen, transformiren können.

Man sieht, wie die Analysis in ihrer primitivsten Gestalt, wenn man will, der Geometrie sehr annehmbare Grundlagen für ihre weitern Speculationen zu liefern im Stande ist.

Sind wir darum berechtigt, die synthetische Geometrie als einen blossen appendix der analytischen zu betrachten? Dieses wäre schon in Anbetracht der Rivalität, welche zwischen beiden Disciplinen geherrscht hat, und der die Wissenschaft der Geometrie wesentliche Fortschritte verdankt, ein Unrecht; aber es wäre auch absurd, da die analytische Geometrie, wie schon aus ihrem Begriff hervorgeht, wesentlich geometrischer Hilfsmittel nie entbehren kann. Eher könnte man das Umgekehrte behaupten, da ein umfangreicher Teil der Geometrie, die Geometrie der Lage, ganz ohne Anwendung arithmetrischer Hilfsbegriffe aufgebaut werden kann; aber auch diese Behauptung wäre gewagt, da die Hilfsmittel, welche die Analysis der Geometrie bietet, sehr wesentliche sind. Man hat zuweilen die Frage aufgeworfen: ob man die Geometrie auf analytischem oder auf constructivem Wege behandeln solle? Diese Fragestellung ist verkehrt; man kann sie aber meines Erachtens verbessern, indem man sie so formulirt:

Was soll in der Geometrie auf analytischem und was auf constructivem Wege behandelt werden? —

Die Untersuchung der geometrischen Verwandtschaften gilt mit Recht als eines der brauchbarsten Hilfsmittel geometrischer Speculation; ja, sie wird geradezu als das Fundament der Geometrie bezeichnet. Die einfachsten Correlationen von nur einer Dimension, also namentlich die projectivischen Punktreihen und Strahlbüschel, haben diese fundamentale Bedeutung unzweifelhaft; aber alle andern, — sogar die Collineation — zeigen hinsichtlich ihrer Anwendung einer von jener wesentlich verschiedenen Charakter; sie dienen zur Transformation einfacher geometrischer Sätze in andere von grösserer Complication und — wenn die Sätze, von welchen man ausging, trivial waren — auch von grösserem Interesse. Eine Ausnahme macht nur die einfachste der reciproken Verwandtschaften, diejenige

der reciproken Polaren innerhalb des eigentlichen Gebiets ihrer Anwendung in so fern, als die durch ihre Anwendung resultirenden Theoreme nicht complicirter (aber auch nicht einfacher) sind als diejenigen, aus welchen sie hergeleitet wurden, und denen sie nach dem Princip der Dualität entsprechen; triviale Sätze können durch sie nicht in interessantere transformirt werden.

Der Begriff der Correlation ist eines der geistreichsten Producte geometrischer Einbildungskraft; jede bestimmte Correlation darf als eine Maschine aufgefasst werden, welche zunächst zur Production [man würde für gewöhnlich sagen: zur Entdeckung] geometrischer Sätze bestimmt ist, schliesslich aber — indem sich der antike Begriff des geometrischen Lehrsatzes erweitert — selbst als Object der Betrachtung dienen kann.

Anmerkung. Das Bild der „Maschine" scheint mir in sofern nicht unpassend, als dadurch die Aufmerksamkeit auf eine Eigentümlichkeit hingelenkt wird, welche sogar der gesammten Mathematik in bedeutendem Grade eigen ist und den denkenden Gegnern der Mathematik (von denen natürlich allein die Rede sein kann) zu ungerechten aber nicht ganz ungerechtfertigten Angriffen die Handhabe gegeben hat. Am Weitesten ist hierin wohl der Philosoph Schopenhauer gegangen, welcher die Mathematik zwar an einer Stelle seines Hauptwerkes („Die Welt als Wille und Vorstellung") eine Wissenschaft sein lässt, aber bei andern Gelegenheiten mit einer gewissen Inconsequenz als einen Gegenstand bezeichnet, welcher für den wahren Denker nur von sehr geringem Interesse sein kann. Er stützt sich dabei auf gelegentliche Urteile von Mathematikern, welche einesteils humoristisch gedacht, andernteils zwar treffend, aber unvollständig und zwar aphoristisch hingeworfen waren, und deren Autoren schwerlich mit der Auffassung Schopenhauer's in diesem Punkte einverstanden sein würden. Aber der Angriff hat dennoch einen Kern, welcher Berücksichtigung verdient und von Schopenhauer selbst witzig und ziemlich treffend durch seinen Vergleich des Mathematikers mit „einer Katze, welche mit ihrem eigenem Schwanz spielt" charakterisirt worden ist.

Die Theoreme der Mathematik — wie Resultate productiven Denkens überhaupt — tragen häufig den Charakter des Künstlichen, Gemachten zur Schau, während die andere Seite an ihnen, das Natürliche, Beobachtete, Gewordene sich dem Blick des oberflächlichen Beobachters verbirgt und daher leicht übersehen wird. Bei den interessanteren Maschinen — diesen wunderbaren Gebilden durch Aneinanderkettung von Natur und Menschengeist — verhält es sich ähnlich; auch hier übernimmt die Kunst so zu sagen das Heroldsamt. Da nun die Kunst, die Willkür sich gewissermassen bei der Erfindung einer Correlation concentrirt, um hernach der Beobachtung, der planmässigen Anwendung Platz zu machen, so möchte der Terminus „Maschine" für ein derartiges Gebilde etwas für sich haben; auch in sofern, als wir dadurch das Künstliche, welches nun einmal in geometrischen Untersuchungen liegt, offen eingestehen, und nun die Aufgabe an uns herantritt,

Die allgemeine Theorie der Correlationen wird auf diese Weise eine „allgemeine Maschinenlehre der Geometrie"; aber der Begriff einer solchen ist damit noch nicht erschöpft; denn es giebt noch eine zweite Reihe von Hilfsmitteln, welche den Charakter der Maschine ebenso an sich tragen und mit jenen erstern zusammen erst ein Ganzes bilden. Ich meine die Coordinatensysteme.

Dass ein Parallelismus zwischen Correlationen und Coordinatensystemen existirt, wird sofort klar, wenn man sie analogisch — durch Gleichungen — definirt.

Die Gleichungen

$$\xi = f(x, y)$$
$$\eta = g(x, y),$$

wenn man x, y die Coordinaten eines Punktes P, ξ, η diejenigen eines andern Punktes Π sein lässt — beide auf dasselbe fundamentale Coordinatensystem bezogen — stellen eine Correlation dar; dieselben beiden Gleichungen, wenn man x, y und ξ, η beide auf denselben Punkt P bezieht, alsdann aber nur das eine Coordinatenpaar, etwa x, y, zugleich auf das fundamentale Coordinatensystem beziehen kann, charakterisiren ein neues Coordinatensystem, in welchem ξ, η die Coordinaten (Parameter) des Punktes P sind.

Auch diese Zusammenordnung von Correlationen und Coordinatensystemen ist eine künstliche, wie aus dem Umstande hervorgeht, dass sie von der Beschaffenheit des fundamentalen Coordinatensystems, dessen man sich bei der analytischen Definition der Correlationen und Coordinatensysteme bedient, wesentlich abhängt; so dass einer andern Wahl des letztern ein anderer Modus der Zusammenordnung entsprechen wird.

---

das Natürliche, welches ebenfalls darin liegt, aufzusuchen und von dem erstern begrifflich zu trennen.

Sollte es wohl ganz zufällig sein, dass der geniale erste Erfinder derartiger „Maschinen" ein berühmter Ingenieur gewesen ist. Poncelet, der Erfinder der Transformationsmethoden der Centralprojection und der reciproken Polaren muss wohl als der eigentliche Schöpfer der Idee der Transformation geometrischer Sätze durch Correlationen angesehen werden, wenn auch Möbius Verdienste um die Feststellung des allgemeinen Begriffs der Correlation unbestreitbar ist.

Dass der Erfinder der Coordinatensysteme ein grosser Philosoph gewesen ist, erscheint mir ebenfalls bezeichnend; der erste Zweck dieser Erfindung war, Ordnung in das Chaos zu bringen, die Methode an die Stelle des Witzes zu setzen.

Es entsteht daher die Frage nach dem einfachsten Coordinatensystem, damit man dasselbe als fundamentales wählen könne. Ich zweifele kaum, dass sich das älteste von allen, das Cartesius'sche auch als das einfachste, das natürliche erweisen wird. Der Winkel der Coordinatenaxen ist zwar für viele Betrachtungen ohne Belang; wo es aber auf denselben ankommt, wird sich sicher der rechte Winkel empfehlen — wofür die oben entwickelten Symmetrieeigenschaften der projectivischen Strahlbüschel schon einen Beleg abgeben dürften. Das Cartesius'sche System der rechtwinkligen Coordinaten soll also hier als das fundamentale Coordinatensystem gedacht werden.

Unter dieser Voraussetzung gewinnt die Frage einen bestimmten Sinn:

Welches Coordinatensystem ist das der Verwandtschaft der Collineation parallele?

Anmerkung. Dieser Gegenstand verlangt allerdings eine principielle Untersuchung, wobei auch die gerade Linie zuvörderst als unbekannt angenommen werden muss.

Denkt man sich auf einer beliebigen krummen Oberfläche ein System beliebiger Curven — die Ordinatencurven — und eine sie alle durchschneidende — die Abscissencurve — gegeben, auf welcher letztern man den Coordinatenanfangspunkt beliebig wählt, so bedarf man nur noch eines Maasses in Gestalt eines absolut biegsamen, unausdehnbaren Fadens, um auf dieser Fläche analytische Geometrie treiben zu können. Die Wirkungssphäre des analytischen Verfahrens scheint hier weiter zu gehen als die des constructiven. Eine Gleichung ersten Grades zwischen x und y charakterisirt eine Curve, welche man als „Curve erster Ordnung" bezeichnen kann. Die von geraden Linien geltenden Sätze der reinen Geometrie der Lage werden sich auf die so eben definirten „Curven erster Ordnung" ausdehnen lassen, so beispielsweise der berühmte Satz von Desargues: „die Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier perspectivischer Dreiecke liegen auf einer Geraden", wenn man überall anstatt der geraden Linie die „Curve erster Ordnung" substituirt. Dieser Satz ist nämlich nur das geometrische Bild einer Identität zwischen Coordinaten, welche aus der linearen Beschaffenheit der Gleichungen folgt.

Ich muss darauf verzichten, diese an sich interessanten Betrachtungen hier weiter zu führen und wollte nur die Möglichkeit einer fundamentalen Untersuchung der Coordinatensysteme, um das Natürliche zu erkennen und die Fruchtbarkeit derartiger Betrachtungen plausibel machen; sie treten, wenn man sie zu Ende führt, notwendiger Weise mit den metaphysischen Betrachtungen über die Natur des Raumes (die sogenannte absolute oder Nicht-Euklidische Geometrie) in Zusammenhang, und werden sich dergleichen Speculationen, wenn man sich eine möglichst gründliche Einsicht in das Coordinatenprincip verschaffen will, kaum entbehren lassen.



Ich finde das folgende, welches hier der Kürze wegen für den Augenblick als „projectivisches Coordinatensystem“ bezeichnet werden mag.

Seien x, y die Coordinaten von P in Beziehung auf das fundamentale Coordinatensystem, ABC ein beliebiges Dreieck, und durch C zu AB eine Parallele gelegt; man ziehe durch P von A und B aus gerade Linien, welche auf der zuerst genannten Parallele die Schnittpunkte Ξ, H bestimmen, setze, wenn D, E zwei beliebige Punkte auf den Dreiecksseiten AC, BC sind,

$$\frac{C\Xi}{DC} = \xi, \quad \frac{CH}{EC} = \eta,$$

und betrachte ξ, η als die Coordinaten des Punktes P in dem neuen Coordinatensystem.

Es lässt sich nämlich zeigen, dass ξ, η mit x, y durch Gleichungen von der Form

$$\xi = \frac{a + a_1 x + a_2 y}{c + c_1 x + c_2 y}$$

$$\eta = \frac{b + b_1 x + b_2 y}{c + c_1 x + c_2 y}$$

verbunden sind, und dass durch passende Wahl des Dreiecks ABC und der Grössen CD, CE den Coefficienten jener Gleichungen beliebig gegebene Werte erteilt werden können. Unser System besitzt daher den gehörigen Grad der Allgemeinheit; man kann ihm noch andere Gestalten geben, welche aber nicht wesentlich allgemeiner sein können.

Anmerkung. Der einfachste Beweis der obigen Behauptung dürfte dieser sein:

Aus der Construction folgt, dass für die Punkte der Geraden AB die Coordinaten ξ, η unendlich werden, und dass für die Punkte der Geraden AC, $\xi = 0$ und für die Punkte der Geraden BC, $\eta = 0$ wird. Es muss daher, wenn

$a_1 x + a_2 y + a = L = 0$ die Gleichung der Geraden AC
$b_1 x + b_2 y + b = M = 0$ „ „ „ „ BC
$c_1 x + c_2 y + c = N = 0$ „ „ „ „ AB

ist, ξ und η, durch x und y ausgedrückt, von der Form

$$\xi = \frac{L}{N} \cdot \varphi, \quad \eta = \frac{M}{N} \cdot \psi$$

werden, wo φ und ψ noch näher zu bestimmen sind.




Transformirt man ein projectivisches Coordinatensystem in ein anderes ebenfalls projectivisches, so behalten die Transformationsformeln dieselbe Gestalt, wie oben.

Diese Art von Coordinatensystemen will ich dazu benutzen, zu zeigen, wie eine und dieselbe auf Grössenverhältnisse bezügliche Bemerkung, wenn man sie auf verschiedene Coordinatensysteme anwendet, zu verschiedenen Eigenschaften einer und derselben Curve führen kann.

Wenn man ein rechtwinkliges Coordinatensystem in ein anderes ebenfalls rechtwinkliges transformirt, so mag dieses „einer Transformation innerhalb des Gebiets der rechtwinkligen Coordinatensysteme" genannt werden.

Man kann durch Transformation innerhalb des Gebiets des rechtwinkligen Coordinatensysteme die Coefficienten der linearen Glieder und des bilinearen Gliedes der allgemeinen Kegelschnittgleichung zum Verschwinden bringen, wodurch die Gleichung die einfache Form erhält:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0.$$

Alsdann führt die algebraische Bemerkung, dass

$$(-x).(-x) = x.x$$

ist, bekanntlich auf die Eigenschaften der Hauptaxen des Kegelschnitts.

Lässt man den Punkt P in die Unendlichkeit rücken, so wird $AB H \Xi$ ein Parallelogramm, und daher

$$C\Xi + CH = AB.$$

Also muss in diesem Falle für gewisse constante Werte k, k_1, k_2

$$k_1 \xi + k_2 \eta = k$$

sein.

Für unendlich entfernte Punkte P wird aber

$$\xi = \frac{a_1 + a_2 \cdot \frac{y}{x}}{c_1 + c_2 \cdot \frac{y}{x}} \cdot \varphi; \quad \eta = \frac{b_1 + b_2 \cdot \frac{y}{x}}{c_1 + c_2 \cdot \frac{y}{x}} \cdot \psi.$$

Daher muss:

$$k_1 \left(a_1 + a_2 \frac{y}{x}\right) \varphi + k_2 \left(b_1 + b_2 \frac{y}{x}\right) \psi = k \left(c_1 + c_2 \frac{y}{x}\right)$$

sein; eine Gleichung, welche unabhängig von dem Wert $\frac{y}{x}$ nur dann erfüllt werden kann, wenn φ und ψ Constanten sind.



Macht man dieselbe Transformation innerhalb des Gebietes der schiefwinkligen Parallel-Coordinatensysteme mit gegebenem Axenwinkel, so führt das auf den Begriff und die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser.

Wir wollen nun dieselben Ueberlegungen für die projectivischen Coordinatensysteme anstellen.

Zunächst ist klar, dass, wenn man die Gleichung einer beliebigen, ursprünglich auf Cartesius'sche Coordinaten bezogenen Curve in projectivische Coordinaten transformirt, der Grad der Gleichung sich nicht ändert.

Also wird, wenn jetzt ξ, η projectivische Coordinaten sind, auch in diesen

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi + 2E\eta + F = 0$$

die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts.

Durch Transformation innerhalb des Gebietes der projectivischen Coordinatensysteme kann man (sogar auf unendlich viele Arten) wiederum die Coefficienten der beiden linearen Glieder und des bilinearen Gliedes zum Verschwinden bringen; jedenfalls ist, wenn x und y projectivische Coordinaten sind, die Gleichung

$$Kx^2 + Ly^2 = 1$$

die eines Kegelschnittes.

Es ist klar, dass, wenn x, y dieser Gleichung Genüge leisten, die drei Wertepaare

$$\begin{array}{cc} -x, & y \\ x, & -y \\ -x, & -y \end{array}$$

es ebenfalls tun. Man findet daher zu jedem Punkte P des Kegelschnitts drei andere, welche diesem Kegelschnitt ebenfalls angehören. Sei zur Abkürzung

$$CX = X, \quad CY = Y$$

gesetzt, und

$$\frac{X}{DC} = x, \quad \frac{Y}{EC} = y,$$

so wird:

$$-x = -\frac{X}{DC}$$

$$-y = -\frac{Y}{EC},$$

so dass also die drei andern Punkte gefunden werden, indem man die Werte X, Y in entgegengesetzter Richtung von C aus aufträgt und die obigen Combinationen durchmacht.

Sei wieder das Coordinationsdreieck ABC gegeben, und seien P, Q zwei beliebige Punkte der Ebene, ihre projectivischen Coordinaten respective

$$\frac{X}{CD}, \quad \frac{Y}{CD}$$

und

$$\frac{X'}{CD}, \quad \frac{Y'}{CD}$$

(die Punkte D, E brauchen nicht gezeichnet zu werden) so können die Constanten K, L der Gleichung

$$Kx^2 + Ly^2 = 1$$

im Allgemeinen so bestimmt werden, dass die Coordinaten der Punkte P, Q derselben genügen.

Man erhält nämlich die Bedingungsgleichungen

$$K \cdot \frac{X^2}{CD^2} + L \cdot \frac{Y^2}{CE^2} = 1$$

$$K \cdot \frac{X'^2}{CD^2} + L \cdot \frac{Y'^2}{CE^2} = 1,$$

aus welchen K und L berechenbar ist.

Eine Ausnahme bildet der Fall, dass sich

$$X : Y = X' : Y'$$

verhält, weil dann die Determinante der beiden Gleichungen verschwindet. [Man kann sagen, die Coefficienten K, L werden in diesem Falle unendlich gross]. Alsdann liegen die Punkte P, Q und C in einer Geraden.

Construirt man zu P nach dem Vorigen die drei andern Punkte P_1, P_2, P_3 und ebenso zu Q die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, so hat man 8 Punkte, welche auf einem Kegelschnitt liegen.

In dem Ausnahmefall degenerirt der Kegelschnitt, auf welchem die Punkte PP_1 P_2P_3, QQ_1 Q_2Q_3 liegen, in zwei Gerade, deren Schnittpunkt die Spitze C des Coordinationsdreiecks ist.

Das führt auf die Bemerkung (welche sich auch schon früher hätte machen lassen), dass jede vier zusammengehörigen Punkte P, P_1, P_2, P_3 die Eigenschaft haben, dass die Verbindungslinie von P und P_3 durch den Punkt C geht, desgleichen die Verbindungslinie von P_1 und P_2.



Damit ist die schöne geometrische Eigenschaft des Coordinatendreiecks aufgedeckt:

Construirt man zu irgend einem Punkte P der Ebene auf die bekannte Weise die zugehörigen Punkte P_1, P_2, P_3, so ist das Coordinatendreieck ABC das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks, welches die Punkte P, P_1, P_2, P_3 zu Ecken hat.

Ich verfolge diese Betrachtungen, welche, wie man sieht, mitten in die synthetische Geometrie hineinführen, nicht weiter, da ich nur zeigen wollte, wie eine und dieselbe analytische Bemerkung, auf verschiedene Coordinatensysteme in Anwendung gebracht, indem man von einer bestimmten Eigenschaft einer Curvenart ausgeht, zu andern Eigenschaften derselben Curvenart führen muss; woraus hervorgeht, dass die Coordinatensysteme in analoger Weise wie die Correlationen zur Transformation geometrischer Lehrsätze gebraucht werden können.

Dabei herrscht im Allgemeinen der Unterschied, dass die Anwendung der Correlationen von bekannten Eigenschaften bestimmter Curvenarten auf analoge Eigenschaften anderer Curvenarten zu schliessen erlaubt, während die Anwendung der Coordinatensysteme aus bekannten Eigenschaften bestimmter Curvenarten einen Schluss auf andere Eigenschaften derselben Curvenarten verstattet. Beide parallel zur Anwendung gebracht, können erst eine vollständige und planvolle Darstellung der Geometrie und vielleicht des geometrischen Denkens überhaupt ermöglichen, während die Anwendung des Correlationsbegriffes allein immer noch eine Lücke lässt, die dann durch heterogene und scheinbar willkürliche Betrachtungen ausgefüllt werden muss.

Vielleicht könnte man die Bewegung der geometrischen Speculation dadurch treffend chrakterisiren, dass man sie unter zwei Ideen subsumirte: die Idee der Coordination und die Idee der Transformation. Beide kommen sowohl bei den Correlationen, als auch bei den Coordinatensystemen in Betracht, die eine vornehmlich beim Aufbau, die andere beim Gebrauch derselben.

Anmerkung. Die Anwendung der Coordinatensysteme ist keineswegs an die Anwendung des Calculs in der Geometrie gebunden; dieselben sind ebenso wie die Correlationen Hilfsmittel geometrischer Art, und man könnte sich beider Arten von Hilfsmitteln auch auf constructivem Wege bedienen (Beispiel: Die sogenannte „Steiner'sche Dampfmaschine"); aber es ist höchst zweckmässig, auf die analytischen Hilfsmittel nicht zu verzichten; vielmehr beide Methoden — jede in der Weise, welche ihrem Charakter am Meisten entspricht — neben einander zur Anwendung zu bringen und durch

Man hat den Coordinatensystemen zum Vorwurf gemacht, dass durch sie ein fremdes Element in die Betrachtung der geometrischen Gebilde hineingetragen werde. Dieses mag in Beziehung auf manche Anwendungen sehr gut treffend sein, während es mir, allgemein ausgesprochen, ein schiefes Urteil zu sein scheint. Allerdings liefert die Gleichung einer Curve in Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem nur eine Anschauungsweise derselben, entsprechend dem Anblick, welchen diese Curve dem Beobachter, der sie von einem Standorte aus betrachtete, gewähren würde. Denkt man sich aber im Fluge alle möglichen oder doch alle charakteristischen Coordinatensysteme darauf angewandt, so hört die Anschauungsweise auf, eine einseitige zu sein.

Es ist allerdings der Vorteil des Geometers, wo er auf seinem Gebiete arbeitet, den Standpunkt rasch wechseln zu können; woraus die Aufgabe entspringt, der analytischen Coordinatentransformation geometrische Gesichtspunkte abzugewinnen, sie wo möglich ganz in eine geometrische Coordinatentransformation zu verwandeln;

---

ihr kunstloses — weil natürliches — Ineinandergreifen auf dem einfachsten Wege die Geometrie entstehen zu lassen. Deshalb ist — um zwei Meisterwerke ersten Ranges neben einander zu stellen — Steiner's Methode fruchtbarer als diejenige v. Staudt's.

Die Analysis lege den Grund, die geometrische Betrachtung ziehe die Consequenzen — das wird im Allgemeinen die zweckmässigste Teilung der Arbeit sein; oder, wenn die Anwendung eines Vergleichs verstattet ist: Die Analysis sei das grobe Geschütz, die synthetische Geometrie das kleine Gewehr; es nimmt sich seltsam aus, wenn unter Anwendung von mancherlei analytischen Kunstgriffen und Verbiegungen des Coordinatensystems ein einzelnes Theorem bewiesen wird, welches ursprünglich durch Geometrie entdeckt wurde, und dessen Beweis auf geometrischem Wege naturgemäss von Statten geht. Ueberhaupt sind nicht einzelne Sätze das naturgemässe Zielobject der Analysis; eher schon Systeme von Sätzen. Die geometrische Methode besitzt eine Geschwindigkeit der Bewegung, worin die Analysis mit der Geometrie nicht vorteilhaft concurriren kann, selbst wenn sie noch so viele Anleihen bei der letztern — in Gestalt künstlicher Coordinatensysteme — macht. Dagegen vermag die Analysis von ihrem erhabenen Standpunkte aus weite Gebiete im Ganzen mit einem Blick zu überschauen und Methoden zu begründen, zu deren Ausbeutung nach jeder Richtung hin sie weder Beruf noch besonderes Geschick besitzt; diese Ausbeutung ist aber eine wichtige Aufgabe, und keineswegs die leichtere, kein blosses Anhängsel; wenn auch die Aufgabe des Geometers durch die Hilfe der Analysis eine wesentlich leichtere wird, so wird dafür das Gebiet seiner Forschung ein wesentlich reicheres, als wenn er auf die Hilfsmittel der rein geometrischen Anschauung angewiesen wäre.

was allerdings mit jeder besondern Art von Coordinatensystemen nur für eine gewisse Gruppe von Untersuchungen gelingt. Für dieses Gebiet ist dann das Coordinatensystem ein natürliches, für jedes andere ein mehr oder weniger künstliches.

Entsprechend den oben begonnenen Untersuchungen über die Differentialgeometrie der Correlationen und parallel denselben muss eine „allgemeine geometrische Maschinenlehre" die Differentialgeometrie der Coordinatensysteme untersuchen, was zu ebenso einfachen, als an sich merkwürdigen Resultaten führt, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll.

Dass in dem Vorigen überhaupt die Coordinatensysteme berührt worden sind, geschah deshalb, weil dadurch die Correlationen als notwendiger Teil eines Ganzen auch vom logischen Standpunkte betrachtet an Bedeutung gewinnen und nicht mehr als ein zufälliges Erzeugniss geometrischer Speculation angesehen werden können.

Das Fundamentalgesetz der projectivischen Beziehung bei Correlationen führt zu ganz andern Gruppen partieller Differentialgleichungen, als die in dem Vorigen erwähnten.

Wir wissen, dass die geradlinigen Verlängerungen entsprechender, von den Punkten P, Π ausgehender Elemente sich im Allgemeinen auf einem Kegelschnitt treffen, welcher durch die Punkte P, Π hindurchgeht.

Man kann nun die Bedingungen aufsuchen, unter welchen der Kegelschnitt eine specielle Gestalt erhält. Diese Untersuchung ist ebenfalls überaus einfach vermittelst der Cartesius'schen Coordinaten durchführbar.

Seien PS, ΠS die geradlinigen Verlängerungen zweier entsprechender Elemente, u, v die Coordinaten ihres Schnittpunktes S, so haben wir nach den früheren Bezeichnungen

---

Anmerkung. Wenn man sagt, das rechtwinklige Coordinatensystem, vermittelst dessen man einen beliebigen Kegelschnitt durch eine Gleichung darstellt, habe nichts mit dem Kegelschnitt selbst zu tun, so ist das im Allgemeinen richtig; es wird aber unrichtig, wenn, nachdem durch eine leichte Transformation die Hauptaxen entdeckt worden sind, der Kegelschnitt auf diese als Coordinatenaxen bezogen wird; denn die Hauptaxen sind doch sicher nicht etwas dem Kegelschnitt Fremdes. Die Transformation muss mit ins Auge gefasst werden; sie muss gleich bei der Erfindung von Coordinatensystemen massgebender Factor sein.

$$\tau = \frac{b_1 + b_2 t}{a_1 + a_2 t}$$

worin

$$t = \frac{v - y}{u - x}, \qquad \tau = \frac{v - \eta}{u - \xi}$$

zu substituiren ist.

Also wird die Gleichung der Schnittcurve:

$$b_1(u - x)(u - \xi) + b_2(v - y)(u - \xi) - a_1(u - x)(v - \eta) - a_2(v - y)(v - \eta) = 0.$$

Ordnet man die Gleichung nach ihren Variabeln u, v, so werden die Glieder der höchsten Dimension:

$$b_1 u^2 + (b_2 - a_1)uv - a_2 v^2,$$

von welchen allein bekanntlich die Form des Kegelschnitts abhängt. Transformirt man diesen Ausdruck durch Drehung des Coordinatensystems, also vermittelst der Formeln

$$u = u' \cos\vartheta - v' \sin\vartheta$$
$$v = u' \sin\vartheta + v' \cos\vartheta$$

auf die Hauptaxenrichtungen, so bestimmt sich der Winkel ϑ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{b_2 - a_1}{b_1 + a_2},$$

und die Glieder zweiter Dimension der transformirten Kegelschnittsgleichung werden:

$$\left[\frac{b_1 - a_2}{2} + \frac{b_1 + a_2}{2}\cos 2\vartheta + \frac{b_2 - a_1}{2}\sin 2\vartheta\right] u'u'$$
$$+ \left[\frac{b_1 - a_2}{2} - \frac{b_1 + a_2}{2}\cos 2\vartheta - \frac{b_2 - a_1}{2}\sin 2\vartheta\right] v'v'.$$

Sei das Verhältniss der Hauptaxen durch k bezeichnet, wobei k für die Ellipse reell gesetzt wird, also für die Hyperbel rein imaginär.

Man hat also:

$$\frac{b_1 - a_2 + (b_1 + a_2)\cos 2\vartheta + (b_2 - a_1)\sin 2\vartheta}{b_1 - a_2 - (b_1 + a_2)\cos 2\vartheta - (b_2 - a_1)\sin 2\vartheta} = k^2$$

Der besondere Wert $k^2 = +1$ giebt den Kreis, der Wert $k^2 = -1$ die gleichseitige Hyperbel, der Wert

$$k^2 = \text{Null oder Unendlich}$$

die Parabel.

Man findet hieraus für die Correlation leicht folgende Resultate:

Wenn der Kegelschnitt ein Kreis werden soll, so muss

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

sein; soll er eine gleichseitige Hyperbel werden, so muss

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

sein; soll er eine Parabel werden, so muss

$$4\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

sein.

Verlangt man endlich Kegelschnitte, deren Axenverhältniss durch eine gegebene Zahl k dargestellt wird, so muss für diese die Gleichung erfüllt werden:

$$\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2} = \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2.$$

Anmerkung. Die Combination der beiden oben gefundenen Gleichungen

$$\frac{b_2 - a_1}{b_1 + a_2} = \operatorname{tg} 2\vartheta,$$

$$\frac{(b_2 - a_1)^2 + (b_1 + a_2)^2}{(b_1 - a_2)^2} = \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2$$

führt auf eine interessante Aufgabe der Integralrechnung, welche das Problem der conformen Abzeichnungen als speciellen Fall in sich enthält. Verlangt man nämlich, dass ϑ und k constant sein sollen, so giebt das zwei lineare partielle Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten. Die geometrische Fassung des Problems ist diese:

Correlationen zu finden, deren Schnittcurven entsprechender Strahlbüschel ähnliche und axenparallele Kegelschnitte werden.

Lässt man die Axenrichtungen der Kegelschnitte mit den Coordinatenaxenrichtungen identisch werden, wodurch der Charakter des Problems keine Aenderung erleidet, so werden die Differentialgleichungen diese:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}} = \text{Const}$$

Die erste dieser Gleichungen, welche angiebt, wann der Kegelschnitt ein Kreis wird, kann auf reelle Weise nur dadurch erfüllt werden, dass man

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}=0$$

setzt; das sind aber die Bedingungen der ersten Art der Conformität. (Congruente Strahlbüschel mit gleichem Drehungssinn).

Dagegen ist die zweite Gleichung, die Bedingung für die gleichseitige Hyperbel, nur eine der beiden Bedingungen für die Conformität zweiter Art.

Eine andere Aufgabe von fundamentaler Bedeutung besteht darin, die analytische Bedingung dafür aufzusuchen, dass die Schnittcurve anstatt eines Kegelschnittes eine gerade Linie wird.

Da wir wissen, dass in diesem Falle die Gerade $P\Pi$ die Richtungen eines Paares entsprechender Strahlen angiebt, so ist die Auflösung leicht. Es folgt nämlich aus dem so eben Gesagten, dass in diesem Falle

$$\tau=t=\frac{\eta-y}{\xi-x}$$

ein Paar entsprechender Werte t, τ sind, und daher die Fundamentalgleichung

$$\tau=\frac{b_1+b_2t}{a_1+a_2t}$$

durch die Substitution dieser Werte erfüllt werden muss.

Das giebt:

$$(\xi-x)\begin{vmatrix}\xi-x, & \frac{\partial\xi}{\partial x}\\ \eta-y, & \frac{\partial\eta}{\partial x}\end{vmatrix}+(\eta-y)\begin{vmatrix}\xi-x, & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \eta-y, & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}=0,$$

welches die gesuchte Bedingung der Linearität der Schnittcurve ist.

Alle partiellen Differentialgleichungen, zu welchen wir gelangt sind, können in zweifacher Weise zur Anwendung kommen. Entweder handelt es sich um die Untersuchung einer gegebenen Correlation, wo dann die partiellen Differentialgleichungen algebraische Gleichungen werden, durch welche in dem P-Gebiete und dem entsprechend in dem Π-Gebiete Curven charakterisirt werden, deren Punkten die betreffenden Eigenschaften zukommen; oder man sucht besondere Arten von Correlationen, welche einer oder zweien der

partiellen Differentialgleichungen überall Genüge leisten, was eine Aufgabe der Integralrechnung ist.

Die Gleichung

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} \xi - x, & \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \eta - y, & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} \xi - x, & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \eta - y, & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

die Bedingung der Linearität der Schnittcurve, mag in dem zuletzt genannten Sinne in Betracht gezogen werden. Dieselbe besitzt die Eigenschaft, sich auf eine abhängige Variabele bringen zu lassen.

Setzt man nämlich

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = z,$$

so lässt sich Alles durch z und dessen partielle Differentialquotienten ausdrücken, und die partielle Differentialgleichung nimmt, wie man leicht sieht, die sehr einfache Gestalt an:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die Lösung:

$$z = \frac{y - b}{x - a},$$

wenn a und b Constanten sind. Man kann dieselbe bekanntlich nach dem Princip der Variation der Constanten verallgemeinern, indem man

$$b = \varphi(a)$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial b} \cdot \frac{db}{da} = 0$$

setzt.

Man erhält dadurch in unserm Falle:

$$\frac{db}{da} = \frac{y - b}{x - a}.$$

Die geometrische Deutung dieser Resultate ist leicht. Betrachten wir zunächst den einfacheren Fall, von welchem wir ausgegangen, dass a und b Constante sind.

Die Gleichung

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=\frac{y-b}{x-a}$$

sagt aus, dass die Correlation die Eigenschaft haben muss, dass jedes Paar entsprechender Punkte P, Π mit einem festen Punkte C, dessen Coordinaten a, b sind, in einer geraden Linie liegt. Dadurch allein ist aber die Correlation noch nicht bestimmt, und die Vervollständigung ist im Allgemeinen in unser Belieben gestellt; man kann das geometrisch so ausdrücken, dass man sagt: es darf eine beliebige Curvenschaar, welche nur von einem Parameter abhängt (d. i. deren Individuen durch die Werte dieses Parameters bestimmt sind), hinzugefügt werden.

Wir wollen nun die allgemeine Lösung ins Auge fassen. An die Stelle des Punktes C tritt eine beliebige Curve:

$$b=\varphi(a).$$

Wir haben jetzt:

$$\frac{db}{da}=\frac{y-b}{x-a}=\frac{\eta-y}{\xi-x}.$$

Da $\frac{db}{da}$ die trigonometrische Tangente der im Punkte (a, b) an jene Curve gelegten Tangente ist, so sehen wir ohne Weiteres, dass an die Stelle der durch den Punkt C gehenden Geraden hier die Tangenten der Curve treten.

Wir können diese Betrachtungen zu folgendem geometrischen Theorem zusammenfassen:

Wenn man eine beliebige, nur von einem Parameter abhängende Curvenschaar und ausserdem eine einzelne Curve C hat, und wenn man aus diesen Elementen eine Correlation in der Weise construirt, dass man Tangenten an die Curve C legt und irgend zwei der Schnittpunkte einer Tangente mit einer Curve der Schaar als entsprechende Punkte der Correlation auffasst, so hat die Correlation im Allgemeinen die Eigenschaft, dass die entsprechenden Strahlen der zu P, Π gehörigen Strahlbüschel sich, hinreichend verlängert, auf einer Geraden schneiden. An die Stelle der Curve C kann, wenn man will, auch ein Punkt C treten. Ausnahmefälle, in welchen die Schnittcurve keine Gerade wird, sind denkbar und müssen bei jeder besondern Wahl, welche man trifft, besonders aufgesucht werden.

Anmerkung. Es sei noch bemerkt, dass diese Classe von Correlationen unendlich viele sich selbst entsprechende Punkte besitzt, welche zusammen

So hat die Integralrechnung vermöge der einfachsten Betrachtungen zu einem geometrischen Theorem von allerdings bedeutender Complication, aber auch von überraschend grosser Allgemeinheit geführt.

Die Existenz von Ausnahmefällen, welche überhaupt eine charakteristische Eigentümlichkeit der Theoreme von dieser Art bildet, kann meines Erachtens das Interesse, welches sie gewähren, nicht vermindern; eher könnte sie dasselbe erhöhen, indem das Aufsuchen dieser Ausnahmefälle seinerseits einen Leitfaden für die Untersuchung der betreffenden Classe von Correlationen an die Hand giebt.

Ich werde einen speciellen Fall, welcher sich als ein solcher Ausnahmefall erweisen wird, in Betracht ziehen, was auf ein bekanntes Theorem aus der Lehre von den Kegelschnitten und den entsprechenden Satz für höhere algebraische Curven führen wird.

Eine der am häufigsten untersuchten Curvengruppen ist ein Kegelschnittbüschel, das Ensemble der Kegelschnitte, welche durch vier gegebene Punkte hindurchgehen. Dasselbe wird, wenn

$$F(x, y) = 0, \qquad G(x, y) = 0$$

die Gleichungen zweier seiner Kegelschnitte sind, durch die Gleichung

$$\frac{G(x, y)}{F(x, y)} = p$$

dargestellt, wo p der die einzelnen Kegelschnitte des Büschels charakterisirende Parameter ist.

Versteht man aber unter $F = 0$, $G = 0$ die Gleichungen beliebiger anderer Curven, so charakterisirt die Gleichung $\frac{G}{F} = p$ ein beliebiges Curvenbüschel.

Wir wollen ein solches auf folgende Weise zur Construction einer Correlation benutzen:

Seien A, A irgend zwei der Mittelpunkte des Büschels (nämlich der gemeinschaftlichen Schnittpunkte sämmtlicher Curven), so werde durch diese Punkte eine Gerade — also eine gemeinschaftliche Sehne

---

eine Curve bilden; man findet sie, indem man an die C-Curve und je eine Curve der Curvenschaar die gemeinschaftliche Tangente construirt. Dieses ist in so fern eine besondere Eigenschaft, als Correlationen im Allgemeinen, wie wir beispielsweise bei der Collineation gesehen haben, nur eine endliche Anzahl sich selbst entsprechender Punkte besitzen.

des Büschels — gelegt und auf dieser ein Punkt C angenommen; legt man durch C eine beliebige Gerade, so sollen zwei der Schnittpunkte der letztern mit einer Curve des Büschels zwei entsprechende Punkte P, Π sein.

Die Definition ist freilich in so fern noch nicht ganz bestimmt, als noch nicht gesagt ist, welche der Schnittpunkte gemeint werden. Für die hier zu machende Anwendung genügt es, festzusetzen, dass es diejenigen Punkte sein sollen, welche, wenn sich die Gerade $CP\Pi$ in der Richtung nach $CA\mathfrak{A}$ hin dreht, in dem Moment des Zusammenfallens beider Linien respective mit A, $\mathfrak{A}$ identisch werden.

Diese Correlation soll in der Nähe der Punkte A, $\mathfrak{A}$, welche als Mittelpunkte entsprechender Strahlbüschel aufzufassen sind, untersucht werden.

Seien $x+dx$, $y+dy$ die Coordinaten eines Punktes in der Nähe von A und $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$ die des entsprechenden Punktes in der Nähe von $\mathfrak{A}$, so haben wir, weil nach der Definition der Gleichungen $G=0$, $F=0$ für die Coordinaten der Mittelpunkte A, $\mathfrak{A}$ erfüllt sein müssen:

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}\partial y}{\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy}=p=\frac{\frac{\partial G}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial G}{\partial \eta}d\eta}{\frac{\partial F}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial F}{\partial \eta}d\eta},$$

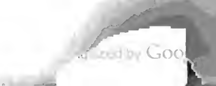
so dass also zwischen den trigonometrischen Tangenten $\frac{dy}{\partial x}=t$, $\frac{d\eta}{d\xi}=\tau$ die lineare Beziehung herrscht:

$$\frac{G'(x)+G'(y)\,.\,t}{F'(x)+F'(y)\,.\,t}=\frac{G'(\xi)+G'(\eta)\,.\,\tau}{F'(\xi)+F'(\eta)\,.\,\tau}.$$

Die beiden Tangentenbüschel stehen demnach in projectivischer Beziehung, und es gilt jedenfalls der Satz:

Jedes Curvenbüschel hat die Eigenschaft, dass die in zwei Mittelpunkten des Büschels an jede seiner Curven gelegten Tangenten sich auf einem Kegelschnitt treffen. Ausgenommen ist natürlich der Fall, dass die Determinante der Functionen F, G für die Coordinaten eines der Punkte A, $\mathfrak{A}$ oder beider entweder verschwindet, oder unstetig wird.

Da die Correlation, mit welcher wir uns hier beschäftigen, in die Classe derjenigen gehört, für welche oben das allgemeine Theorem gefunden wurde, dass die geradlinigen Verlängerungen entsprechender



Strahlen zweier Büschel sich auf einer Geraden schneiden, so müsste der vorhin genannte Kegelschnitt in Gerade degeneriren, wenn die Punkte A, $\mathfrak{A}$ keine Ausnahmepunkte wären. Man erkennt aber leicht, dass sie wirklich als Ausnahmepunkte aufgefasst werden müssen; der Umstand, dass der Punkt C, der doch für die Construction der Correlation sehr wesentlich war, aus den letzten Betrachtungen ganz herausgegangen ist, deutet schon darauf hin. Wir haben daher Veranlassung, das Verhalten der zu den Punkten A, $\mathfrak{A}$ gehörigen Strahlbüschel genauer zu untersuchen.

Wenn sie perspectivische Lage haben sollten, so müsste unter den unendlich vielen Paaren entsprechender Strahlen eines sein, welches, hinreichend verlängert, zusammenfiele; oder, was dasselbe ist: eine Curve des Büschels müsste die Gerade $A\mathfrak{A}$ doppelt, nämlich in den Punkten A und $\mathfrak{A}$ berühren.

Die Gleichung

$$\frac{G'(x)+G'(y)\,.\,t}{F'(x)+F'(y)\,.\,t}=\frac{G'(\xi)+G'(\eta)\,.\,\tau}{F'(\xi)+F'(\eta)\,.\,\tau}$$

der projectivischen Beziehung müsste daher erfüllt werden, wenn man in sie

$$\tau=t=\frac{\eta-y}{\xi-x}$$

hineinsetzt. Es müsste also für die Coordinaten x, y und ξ, η der Punkte A und $\mathfrak{A}$ die Gleichung bestehen:

$$\begin{vmatrix}(\xi-x)F'(x)+(\eta-y)F'(y), & (\xi-x)F'(\xi)+(\eta-y)F'(\eta)\\ (\xi-x)G'(x)+(\eta-y)G'(y), & (\xi-x)G'(\xi)+(\eta-y)G'(\eta)\end{vmatrix}=0.$$

Die weitere Untersuchung wird am einfachsten, wenn man nach der bekannten Methode die Functionen F, G durch Einführung einer dritten Variabeln, welche hernach gleich 1 gesetzt wird, homogen und von den Sätzen über homogene Functionen Gebrauch macht.

Man erhält auf diese Weise die Identitäten

$$\left.\begin{aligned}F(x,y)&=f(x,y,z)=\frac{1}{n}\,(xf'(x)+yf'(y)+zf'(z))\\ G(x,y)&=g(x,y,z)=\frac{1}{n}\,(xg'(x)+yg'(y)+zg'(z))\end{aligned}\right\}\quad\text{für } z=1,$$

und das Entsprechende für ξ, η, und $\zeta=1$; auch ist

$$F'(x)=f'(x)$$

u. s. w.

Da nun nach der Voraussetzung $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ ist, so folgt, dass man

$$xF'(x) + yF'(y) = -zf'(z)$$
$$xG'(x) + yG'(y) = -zg'(z)$$

setzen darf, und Analoges gilt für ξ, η.

Die Substitution dieser Ausdrücke in die linke Seite der fraglichen Gleichung liefert:

$$\begin{vmatrix} \xi f'(x) + \eta f'(y) + zf'(z), & xf'(\xi) + yf'(\eta) + \zeta f'(\zeta) \\ \xi g'(x) + \eta g'(y) + zg'(z), & xg'(\xi) + yg'(\eta) + \zeta g'(\zeta) \end{vmatrix};$$

da $z = \zeta = 1$ zu setzen ist, so darf man auch schreiben:

$$\begin{vmatrix} \xi f'(x) + \eta f'(y) + \zeta f'(z), & xf'(\xi) + yf'(\eta) + zf'(\zeta) \\ \xi g'(x) + \eta g'(y) + \zeta g'(z), & xg'(\xi) + yg'(\eta) + zg'(\zeta) \end{vmatrix};$$

sind nun die Functionen F und G speciell vom zweiten Grade, so ist bekanntlich

$$\xi f'(x) + \eta f'(y) + \zeta f'(z) = xf'(\xi) + yf'(\eta) + zf'(\zeta),$$

und die vorstehende Determinante erhält daher in diesem Falle wirklich den Wert Null, während sie für a n d e r e Functionsformen im Allgemeinen n i c h t verschwindet.

Wir haben demnach den aus der Theorie der Kegelschnitte bekannten Satz bewiesen:

Wenn das Curvenbüschel ein Kegelschnittbüschel ist, so schneiden sich die entsprechenden Tangenten der beiden Tangentenbüschel auf einer G e r a d e n.

Wenn nur eine der beiden Functionen F, G vom zweiten, die andere vom e r s t e n Grade ist, so bedeutet dieses eine Gruppe von Kegelschnitten, welche einander ähnlich sind, gleiche Hauptaxenrichtungen haben und ausserdem durch z w e i gegebene Punkte hindurchgehen. Auch für diese gilt der so eben bewiesene Satz.

Vergleichen wir die drei letzten Theoreme mit einander, so erscheint das zweite als eine Ausnahme des ersten, das dritte als eine Ausnahme des zweiten und d a h e r der Hauptregel entsprechend.

Die Kegelschnitte bilden hier einen G e g e n s a t z zu den höhern Curven; ein solcher Gegensatz trat auch gleich am Anfange hervor, indem bei der Untersuchung entsprechender Strahlbüschel sich zeigte, dass hierbei — vom Standpunkte der Correlation betrachtet — die Projectivität und demnach der Kegelschnitt die Regel, jede andere

Beziehung zwischen Strahlbüscheln und demnach jede andere Schnittcurve die Ausnahme bildet. Ob diese Betrachtungsweise die natürliche ist, wage ich freilich vor der Hand nicht zu entscheiden.

Ich möchte damit diese einfachen Betrachtungen schliessen; ich beabsichtigte damit vornehmlich, in Erinnerung zu bringen, wie man mit den älteren Hilfsmitteln der Analysis und vor Allen vermittelst der Cartesius'schen Coordinaten ohne grosse Rechnung der synthetischen Geometrie doch erhebliche Dienste leisten kann. Damit soll den gegenwärtig in der analytischen Geometrie mit so grossem Erfolge angewandten homogenen Coordinatensystemen keineswegs zu nahe getreten werden; aber die rechtwinkligen Coordinaten sind durchaus nicht für die Geometrie veraltet; sie sind für dieselbe vielmehr nach wie vor als fundamentales Coordinatensystem von grösster Wichtigkeit, ebenso wie für die Mechanik und aus denselben Gründen.

Ausserdem giebt es Gebiete in der Geometrie, für welche sie recht eigentlich geschaffen sind und vor jedem andern Coordinatensystem den Vorzug verdienen. (Beispiel: die Entwickelung der Symmetrieeigenschaften der Kegelschnitte).

Dass sie nicht überall hingehören, ist ohne Weiteres zuzugeben, aber dasselbe gilt von allen andern Coordinatensystemen, auch von den trilinearen.

Eine auf fundamentalen Principien begründete und dabei doch möglichst detaillirte vergleichende Kritik der verschiedenen Coordinationsmethoden (Coordinatensysteme und Correlationen), verbunden mit Proben ihrer Leistungsfähigkeit dürfte die sowohl dem philosophischen als dem speciell geometrischen Interesse entsprechendste Einleitung in die wissenschaftliche Geometrie — analytische sowohl, als auch synthetische — sein. Vielleicht würde eine derartige Kritik auch aus zureichenden Gründen beurteilen lehren, was in der Geometrie sich naturgemässer durch Calcul und was naturgemässer durch synthetisch-geometrische Betrachtung machen lässt.

Anmerkung. Wenn eine gemischte Darstellung uns als „systemlos" weniger zusagt, so hat das seinen guten Grund darin, dass bei derartigen Darstellungen — allerdings mit Ausnahme des Steiner'schen Meisterwerkes — wohl selten in der Auswahl dessen, was auf die eine oder die andere Art zu behandeln ist, principiell verfahren wird.

XIII.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei orthogonaler und bei perspectivischer Darstellung.

Von

Herrn **Josef Bazala**,

Lehrer der Mathematik und der darstellenden Geometrie an der öffentlichen Oberrealschule in der Josefstadt in Wien.

(Mit 2 Tafeln.)

---

§. 1.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei gewöhnlicher Darstellung durch Grund- und Aufriss.

Die Flächen, deren Beleuchtungs-Constructionen Gegenstand dieser Abhandlung sind, werden durch zwei Systeme von ebenen Curven charakterisirt; die durch eine bestimmte Gerade A [Taf. VI., Fig. 1.] gehenden Schnitte M, M_1, M_2 ... lassen sich auf einander in zu dieser Geraden normalen Richtungen projiciren, während die zu derselben normalen Schnitte P durch Centralprojectionen aus Punkten dieser Geraden A in einander übergehen. Wir nennen nach Professor Schlesinger *) die ersteren Linien Seitenlinien, die letzteren Formlinien und die Gerade A Scheitelgerade der Fläche.

---

*) Josef Schlesinger „Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie". S. 359, Wien.

In Fig. 1. der Tafel VI. sind uns von einer derartigen Fläche die Scheitelgerade A, eine Formlinie P und eine Seitenlinie M gegeben. Um die Isophoten der dadurch bestimmten Fläche für eine gegebene Lichtstrahlenrichtung l darzustellen, werden wir die Isophotenpunkte einzelner Seitenlinien derselben construiren und sie dann entsprechend verbinden. Sollen beispielsweise die in der Seitenlinie M_1 liegenden Isophotenpunkte bestimmt werden, so suche man die Lagen E derjenigen Ebenen auf, welche die gegebene Fläche in diesen Punkten berühren. Diese Ebenen müssen sämmtlich zu der im Punkte a_1 an P geführten Tangente t_1 parallel sein und mit der Lichtstrahlenrichtung l Winkel einschliessen, deren Sinus respective 0, 0·1, 0·2, 0·3 ... 0·9, 1 sind.

Um diese Ebenen möglichst einfach zu erhalten, legen wir in einer Hilfsfigur 1a durch einen in der verticalen Projectionsebene liegenden Punkt S einen Lichtstrahl l und construiren zehn Rotationskegel mit dem gemeinschaftlichen Scheitel S und der gemeinsamen Achse l, denen die Beleuchtungsstärken 0, 0·1, 0·2, 0·3 ... 0·9, 1 entsprechen. Klappt man die horizontal projicirende Ebene von l, welche wir in der Folge wegen ihrer grossen Wichtigkeit Lichtrissebene nennen wollen, um l' in die horizontale Projectionsebene um [h'', h' senkr. x, $S'S_0$ senkr. l', $S'S = S'S''$, S_0h'], trägt dann auf der zu l_0 normalen Geraden $S_0\overline{10}$ eine beliebige Strecke zehnmal auf und projicirt die dadurch entstandenen Punkte in der Richtung l_0 auf den aus S_0 mit dem Radius $S_0\overline{10}$ geführten Halbkreis k_0, so schliessen die durch den Scheitel S_0 und die Punktreihe k_0 gehenden Strahlen mit l_0 Winkel ein, deren Sinus respective 0, 0·1, 0·2, 0·3 ... 0·9, 1 sind. Durch Rotation dieses Büschels Sk um den Lichtstrahl l entstehen die oben genannten Kegel. Zieht man nun durch S eine zu t_1 [Fig. 1.] parallele Gerade und legt durch dieselbe an die zehn Kegel Berührungsebenen E, so müssen zu denselben die durch die gesuchten Isophotenpunkte der Seitenlinie M_1 gehenden Berührungsebenen der gegebenen Fläche parallel sein.

Damit die einzelnen Berührungsebenen des Kegelbüschels leicht und genau construirt werden können, wurde derselbe durch eine durch S' [Fig. 1a] gehende und auf l normal stehende Ebene mno_0 [$S'\Theta_0$ senkr. l_0] geschnitten und der Schnitt, welcher aus concentrischen Kreisen besteht, deren Radien sich im Lichtrisse auf $S'O_0$ ergeben, um die Trace mn in die Grundrissebene umgelegt [$S'O_1 = S'O_0$ ...]. Einer dieser Kreise schrumpft in den Punkt O_1 zusammen, während ein anderer unendlich gross wird; sowohl diese Kreise als auch die zugehörigen Kegel wollen wir mit den Zeigern 0, 1, 2,

3 ... 10 bezeichnen. Nun hat man von der horizontalen, zu t_1 [Fig. 1.] parallelen Geraden Sd [Fig. 1a] den Durchschnittspunkt d mit der Ebene mno zu bestimmen und von demselben Tangenten an die concentrischen Kreise zu führen, durch welche dann die zu bestimmenden Berührungsebenen E der Kegel gehen müssen.

Weil die den einzelnen Seitenlinien M_1, M_2, M_3 ... der gegebenen Fläche entsprechenden, durch S nach den Richtungen t_1, t_2, t_3 ... zu führenden Geraden sämmtlich horizontal sind, bestimmen wir die horizontale Projection D' [Fig. 1a] des Durchschnittes D der durch S gehenden horizontalen Ebene mit der Ebene mno des Kreisbüschels [$S_0D_0 \parallel l'$, $D_0D' \parallel mn$] und die Umlegung D_1 desselben [$S'o = S'D_0$, $oD_1 \parallel mn$]. Wird nun $S'd'$ parallel zu t_1 [Fig. 1.] geführt, so ergibt sich schon in der Geraden D' [Fig. 1a] der Punkt d' und durch Führung der zu l' parallelen Geraden $d'd_1$ in der Geraden D_1 die Umklappung d_1 des Durchstosspunktes d. Man kann unmittelbar d_1 erhalten, wenn man einfürallemal $o\mathfrak{S}$ gleich der Entfernung des Punktes S' von der Geraden D' macht und anstatt durch S' durch den Punkt $\mathfrak{S}$ die Parallelen zu den Tangenten von P zieht.

Die durch d_1 an den Kreisbüschel geführten Tangenten schneiden die Horizontaltrace mn in den Punkten 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. Nun denken wir uns die Hilfsfigur 1a mit der Hauptfigur 1 so vereinigt, dass S' auf A', mn auf mn und der Raumpunkt S in die Scheitelgerade A zu liegen kommt. Werden dann durch die Punktreihe mn die zu t_1 parallelen Horizontaltracen der durch S gehenden Ebenen E geführt *), so liefern dieselben auf M_1' eine Punktreihe, welche, mit S verbunden, die Schnittgeraden der Ebenen E mit der Ebene der Seitenlinie M_1 liefert, so dass dann diese Geraden die Richtungen der Tangenten T_1 vorstellen, welche M_1 in den gesuchten Isophotenpunkten berühren.

Nun denken wir uns die Seitenlinie M_1 sammt dem Büschel SM_1' auf die Ebene M in der Richtung a_1a projicirt, was einfach durch die blosse Projection der Punktreihe M_1' auf M' geschieht. Projicirt man schliesslich dieses Gebilde M in der zur Projectionsachse x_1 normalen Richtung $a'x$ auf die zu x_1 parallele Gerade $S'x$, so ergeben sich in der Hilfsfigur durch den Büschel $S''x$ die Richtungen der verticalen Projectionen T'' der an M zu führenden Tangenten. Ist M'' eine beliebig gezogene Curve, deren Entstehungsgesetz nicht bekannt ist, so ist es am zweckmässigsten, ihre Evolute E'' zu zeichnen, in der Nebenfigur aber statt des Büschels $S''x$ den Normalbüschel $S_n\overline{zz}$ desselben dadurch zu construiren, dass man $S'S''$

*) Mehrere der nun folgenden Parallelprojectionen sind in der Figur nicht dargestellt, weil sie blos der Erklärung wegen angeführt werden.

einfürallemal nach $S'S_n$ aufträgt und die Punktreihe $S'x$ um 90° nach zz dreht, das heisst, in der Richtung xf [Fig. 1., $S'f = S'x$] auf die Gerade $S'z$ projicirt. Anstatt aber die Punktreihe mn zuerst in der Richtung e_1, a_1' auf M_1', von hier in der Richtung $a_1'a'$ auf M_1', dann in der Richtung $a'x$ auf $S'x$ und schliesslich in der Richtung xf auf $S'z$ zu projiciren, kann man in der Hilfsfigur die Punktreihe mn sofort in der aus der Hauptfigur sich ergebenden Richtung e_1f auf den Träger $S'z$ projiciren. Werden dann zu den Strahlen des Büschels S_nz parallele Tangenten an die Evolute E'' gezogen, so treffen dieselben M'' in den gesuchten Berührungspunkten (4)'', (3)'', (2)'', (1)'', (0)'' der Tangenten T''. Damit man in der Hilfsfigur nicht Punkte auf den Träger $S'z$ projicire, welche man bei M'' nicht anwenden kann, ist es zweckmässig, durch S_n zwei Strahlen S_nz zu führen, welche zu den Normalen der Endpunkte der Curve M'' parallel sind; dann braucht man nur die zwischen die beiden sich ergebenden Punkte z zu liegen kommenden Punkte der Reihe zu construiren. Projicirt man nun die auf M'' construirten Punkte zuerst nach M', von hier nach M_1' in der Richtung $a'a_1'$ und zuletzt in den Aufriss, so ist eine Gruppe von Isophotenpunkten dargestellt. Von den Punkten der Selbstschattengrenze muss man wegen der Construction des Schlagschattens auch die unsichtbaren Projectionen darstellen.

Der in der Nebenfigur zu d_1O_1 normale Strahl des Büschels d_1 liefert bei obiger Construction diejenigen Punkte der Seitenlinie M_1, welchen ein Maximum der Beleuchtungsstärke zukommt. Es ist leicht einzusehen, dass man durch Unterteilung der Scala $S_0\overline{10}$ Punkte einer beliebigen Beleuchtungsstärke erhalten und auch zu jedem Punkte der gegebenen Fläche durch Ausführung obiger Construction in umgekehrter Aufeinanderfolge der Beleuchtungsstärke bestimmen kann.

Damit man bei der Behandlung einer Seitenlinie die von der früheren herrührenden Punktreihen mn, zz, M'' und M' ausradiren könne, ohne dass dadurch die ganze Figur ungenau wird, ist es notwendig, vorerst diejenigen Linien, auf welche unsere Construction gegründet ist, mit Tusche ganz dünn auszuziehen. Die ganze Arbeit wird bedeutend vereinfacht, wenn man die Constructionen der Isophotenpunkte auf allen Seitenlinien M_1, M_2, denen dieselbe Tangentenrichtung t_1, t_2 entspricht, unmittelbar nach einander vornimmt, weil man dann für dieselben nur e i n e Punktreihe mn darzustellen braucht, welche für die Seitenlinie M_2 in der Richtung e_2f auf den Träger zz zu projiciren ist.

Die in der Nebenfigur durch d_1 zu führenden Tangenten treten

immer paarweise auf; wenn daher d_1 mit einem der Schnittpunkte des Kreisbüschels und der Geraden D_1, z. B. mit dem Punkte d_9 zusammenfällt, so ergeben sich bei dem betreffenden Kreise zwei zusammenfallende Tangenten τ_9. Führt man dann parallel zu $\mathfrak{S}d_9$ an P' [Fig. 1.] Tangen t_9, so bekommt man dadurch die dem Punkte d_9 entsprechenden Seitenlinien M_9 und kann nach dem allgemeinen Verfahren ihre Isophotenpunkte darstellen. Die Doppeltangente τ_9 liefert dabei immer zwei zusammenfallende Isophotenpunkte 9, so dass die in diesen Doppelpunkten an die Seitenlinie der Fläche geführten Tangenten a_9 auch Isophotentangenten sind. Man bekommt sie am einfachsten, wenn man die Tangente [9]$''\alpha$ der Seitenlinie M zieht und ihren in A'' liegenden Schnittpunkt α markirt.

Construirt man die Isophotenpunkte, welchen zu x_1 normale Tangenten t_3 [Fig. 1.] entsprechen, so sind dieselben zugleich Punkte der Verticalcontour, für welche die zugehörigen Contourtangenten, welche auch Tangenten der Aufrissisophoten sind, sich auf die oben angewandte Art ergeben. Von der grössten Wichtigkeit für das Zeichnen der Isophoten sind auch die beiden in der Flächenkante M liegenden Reihen von Isophotenpunkten.

Bei der zu l' normalen Tangente t_4 von P', durch deren Berührungsqunkt a_4 diejenige Seitenlinie M_4 gehen muss, in welcher der Lichtpol 10 liegt, führt das allgemeine Verfahren zu keinem Resultate. Da jedoch die zu suchenden Berührungsebenen den Kegelbüschel in denjenigen Erzeugenden berühren, welche in der Lichtrissebene liegen, so ergeben sich Punkte ihrer zu mn parallelen Horizontaltracen im Durchschnitte der Geraden l' mit dem Büschel S_0k_0. Die Richtung, in welcher diese Punktreihe l' auf $S'z$ zu projiciren ist, erhält man in der Hauptfigur in e_4f durch den Durchschnittspunkt e_4 von t_4 mit l'.

Wenn die beleuchtete Fläche eine Horizontalcontour besitzt, so sind die Isophotenpunkte derselben für das Zeichen der Grundrissisophoten sehr notwendig. Da die zugehörigen Berührungsebenen sämmtlich vertical sind, haben wir durch S eine verticale Gerade zu führen, welche die Ebene mno in S' trifft, aus welchem Punkte die Tangenten des Kreisbüschels zu ziehen sind. In diesem Falle ergeben sich die Horizontaltracen dadurch am einfachsten, dass man diese Tangenten durch Zurückführung ihrer in D_1 liegenden Punkte in den Raum aufdreht. Der Büschel $S'D'$ stellt dann die horizontalen Projectionen dieser Tangenten und daher auch die gesuchten Tracen vor, deren Richtungen, welche allein für die weitere Construction notwendig sind, man aber einfacher in dem Büschel $\mathfrak{S}D_1$ erhält. Die nach diesen Richtungen an die Horizontalcontouren zu ziehenden

Tangenten liefern Isophotenpunkte und im Grundrisse auch Isophotentangenten. Um aber diese Contouren nicht vorerst zeichnen zu müssen, kann man die Tangenten an die ihr ähnliche Formlinie P ziehen, die Berührungspunkte mittelst des Aehnlichkeitspunktes A' übertragen und zuletzt die verticalen Projectionen bestimmen.

Hat man eine für das Zeichnen der Isophoten hinreichende Anzahl von Punkten construirt, so kann man auch einfach durch schiefe Projection der construirten Punkte der Selbstschattengrenze erhalten.

Ist M'' vom zweiten Grade oder eine andere Curve, deren Tangenten- oder Normalen-Construction bekannt ist, so wird man nicht die Evolute E'' construiren, sondern die Normalen oder Tangenten von durch die Hilfsfigur gegebenen Richtungen bestimmen. In letzterem Falle ist unsere Construction ein wenig dahin abzuändern, dass durch dieselbe in der Hilfsfigur statt des Normalbüschels $S_{n}z$ der Tangentenbüschel $S''x$ resultirt.

§. 2.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei axonometrischer Darstellung.

Bei axonometrischer Darstellung ist eine Fläche der im vorigen Paragraphen charakterisirten Art durch die Bilder der Scheitelgeraden BC [Taf. VI., Fig. 2.], einer Formlinie P und einer Seitenlinie, durch den Durchstosspunkt A von BC mit der Ebene P und den Neigungswinkel ν der letzteren gegen die Bildebene vollkommen bestimmt. In unserer Figur wurde angenommen, dass sämmtliche Seitenlinien Halbellipsen sind, welche durch die von A gleich weit entfernten gemeinschaftlichen Scheitel B und C gehen, so dass durch diese Bedingung die Annahme einer gegebenen Seitenlinie entfällt. Wir wollen zeigen, wie man in einem solchen Falle für eine gegebene Lichtstrahlenrichtung l, l' die Construction des vorigen Paragraphen am einfachsten ausführen kann.

Wird eine Halbellipse M geführt, deren Bild ein Halbkreis ist, so lassen sich alle Seitenlinien auf dieselbe parallel projiciren. In der Nebenfigur 2a führen wir durch einen Punkt S, S' einen Lichtstrahl l, l', welcher die zu P [Fig. 2.] parallele Grundebene der Nebenfigur in h trifft und drehen dann diese Ebene um die zum Bilde SS' normale Achse x so lange, bis sie den Neigungswinkel ν zurücklegt und somit zur Bildebene parallel wird, wobei h und l' in die Lagen (h) und (l') kommen [$hh_2 \parallel x$, $h\alpha(h)$ senkr. x, $\alpha(h) = S'h_2$,



$(h)S'(l')$]. Wird $S'S_2$ normal zu $S'h_2$ und SS_2 parallel zu x geführt, so ergibt sich in S_2S' die wahre Länge der Projicirenden SS' und man kann dann in der umgeklappten Grundebene das ganze in der Figur 1a construirte ebene System mno auf die dort ersichtliche Art darstellen [$S'S_0$ senkr. (l'), $S'S_0 = S'S_2$, $S_0(h)$, $S_0\overline{10}$ senkr. $S_0(h)$ u. s. w., (D_1), $(\mathfrak{S})$]. Die Geraden (D_1) und $(m)(n)$ dieses ebenen Systemes werden in die ursprüngliche Lage der Grundebene nach D_1 und mn aufgedreht, indem man $(o)o$ normal zu x zieht und die Gerade δo, und die zu ihr parallele mn führt, worauf in der Hauptfigur die Geraden x, mn und $(m)(n)$ parallel zu den gleichnamigen Geraden der Hilfsfigur zu ziehen sind.

Um nun die in irgend einer Seitenlinie M_1 liegenden Isophotenpunkte zu erhalten, ziehen wir in der Hauptfigur die Tangente t_1, welche die Richtung des die gegebene Fläche nach M_1 berührenden Cylinders angibt, und bestimmen die Lage $(e_1)\beta$, in welche dieselbe tritt, wenn man die Ebene P um die Achse x in eine zur Bildebene parallele Lage dreht. Führt man zu dieser Geraden in der Nebenfigur eine Parallele durch $(\mathfrak{S})$, so ergibt sich der Punkt (d_1), aus welchen man an den Kreisbüschel die Tangenten ziehen kann, deren Schnittpunkte mit $(m)(n)$ markirt werden. Für die weitere Construction denken wir uns die Hilfsfigur so in die Hauptfigur gelegt, dass S' auf A und S in die Scheitelgerade AB zu liegen kommt, und dass sich die Geraden x, mn und $(m)(n)$ paarweise decken. Weil wir uns, wie im vorigen Paragraphen, wieder die Seitenlinie M_1 sammt ihren Isophotenpunkten und den durch dieselben gehenden Tangenten der Seitenlinie auf M projicirt denken, haben wir die Punktreihe $(m)(n)$ in der Richtung $(e_1)e_1$ auf die Gerade mn, von hier in der Richtung e_1a_1 auf den Träger M_1' und von hier in der Richtung a_1a auf die Gerade x zu projiciren. Der Büschel Sx gibt dann schon die Richtungen an, nach welchen an M Tangenten zu führen sind. Um die Richtungen der entsprechenden Normalen zu bekommen, hat man diesen Büschel Sx noch um 90^0 zu drehen, d. h. die Punktreihe x in der Richtung aB auf den Träger BC zu projiciren. Diese vier Parallelprojectionen kann man aber in eine einzige vereinigen, deren Richtung sich in e_1B ergibt, und aus welcher in der Hilfsfigur die Punktreihe z resultirt. Wird $S'S$ nach $S'S_n$ aufgetragen, so kann man zu dem Büschel S_nz parallele Radien in der Hauptfigur ziehen, um die Punktreihe M zu erhalten, welche schliesslich in der Richtung aa_1 auf die Seitenlinie M_1 projicirt wird. Weil in der Hilfsfigur d_1 in einem der concentrischen Kreise angenommen wurde, ergibt sich auch eine Isophotentangente t_7.

Alle oben gemachten Bemerkungen über das Maximum der Beleuchtungsstärke auf einer Seitenlinie, die Auffindung der Be-

leuchtungsstärke eines beliebigen Punktes derselben, die zweckmässigste Aufeinanderfolge der zu behandelnden Seitenlinien und über die Kante der gegebenen Fläche haben auch hier, sowie auch bei perspectivischer Darstellung ihre volle Giltigkeit.

Sind die Seitenlinien nicht elliptisch, sondern ist eine beliebig geformte Seitenlinie M gegeben, so construire man die Evolute ihres Bildes und ziehe die zu den Strahlen des Normalbüschels $S_n z$ parallelen Tangenten derselben. Die Lichtpole der Fläche liegen in derjenigen Seitenlinie, welcher die zu mn parallele Tangente t_4 entspricht; um ihre Isophotenpunkte zu erhalten, muss man, wie im §. 1. den Büschel $S_0 k_0$ [Fig. 2a] durch die Gerade (l_1) schneiden, die dadurch entstehende Punktreihe in der in Fig. 2. durch die zu x normale Normale $e_4(e_4)$ sich ergebenden Richtung $e_4 B$ auf die Gerade z [Fig. 2a] projiciren und dann den Normalbüschel $S_n z$ dem allgemeinen Vorgange unterziehen.

Auch bei axonometrischer Darstellung ist es vorteilhaft, die Isophotenpunkte jener Formenlinien zu construiren, in welchen die Fläche von zu ihrer Scheitelgeraden parallelen Cylindern berührt wird. Man hat die durch S' und den Kreisbüschel sich auf (D_1) ergebende Punktreihe nach D_1 aufzudrehen, wobei nur die eine Hälfte der symmetralen Punktreihe D_1 construirt zu werden braucht, während sich die andere als Copie ergibt, und an P zum Büschel $\mathfrak{S}D_1$ [$\mathfrak{S})\mathfrak{S}$ senkr. x] parallele Tangenten zu führen. Die Berührungspunkte derselben sind im gezeichneten Falle schon die verlangten Isophotenpunkte.

Von grosser Wichtigkeit für das Zeichnen der Isophoten sind wieder die in der Contour liegenden Punkte derselben; sie lassen sich als Isophotenpunkte eines auf der Bildebene normal stehenden Berührungscylinders der gebenen Fläche darstellen. In der Hilfsfigur hat man durch S eine zur Bildebene normale Gerade zu führen, welche die zur Lichtstrahlenrichtung normale Ebene mno in einem Punkte v trifft; um seine umgeklappten Lagen v_1 und (v_1) zu erhalten, führen wir vorerst durch S eine zu l' parallele Gerade Ss, welche die Ebene mno in einem Punkte s trifft [$S_0 s_0 \parallel (l')$, $s_0(s')$ senkr. (l'), $(s')s$ senkr. x]. Wird die Ebene mno um die Trace mn in die Grundebene umgeklappt, so kommt die Strecke $S's$ nach $S's_1$. Um die umgekehrte Lage des Punktes v zu erhalten, braucht man somit nur $v\delta \parallel sS'$, $\delta v_1 \parallel S's_1$ und $vv_1 \parallel ss_1$ zu ziehen. Die zweite Umklappung (v_1) ergibt sich dann durch $\varepsilon(v_1 \parallel (l)$ und $v_1(v_1)$ senkr. x. Die aus dem Punkte (v_1) an den Kreisbüschel geführten Tangenten geben eine Punktreihe $(m)(n)$, welche nach mn aufgedreht wird, so dass man dadurch im Büschel $v\,\overline{mn}$ schon die Lagen derjenigen auf

der Bildebene normal stehenden Berührungsebenen erhält, welche den gesuchten Isophotenpunkten der Contour entsprechen. Zieht man zum Strahle v_5 in der Hauptfigur an P eine parallele Tangente $a_5\varepsilon$, so ergibt sich durch ihren Berührungspunkt a_5 diejenige Seitenlinie der Fläche, in welcher der gesuchte Contour-Isophotenpunkt 5 liegen muss. Um an diese Seitenlinie die zu εa_5 parallele Tangente zu construiren, denken wir uns dieselbe auf die Linie M in der Richtung $a_5 a$ projicirt und ziehen an letztere die zu εa parallele Tangente $\{5\}\sigma$, so dass dann die durch den sich ergebenden Punkt σ zu εa_5 parallel geführte Gerade t_5 die gesuchte Isophoten- und Contourtangente ist. Der Contour- und Isophotenpunkt 5 ergibt sich durch Führung der zu aa_5 parallelen Geraden $\{5\}5$. Aus den sich so ergebenden Isophotenpunkten und Isophotentangenten kann man sofort die Flächencontour zeichnen.

Soll der Schlagschatten der behandelten Fläche auf eine durch den Punkt C parallel zur Ebene P gehenden Grundebene construirt werden, so projicire man vorerst die construirten Punkte o der Selbstschattengrenze auf diese Ebene, indem man Co' parallel zu M_1' und oo' parallel zu AB führt. Wird dann durch den Punkt o der Selbstschattengrenze ein Lichtstrahl l und durch o' seine Projection l' geführt, so ergibt sich im Schnittpunkte beider der Schlagschattenpunkt o_3.

§. 3.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei perspectivischer Darstellung.

Bei der in Fig. 3. perspectivisch dargestellten Fläche ist Ω der Augpunkt, $\Omega\Omega_0$ die Distanz, $\mu\nu$ die Fluchtlinie der Formlinien P, von welchen das Bild einer gegeben ist, α der Fluchtpunkt der Scheitelgeraden [$\Omega\pi$ senkr. $\mu\nu$, $\Omega\Omega_0$ senkr. $\Omega\pi$, $\Omega_0\alpha$ senkr. $\Omega_0\pi$]αAB, M das Bild einer Seitenlinie und λ der Fluchtpunkt der parallelen Lichtstahlen.

Die Teilungspunkte t_π und t_α, welche beziehungsweise den Richtungen π und α zukommen, erhält man, wenn man die Strecken $\pi\Omega_0$ und $\alpha\Omega_0$ beziehungsweise nach πt_π und αt_α aufträgt, während sich durch Führung der Geraden $\alpha\lambda$ in λ' der Fluchtpunkt ergibt, welcher den Projectionen der Lichtstrahlen auf die Grundebene P entspricht.

In der Hilfsfigur, welche dasselbe Projectionscentrum besitzt, als die Hauptfiguren, führen wir wieder durch einen beliebigen Punkt S, S' einen Lichtstrahl l, l', welcher die Grundebene $S'_{\mu\nu}$ im Punkte h trifft, und drehen analog der axonometrischen Darstellung diese Ebene um die zu ihrer Fluchtlinie $\mu\nu$ parallele Gerade x, wobei die umgelegte Gerade (l') parallel zu $t_\pi\lambda'$ wird, die neue Lage (h) des Punktes h ergibt sich durch den Strahl $t_\pi h(h)$. Um in der umgelegten Grundebene den bekannten Kreisbüschel construiren zu können, müssen wir die projicirende SS' auch in eine zur Bildebene parallele Lage bringen, indem wir $S'[S]$ normal zu $\mu\nu$ und den Strahl St_α führen. Wird $(m)(n)$ normal zu (l') gezogen und $S'[S]$ nach $S'S_0$ aufgetragen, so kann man auf mehr erwähnte Art den Kreisbüschel sammt den Gebilden (D_1) und $(\mathfrak{z})$ darstellen. Auch bei perspectivischer Darstellung werden wir die Gerade $(m)(n)$ in den Raum aufdrehen und zwar dadurch, dass wir $t_\pi\nu$ parallel zu $(m)(n)$ führen und durch den sich so ergebenden Fluchtpunkt ν die Gerade $S'mn$ ziehen, worauf in der Hauptfigur durch den in der Grundebene P liegenden Punkt A der Scheitelgeraden die Geraden $(m)(n)$ und mn perspectivisch parallel zu den gleichnamigen der Hilfsfigur geführt werden.

Um nach diesen Vorarbeiten die Isophotenpunkte irgend einer Seitenlinie M_1 zu erhalten, führen wir wieder zuerst die ihr entsprechende Tangente t_1 mit dem Fluchtpunkte τ_1, deren Umklappung somit die Richtung $t_\pi\ \tau_1$ haben muss. Wird in der Hilfsfigur der Strahl $(\mathfrak{S})(d_1)$ nach dieser Richtung gezogen, sokann man aus dem sich ergebenden Punkte (d_1) die Kreistangenten führen und ihre in $(m)(n)$ liegenden Schnittpunkte markiren. Zieht man dann in der Hauptfigur durch den in mn und t_1 liegenden Schnittpunkt e_1 den Strahl e_1t_π, so ergibt sich in (e_1) die Umlegung von e_1, wobei x die Drehungsachse ist. Die Punktreihe $(m)(n)$ der Hilfsfigur soll nun auf einander folgend nach den Richtungen $(e_1)e_1$, e_1a_1 und a_1a auf die Geraden projicirt werden, welche sämmtlich durch den Punkt S' räumlich parallel zu den durch A gehenden Geraden mn, M_1' und M' der Hauptfigur zu führen wären. Statt dessen kann man aber in der Hilfsfigur die resultirende Punktreihe $M'\mu$ auch direct aus der zur Bildebene parallelen Punktreihe $(m)(n)$ durch Parallelprojection nach der Richtung e_1a [Hauptfigur] erhalten; der Fluchtpunkt φ_1 dieser Projectionsrichtung muss in der Fluchtlinie $\mu\varphi_1$ der durch die Geraden $(m)(n)$ und M' gehenden Ebene liegen. Diese Fluchtlinie hat man durch den Fluchtpunkt μ einfürallemal parallel zu $(m)(n)$ zu führen, worauf man mittelst der Fluchtlinie $\mu\alpha$ der gegebenen Seitenlinie M an dieselbe die zu den Strahlen des Büschels SM' parallelen Tangenten führen kann, indem man diesen Büschel durch die Gerade $\mu\alpha$ schneidet und aus den Schnittpunkten die Tan-

genten an M zieht. Die Berührugspunkte derselben werden schliesslich in der Richtung $aa_1\varrho$ auf die Seitenlinie M_1 mit Benutzung der Collineationsachse AB projicirt [(1)$\alpha\beta$, βa_1 1 ...].

Zieht man aus dem Fluchtpunkte r eine Tangente t_4 an P, so gibt deren Berührungspunkt a_4 die Seitenlinie M_4 an, in welcher ein Lichtpol liegt. Um die Isophotenpunkte derselben zu erhalten, schneide man analog dem Vorgange des §. 2. den Büschel S_0k_0 durch die Gerade (l'), projicire die sich ergebenden Punkte aus t_n auf den Träger l' und von hier in der Richtung $e_4a\psi_4$ auf die Gerade M'. Die Strahlen des Büschels SM' liefern dann in bekannter Weise die Isophotenpunkte. Die beiden auf einander folgenden Projectionen der Punktreihe (l') durch eine einzige zu ersetzen, ist hier nicht zweckmässig, weil man die dazu erforderlichen Hilfslinien nur bei dieser einen Seitenlinie anwenden könnte.

Wird aus dem Fluchtpunkte α an die gegebene Seitenlinie eine Tangente αk gezogen, so muss durch den Berührungspunkt k diejenige Formlinie gehen, in welcher die gegebene Fläche von einem zur Scheitelgeraden parallelen Cylinder berührt wird; wir wollen die Isophotenpunkte derselben bestimmen. Die aus dem Punkte S' und dem Kreisbüschel sich ergebende Punktreihe (D_1) gibt mit dem Scheitel $(\mathfrak{S})$ die umgelegten Richtungen derjenigen Tangenten, welche nach den Vorgängen der früheren Paragraphen an P zu führen sind. Zieht man somit zu den Strahlen des Büschels $(\mathfrak{S})(D_1)$ durch t_n parallele Gerade, so schneiden dieselben die Fluchtlinie $\mu\nu$ in den Fluchtpunkten 5, 6, 6, 5 ... der genannten Tangenten, aus welchen diese zu ziehen sind. Die sich dadurch ergebenden Berührungspunkte [5], [6], [6] ... werden schliesslich aus dem durch den Projectionsstrahl ka bestimmten Projectionscentrum s in die oben erwähnte Formlinie mit Benutzung der Collineationsachse $\mu\nu$ projicirt [a[5]ψ_5, ψ_5k5 ...].

Wir wollen noch anführen, wie man Punkte und Tangenten der Flächencontour am einfachsten erhält. Um diejenigen Contourpunkte zu bekommen, welche mit dem Punkte p der gegebenen Seitenlinie in derselben Formlinie liegen, denken wir uns einen die gegebene Fläche nach dieser Linie berührenden Kegel mit dem Scheitel σ. Zur Construction der durch σ gehenden Tangenten dieser Formlinie wenden wir die Collineation derselben zur Linie P an, wobei $\mu\nu$ die Collineationsachse und s_1 das Collineationscentrum ist; dann ergibt sich der zu σ collineare Punkt [σ] durch die collinearen Geraden $p\sigma\gamma$ und $a\gamma$[σ]. Aus [σ] werden nun an P die Tangenten [σ][I]ε und [σ][II]δ geführt, dann die ihnen collinear entsprechenden $\sigma\varepsilon$ und $\sigma\delta$ gezogen und schliesslich die Berührungspunkte [I] und [II] aus s_1 nach I und II projicirt.

Die in der perspectivischen Contour der Fläche liegenden Isophotenpunkte kann man durch Construction der Isophoten des durch diese in der Bildebene liegende Linie und das Auge bestimmten Kegels bei Anwendung zweier Projectionsebenen erhalten; doch ist die Ausführung derselben zu umständlich. Um die Isophoten genau zeichnen zu können, wird man lieber von jeder derselben einen der Contour nahe liegenden Punkt des verdeckten Flächenteiles berücksichtigen.

Der Schlagschatten, welchen die dargestellte Fläche auf die Grundebene P wirft, wird auf die im Paragraph 2 angegebene Art construirt.

§. 4.

Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, welche aus zwei auf einander normal stehenden Parallelsystemen congruenter ebener Curven bestehen.

Wenn bei den Flächen, welche Gegenstand dieser Abhandlung sind, die Scheitelgerade sich in unendlicher Entfernung befindet, so müssen, wie sich leicht beweisen lässt, alle Seitenlinien Q congruent und parallel sein, und die Formlinien P fallen ebenfalls congruent aus.

In diesem Falle lassen sich die Isophotenpunkte desjenigen Curvensystemes leichter darstellen, welches zu einer Projectionsebene parallel ist [Fig. 4.], wobei es zweckmässig ist, in der auf mehrerwähnte Art hergestellten Nebenfigur 4a den Schnitt g der zur Lichtstrahlenrichtung normalen Ebene mno mit einer durch S parallel zum zweiten Curvensysteme Q der gegebenen Fläche gelegten Ebene zu bestimmen. Die in der durch S gehenden Horizontalebene liegenden Tracen D und Sp [$S'p' \parallel Q'$, $S''p'' \parallel x$] der beiden genannten Ebenen schneiden sich in einem Punkte p [p', $p'p''$ senkr. x], so dass g' und g'' die Projectionen der gesuchten Schnittgeraden sind; ihre um mn umgelegte Lage g_1 ergibt sich durch Führung der zu l' parallelen Geraden $p'p_1$.

Wird in der Hauptfigur an die gegebene Curve Q eine Tangente t_1 geführt, und will man die Isophotenpunkte der durch den sich ergebenden Berührungspunkt a_1 gehenden Horizontalcurve construiren, so führe man in der Hilfsfigur durch S eine zu t_1 parallele Gerade. Diese trifft die horizontale Projectionsebene und die Ebene mno respective in den Punkten k_1 und d. Bestimmt man nun durch Führung der zu $p''p_1$ parallelen Geraden $d''d_1$ die umgelegte Lage d_1, so kann aus diesem Punkte die Punktreihe mn hergestellt werden. Weil der Büschel $h_1'\overline{mn}$ die Horizontaltracen derjenigen zu t_1 pa-

rallelen Ebenen angibt, welchen die Beleuchtungsstärken 0, 0·1, 0·2 ... entsprechen, sind zu den Strahlen desselben an P parallele Tangenten zu ziehen.

Da wir als Curve P eine Parabel mit dem Brennpunkte F und der Directrix r angenommen haben, bekommt man die betreffenden Berührungspunkte am einfachsten, wenn man zu den Strahlen des letztgenannten Büschels aus F Normale zieht und aus den sich dadurch in r ergebenden Schnittpunkten Parallele zur Parabelachse führt. Um die auf P' construirten Punkte in die durch a_1 gehende Horizontalcurve der gegebenen Fläche zu projiciren, tragen wir auf jedem der zur Parabelachse parallelen Strahlen das Stück $a'a_1'$ auf und projiciren die erhaltenen Grundriss-Isophotenpunkte schliesslich in den Aufriss. Weil in der Hauptfigur der Punkt d_1 in dem Kreise 9 angenommen wurde, ergibt sich auch eine Isophotentangente t_9.

Um die Lichtpole der gegebenen Fläche zu erhalten, ziehe man an Q'' eine zu g'' parallele Tangente t_4'', durch deren Berührungspunkt dann diejenige Horizontalcurve P_4 geführt wird, in welcher die Lichtpole liegen; in der Hilfsfigur ergibt sich durch t_4 der horizontale Durchstosspunkt h_4 und der in g_1 liegende unendlich ferne Punkt d_4, so dass die Tangenten des Kreisbüschels parallel zu g_1 werden.

Die in der Horizontalcontour liegenden Isophotenpunkte werden auf die im §. 1. angegebene Art bestimmt. Es ist auch wichtig, in den beiden das darzustellende Flächenstück begrenzenden Horizontalcurven die Isophotenpunkte darzustellen.

Behufs der Construction der in der Verticalcontour liegenden Isophotenpunkte führen wir in der Hilfsfigur $\mathfrak{S}d_2$ normal zu x, verschaffen uns dann aus d_2 die Punktreihe mn und projiciren diese normal auf die Achse x; der Büschel $S''x$ gibt dann die Richtungen der durch die Isophotenpunkte gehenden Contourtangenten an. Weil die Contour zur Curve Q'' congruent und parallel ist, kann man die betreffenden Berührungspunkte auch in Q'' markiren; durch diese Punkte werden dann Gerade parallel zu x geführt, auf welchen man schliesslich die Strecke $a''a_2''$ aufzutragen hat.

Um die Isophotenpunkte der beiden Grenzschnitte Q und Q_5 zu construiren, machen wir bei der Parabel P die Subtangente des Punktes a' doppelt so gross, als die Abscisse, so dass dann aa' und aa_5' die diesen Curven entsprechenden Tangenten sind. Wird zu t_3' in der Hilfsfigur eine Parallele geführt, so ergibt sich der Punkt d_3, aus welchem die Tangenten an den Kreisbüschel zu zeichnen sind. Ihre in mn sich ergebenden Schnittpunkte sollten hierauf in der Richtung t_3' auf die Trace g' und von hier in der zu x normalen



Richtung auf den Träger x projicirt werden; statt dessen kann man die resultirende Projectionsrichtung e_3x in der Hauptfigur bestimmen, wenn man durch den Endpunkt von Q' die Geraden mn und x parallel zu den gleichnamigen der Hilfsfigur führt. Der sich dann in dieser Figur ergebende Büschel $S''x$ gibt die Richtungen der an Q'' zu führenden Tangenten. Bezüglich des Grenzschnittes Q_5 erhält man die resultirende Projectionsrichtung durch Führung der zur Parabeltangente $\alpha a_5'$ parallelen Geraden $a'e_5$ in e_5x.

Die Durchführung der Constructionen dieses Paragraphen bei axonometrischer oder bei perspectivischer Darstellung kann keine weiteren Schwierigkeiten bereiten.

XIV.

Bedingung einer Canalfläche nebst einigen Bemerkungen an Canalflächen.

Von

R. Hoppe.

Eine Canalfläche wird von einer Linie erzeugt, die bei ihrer Variation mit einem Parameter sich parallel bleibt. Durch diese Entstehung ist zunächst die Canalfläche definirt.

Ferner ist dadurch ihr einfachster analytischer Ausdruck gegeben. Denn derselbe geht aus den Gleichungen einer Parallele mit einer beliebigen Linie (Leitlinie) hervor, indem man die darin enthaltenen 2 specifischen Constanten in beliebiger Abhängigkeit von einander oder von einem Parameter variiren lässt.

Die gemeinsame Normalebene aller Parallelen schneidet die Canalfläche in einer Linie, die zugleich Krümmungslinie und, weil sie in allen ihren Punkten den Normalschnitt darstellt, auch Kürzeste ist. Die andre von jedem Punkte ausgehende Krümmungslinie ist die erzeugende Parallele, die zugleich geodätische Parallele und Parallele im Raume ist. Nimmt man also den normalen Querschnitt und die erzeugende Parallele zu Parameterlinien, so sind die Parameter zugleich die der Krümmungslinien und orthogonal geodätische.

Ist der Querschnitt der Canalfläche gerade, so ist die Fläche abwickelbar, und umgekehrt ist jede Abwickelbare ein Specialfall einer Canalfläche. Nun ist die analytische Bedingung, unter welcher eine beliebig gegebene Fläche abwickelbar ist, bekannt und sehr ein-



fach. Dies bietet Anlass die analoge Bedingung für die allgemeinere Eigenschaft zu suchen, für die nämlich, dass eine beliebig gegebene Fläche Canalfläche sei.

Bezüglich auf Flächen wende ich folgende Bezeichnungen an. Für die beliebigen Parameter u, v ist das Linienelement ∂s ausgedrückt durch

$$\partial s^2 = e\,\partial u^2 + 2f\,\partial u\,\partial v + g\,\partial v^2$$

und t ist der Coefficient des Flächenelements

$$t\,\partial u\,\partial v = \sqrt{eg - f^2}\,\partial u\,\partial v$$

ferner sind p, q, r die Richtungscosinus der Normale, und

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots; \quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots; \quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots$$

Bezüglich auf Curven sind f, g, h; f', g', h'; l, m, n die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale, $\partial\tau$ und $\partial\vartheta$ die Contingenzwinkel der Tangente und Krümmungsaxe, und bezeichnet der Accent die Differentiation nach τ.

§. 1. Bedingung einer Canalfläche für Parameter der Krümmungslinien.

Sind u, v die Parameter der Krümmungslinien, und s_1 die Krümmungslinie $v =$ const, so ist

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial x}{\partial u}; \quad \text{etc.}$$

Dies längs s_1 differentiirt gibt *):

$$\begin{aligned} f_1'\partial\tau_1 &= -\frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{2g}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + Ep\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(Ep - \frac{1}{2g}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

Ist s_1 zugleich Kürzeste, so ist bekanntlich

$$f_1' = p; \quad \frac{\partial e}{\partial v} = 0$$

und es folgt nur weiter, dass

$$\partial\tau_1 = \frac{E}{\sqrt{e}} \tag{1}$$

*) Hoppe, Flächentheorie II. Gl. (5).

ist. Differentiirt man die Gleichung $f_1' = p$ längs s_1 *), so kommt:

$$l_1 \partial\vartheta_1 - f_1 \partial\tau = -\frac{E}{e}\frac{\partial x}{\partial u}\partial u$$

Nach Multiplication mit $\frac{dx}{\partial v}$ gibt die Summe der Analogen:

$$\left(l_1 \frac{\partial x}{\partial v} + m_1 \frac{\partial y}{\partial v} + n_1 \frac{\partial z}{\partial v}\right)\partial\vartheta_1 = 0$$

und zwar ist die Grösse

$$l_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \dots = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & p & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{t}{\sqrt{e}} = -\sqrt{g}$$

nicht null, daher $\partial\vartheta_1 = 0$, das heisst s_1 eben. Hiermit ist der Satz bewiesen:

Eine Krümmungslinie, die zugleich Kürzeste ist, ist eben.

Die zweite Schar Krümmungslinien, $u =$ const, ist dann geodätisch parallel. Da sie aber die Ebene von s_1 zur gemeinsamen Normalebene hat, so ist sie auch im Raume parallel; folglich ist die Fläche eine Canalfläche.

Notwendige und ausreichende Bedingung einer Canalfläche ist also, dass ihre Krümmungslinien orthogonal geodätisch sind, unter gegenwärtiger Voraussetzung über die Parameter ausgedrückt durch

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0$$

Die Anwendung dieses Kriteriums setzt die Kenntniss der Krümmungslinien der gegebenen Fläche voraus, da e den Multiplicator der Differentialgleichung der Krümmungslinien zum Factor hat, wenn man von beliebigen Parametern ausgeht. Zur Herleitung der gesuchten Bedingung ohne Hülfe der Krümmungslinien bieten sich zwei Wege dar. Die Form der Resultate ist verschieden. Beide sind nicht einfach.

*) Ebenda Gl. (19).



§. 2. Erste Methode.

Die Variationsverhältnisse der ersten und zweiten Hauptkrümmungsrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k_1$ und k_2 sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$e + (k_1 + k_2)f + k_1 k_2 g = 0 \tag{2}$$

$$E + (k_1 + k_2)F + k_1 k_2 G = 0 \tag{3}$$

woraus nach Differentiation längs der Fläche in beliebiger Richtung und Elimination von ∂k_1:

$$\begin{vmatrix} \partial E + (k_1 + k_2)\partial F + k_1 k_2 \partial G & F + k_2 G \\ \partial e + (k_1 + k_2)\partial f + k_1 k_2 \partial g & f + k_2 g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} (k_1 - k_2)\partial k_2 \tag{4}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R = \sqrt{e + 2k_2 f + k_2^2 g}$$

so sind die Grössen

$$A = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + k_2 \frac{\partial x}{\partial v}}{R}; \quad \text{etc.}$$

Richtungscosinus der zweiten Hauptkrümmungsrichtung, also auch der ersten Hauptnormalebene. Bleibt deren Stellung in erster Hauptkrümmungsrichtung unverändert, mithin A etc. constant, so ist die genannte Ebene gemeinsame Normalebene der zweiten Schar Krümmungslinien für alle Punkte der ersten und schneidet die Fläche in ihrer ersten Krümmungslinie; diese ist eben, und der Schnitt Kürzeste, folglich die Fläche Canalfläche. Ausreichende Bedingungen der Canalfläche sind daher die 3 analogen Gleichungen:

$$\frac{\partial A}{du} + k_1 \frac{\partial A}{\partial v} = 0; \quad \text{etc.}$$

Es bleibt die Aufgabe, sie auf eine, vom Coordinatensystem unabhängige Gleichung zurückzuführen. Zunächst kann man sie durch ein neues System dreier Gleichungen vertreten, das man erhält, indem man nach Ausführung der Differentiation und Multiplication mit $2R\frac{\partial x}{\partial u}$. $2R\frac{\partial x}{\partial v}$, Rp die Analogen addirt. Die Summen ergeben bzhw.:

$$\frac{\partial e}{\partial u} + (k_1 + k_2)\frac{\partial e}{\partial v} + k_1 k_2 \left(2\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\right) + 2\left(\frac{\partial k_2}{\partial u} + k_1 \frac{\partial k_2}{\partial v}\right) f =$$
$$2\frac{e + k_2 f}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial u} + k_1 \frac{\partial R}{\partial v}\right) \tag{5}$$

$$\left(2\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial e}{\partial v}\right)+(k_1+k_2)\frac{\partial g}{\partial u}+k_1k_2\frac{\partial g}{\partial v}+2\left(\frac{\partial k_2}{\partial u}+k_1\frac{\partial k_2}{\partial v}\right)g=$$

$$2\frac{f+k_2g}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial u}+k_1\frac{\partial R}{\partial v}\right) \qquad (6)$$

$$E+(k_1+k_2)F+k_1k_2G=0$$

Die letzte Gleichung ist nach (3) von selbst erfüllt. Multiplicirt man Gl. (6) mit k_1 und addirt sie zu Gl. (5), so kommt mit Berücksichtigung von Gl. (2):

$$\left(\frac{\partial e}{\partial u}+2k_1\frac{\partial f}{\partial u}+k_1^2\frac{\partial g}{\partial u}\right)+k_2\left(\frac{\partial e}{\partial v}+2k_1\frac{\partial f}{\partial v}+k_1^2\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$+2\left(\frac{\partial k_2}{\partial u}+k_1\frac{\partial k_2}{\partial v}\right)(f+k_1g)=0 \qquad (7)$$

Es soll nun bewiesen werden, dass Gl. (6) schon allein identisch ist mit Gl. (7), mithin auch mit Gl. (5).

Man kann nämlich Gl. (6) nach Multiplication mit k_1-k_2 auch schreiben:

$$K_1-K_2+k_2L_1-k_1L_2=2(k_1-k_2)\{S(f+k_2g)-Mg\} \qquad (8)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$K_1=\frac{\partial e}{\partial u}+2k_1\frac{\partial f}{\partial u}+k_1^2\frac{\partial g}{\partial u};\quad K_2=\frac{\partial e}{\partial u}+2k_2\frac{\partial f}{\partial u}+k_2^2\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$L_1=\frac{\partial e}{\partial v}+2k_1\frac{\partial f}{\partial v}+k_1^2\frac{\partial g}{\partial v};\quad L_2=\frac{\partial e}{\partial v}+2k_2\frac{\partial f}{\partial v}+k_2^2\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$M=\frac{\partial k_2}{\partial u}+k_1\frac{\partial k_2}{\partial v};\qquad S=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial u}+k_1\frac{\partial R}{\partial v}\right)$$

und zwar findet man nach Ausführung der Differentiation:

$$S=\frac{1}{R^2}\{K_2+k_1L_2+2M(f+k_2g)\}$$

so dass Gl. (8) übergeht in

$$K_1+k_2L_1=\frac{R^2+(k_1-k_2)(f+k_2g)}{R^2}(K_2+k_1L_2)$$

$$+2\frac{k_1-k_2}{R^2}[(f+k_2g)^2-R^2g]M$$

Nun ist

$$R^2+(k_1-k_2)(f+k_2g)=e+(k_1+k_2)f+k_1k_2g=0 \qquad (9)$$

$$(f+k_2g)^2-R^2g=f^2-eg=-t^2$$

daher bleibt nur:

$$K_1+k_2L_1=-2\frac{k_1-k_2}{R^2}t^2M$$

Aus Gl. (9) erhält man:

$$-\frac{k_1-k_2}{R^2}=\frac{1}{f+k_2g}=\frac{f+k_1g}{(f+k_1g)(f+k_2g)}=-\frac{f+k_1g}{t^2}$$

daher wird die Gleichung:

$$K_1+k_2L_1+2(f+k_1g)M=0$$

übereinstimmend mit Gl. (7), und diese ist die gesuchte einzige Bedingung der Canalfläche. Alle darin vorkommenden Grössen werden auf bekannte Weise aus den gegebenen Flächengleichungen gefunden, und zwar M nach Gl. (4).

§. 3. Zweite Methode.

Die Eigenschaft einer Canalfläche ist dadurch vollständig bedingt, dass sie eine abwickelbare Mittelpunktsfläche hat. Bezeichnet man die auf die erste Mittelpunktsfläche bezüglichen Grössen mit dem Index 1, so lautet die Bedingung:

$$E_1G_1-F_1^2=0$$

Der zugehörige Hauptkrümmungsradius der Urfläche sei ϱ_1. Die 4 Coefficienten in den Formeln

$$\frac{\partial p}{\partial u}=H\frac{\partial x}{\partial u}+H_1\frac{\partial x}{\partial v};\quad \frac{\partial p}{\partial v}=J\frac{\partial x}{\partial u}+J_1\frac{\partial x}{\partial v} \tag{10}$$

wollen wir durch folgende Abkürzungen ersetzen:

$$\alpha=1+\varrho_1H;\quad \beta=\varrho_1H_1;\quad \gamma=\varrho_1J;\quad \delta=1+\varrho_1J_1$$

dann lautet die quadratische Gleichung, welche ϱ_1 als Hauptkrümmungsradius bestimmt:

$$\alpha\delta=\beta\gamma$$

so dass wir setzen können:

$$\gamma=\sigma\alpha;\quad \delta=\sigma\beta$$

Fernere Abkürzungen seien:

$$\varepsilon=\frac{\partial\varrho_1}{\varrho_1\partial u};\quad \zeta=\frac{\partial\varrho_1}{\varrho_1\partial v}$$

$$2\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & e \\ 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial v} & f \end{vmatrix}; \quad 2\vartheta = \begin{vmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & f \\ 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial v} & g \end{vmatrix}$$

$$2\varkappa = \begin{vmatrix} \frac{\partial e}{\partial v} & e \\ \frac{\partial g}{\partial u} & f \end{vmatrix}; \quad 2\lambda = \begin{vmatrix} \frac{\partial e}{\partial v} & f \\ \frac{\partial g}{\partial u} & g \end{vmatrix}$$

$$2\mu = \begin{vmatrix} 2\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} & e \\ 2\frac{\partial g}{\partial v} & f \end{vmatrix}; \quad 2\nu = \begin{vmatrix} 2\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} & e \\ \frac{\partial g}{\partial v} & f \end{vmatrix}$$

Die Gleichungen der ersten Mittelpunktsfläche

$$x_1 = x + \varrho_1 p; \quad \text{etc.}$$

geben differentiirt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v} + \varepsilon \varrho_1 p \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \sigma \left(\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v}\right) + \zeta \varrho_1 p \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

woraus:

$$p_1 l_1 = \begin{vmatrix} \alpha \frac{\partial y}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \varepsilon \varrho_1 q & \sigma\left(\alpha \frac{\partial y}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \zeta \varrho_1 q \\ \alpha \frac{\partial z}{\partial u} + \beta \frac{\partial z}{\partial v} + \varepsilon \varrho_1 r & \sigma\left(\alpha \frac{\partial z}{\partial v} + \beta \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \zeta \varrho_1 r \end{vmatrix}$$

das ist

$$p_1 t_1 t = (\zeta - \varepsilon\sigma) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \alpha e + \beta f \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \alpha f + \beta g \end{vmatrix}; \quad \text{etc.} \tag{12}$$

Differentiirt man die Gl. (11) aufs neue mit Anwendung der, den Gl. (10) gleichbedeutenden Formeln

$$\varrho_1 \frac{\partial p}{\partial u} = (\alpha - 1)\frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v}; \quad \varrho_1 \frac{\partial p}{\partial v} = \sigma\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + (\sigma\beta - 1)\frac{\partial x}{\partial v}$$

multiplicirt mit Gl. (12) und addirt die Analogen, so ergibt sich:



$$\left.\begin{aligned}
\frac{E_1 t_1 t}{\zeta-\varepsilon\sigma} &= \alpha^2\eta+\alpha\beta(\vartheta+\varkappa)+\beta^2\lambda+\left(\frac{\beta\partial\alpha-\alpha\partial\beta}{\partial u}-\varepsilon\beta\right)t^2 \\
\frac{F_1 t_1 t}{\zeta-\varepsilon\sigma} &= \alpha^2\varkappa+\alpha\beta(\lambda+\mu)+\beta^2\nu+\left(\frac{\beta\partial\alpha-\alpha\partial\beta}{\partial v}+\varepsilon\alpha\right)t^2 \\
&= \sigma[\alpha^2\eta+\alpha\beta(\vartheta+\varkappa)+\beta^2\lambda]+\left(\sigma\frac{\beta\partial\alpha-\alpha\partial\beta}{\partial u}-\zeta\beta\right)t^2 \\
\frac{G_1 t_1 t}{\zeta-\varepsilon\sigma} &= \sigma[\alpha^2\varkappa+\alpha\beta(\lambda+\mu)+\beta^2\nu]+\left(\sigma\frac{\beta\partial\alpha-\alpha\partial\beta}{\partial v}+\zeta\alpha\right)t^2
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Bezeichnen ϱ_{11}, ϱ_{12} die Hauptkrümmungsradien der ersten Mittelpunktsfläche, so ist

$$\frac{1}{\varrho_{11}\,\varrho_{12}} = \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{t_1^2}$$

und nach Einsetzung der Werte, und zwar mit Benutzung der 2 Ausdrücke für F_1 findet man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho_{11}\,\varrho_{12}} = \frac{(\zeta-\varepsilon\sigma)^2}{t_1^3 t}\Big\{&\alpha^3\eta+\alpha^2\beta(\vartheta+2\varkappa)+\alpha\beta^2(2\lambda+\mu)+\beta^3\nu \\
&+\left(\alpha\frac{\beta\partial\alpha-\alpha\partial\beta}{\partial u}+\beta\frac{\beta\partial\alpha-\alpha\partial\beta}{\partial v}\right)t^2\Big\}
\end{aligned} \quad (14)$$

Daher ist die gesuchte Bedingung der Canalfläche:

$$\begin{aligned}
&\alpha^3\eta+\alpha^2\beta(\vartheta+2\varkappa)+\alpha\beta^2(2\lambda+\mu)+\beta^3\nu \\
&\quad+\left(\alpha\frac{\beta\partial\alpha-\alpha\partial\beta}{\partial u}+\beta\frac{\beta\partial\alpha-\alpha\partial\beta}{\partial v}\right)t^2 = 0
\end{aligned} \quad (15)$$

§. 4. Allgemeine Gleichung der Canalfläche und Ausdruck ihrer Hauptkrümmungen.

Die Gleichungen einer Parallelen s mit der Leitlinie s_0 sind:

$$x = x_0 + C[f_0'\cos(\vartheta_0+c) - l_0\sin(\vartheta_0+c)]; \quad \text{etc.}$$

und zwar bedeuten C, c die Polarcoordinaten des Punktes der Normalebene von s_0, durch welchen s geht, in dieser Ebene. Der Anfang der c liegt in einer beliebig zu wählenden Parallele im Abstande C von s_0. Führen wir dafür die ebenen rechtwinkligen Coordinaten

$$\xi = C\cos c, \quad \eta = C\sin c$$

ein und setzen zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} F &= f_0' \cos\vartheta_0 - l_0 \sin\vartheta_0 \\ L &= f_0' \sin\vartheta_0 + l_0 \cos\vartheta_0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

so wird

$$x = x_0 + \xi F - \eta L; \quad \text{etc.} \tag{17}$$

Beschreibt nun unabhängig von s_0 der Punkt $(\xi\eta)$ in seiner Ebene die Linie σ, so erzeugt die Parallele (17) eine Canalfläche, und die Gl. (17) sind der allgemeine Ausdruck einer solchen in den Parametern $\sigma = u$ und $s_0 = v$.

Die Differentiation der Werte (16) nach τ_0 ergibt:

$$F' = -f_0 \cos\vartheta_0; \quad L' = -f_0 \sin\vartheta_0 \tag{18}$$

und die Constante im Krümmungswinkel τ von σ sei bestimmt durch

$$\cos\tau = \frac{\partial\xi}{\partial\sigma}; \quad \sin\tau = \frac{\partial\eta}{\partial\sigma}$$

Setzt man überdies zur Abkürzung

$$R = s_0' - \xi\cos\vartheta_0 + \eta\sin\vartheta_0 \tag{19}$$

so erhält man aus Gl. (17) die partiellen Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= F\cos\tau - L\sin\tau = f_0'\cos(\vartheta_0 + \tau) - l_0 \sin(\vartheta_0 + \tau) \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= f_0 \frac{R}{s_0'} \end{aligned} \tag{20}$$

woraus:

$$e = 1; \quad f = 0; \quad g = t^2; \quad t = \frac{R}{s_0'} \tag{21}$$

$$p = -F\sin\tau - L\cos\tau = -f_0'\sin(\vartheta_0 + \tau) - l_0\cos(\vartheta_0 + \tau)$$

und nach neuer Differentiation:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= -\frac{f_0'\sin(\vartheta_0 + \tau) + l_0\cos(\vartheta_0 + \tau)}{\sigma'} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= -f_0 \frac{\cos(\vartheta_0 + \tau)}{s_0'} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= f_0' \frac{R}{s_0'^2} + f_0 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R}{s_0'}\right) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

also aus der Definitionsgleichung berechnet:

$$E = \frac{1}{\sigma'}; \quad F = 0; \quad G = -\frac{R\sin(\vartheta_0 + \tau)}{s_0'^2} \tag{23}$$



Die Werte von e, f, F zeigen, wie schon bekannt war, dass die Parameter orthogonal geodätisch sind und den Krümmungslinien entsprechen. Wegen letzterer Eigenschaft sind nun die Hauptkrümmungsradien

$$\varrho_1 = \frac{e}{E} = \sigma'; \quad \varrho_2 = \frac{g}{G} = -\frac{R}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} \tag{24}$$

Die vorstehenden Formeln sind sowol für allgemeinen Gebrauch bei Untersuchung von Canalflächen, als auch für die folgenden speciellen Bemerkungen entwickelt worden.

§. 5. Bemerkung an der zweiten Mittelpunktsfläche der Canalfläche.

Die erste Mittelpunktsfläche

$$x_1 = x + \sigma' p$$

bietet keine Frage zur Untersuchung dar, weil sie sich unmittelbar als die von der Evolute des Querschnitts σ erzeugte Canalfläche mit gemeinsamer Leitlinie s_0 darstellt.

Die Gleichung der zweiten Mittelpunktsfläche ist:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x + \varrho_2 p = x_0 + \xi F - \eta L + R \frac{F \sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta_0 + \tau)} \\
&= x_0 + \xi\left[F - \cos\vartheta_0 \frac{F\sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta_0+\tau)}\right] - \eta\left[L - \sin\vartheta_0 \frac{F\sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta_0+\tau)}\right] \\
&\quad + s_0' \frac{F\sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta + \tau_0)} \\
&= x_0 + (\xi\cos\tau + \eta\sin\tau)\frac{F\sin\vartheta_0 - L\cos\vartheta_0}{\sin(\vartheta_0+\tau)} + s_0' \frac{F\sin\tau + L\cos\tau}{\sin(\vartheta_0+\tau)} \\
&= x_0 - \frac{\xi\cos\tau + \eta\sin\tau}{\sin(\vartheta_0+\tau)} l_0 + s_0'[f_0' + l_0\cot(\vartheta_0+\tau)]
\end{aligned}$$

hat also die Form:

$$x_2 = x_0 + s_0' f_0' + U l_0 \tag{25}$$

wo

$$U = \frac{s_0'\cos(\vartheta_0+\tau) - \xi\cos\tau - \eta\sin\tau}{\sin(\vartheta_0+\tau)} \tag{26}$$

gesetzt ist. Hiernach stellt $(x_2 y_2 z_2)$ einen Punkt auf der Krümmungsaxe dar, der wenn U mit σ variirt, die Krümmungsaxe durchläuft,

die ihrerseits bei variirendem s_0 die abwickelbare Mittelpunktsfläche erzeugt. Es hat sich der Satz ergeben, den ich noch nicht ausgesprochen gefunden habe:

Die der parallelen Schar Krümmungslinien entsprechende Mittelpunktsfläche der Canalfläche ist der Ort der gemeinsamen Krümmungsaxe jener Parallelen, mithin die Einhüllende der Krümmungsaxen ihre Gratlinie.

Der Ausdruck (26) von U, der den Abstand des Punktes $(x_2 y_2 z_2)$ von der Schmiegungsebene der Leitlinie darstellt, kann weitere Verwendung finden, wenn es sich um die entsprechenden Punkte auf beiden Flächen handelt. Er ist noch abhängig von der willkürlichen Leitlinie; dagegen ist die Grösse

$$U - \frac{\partial s_0'}{\partial \vartheta_0} \tag{27}$$

welche die Strecke vom Coincidenzpunkt der Krümmungsaxe bis zum Punkte $(x_2 y_2 z_2)$ ausdrückt, davon unabhängig. Geht man also von der Gratlinie aus, so bezeichnet (27) das Stück, welches die der Urfläche entsprechende Kürzeste auf der Abwickelbaren von der Tangente abschneidet.

§. 6. Bemerkung über asymptotische Linien der Canalfläche in einem Specialfalle.

Die Differentialgleichung der asymptotischen Linien

$$E\partial u^2 + 2F\partial u\,\partial v + G\,\partial v^2 = 0$$

wird nach (23) auf der Canalfläche:

$$\frac{\partial u^2}{\sigma'} = \frac{R\sin(\vartheta_0+\tau)}{s_0'^2}\,\partial v^2$$

Ist die Leitlinie ein Kreis vom Radius c, so kann man das constante ϑ_0 null setzen und erhält:

$$\frac{\partial u^2}{\sigma'} = \frac{c-\xi}{c^2}\sin\tau\,\partial v^2$$

Sei auch der Querschnitt ein Kreis vom Radius a. Dann hat man:

$$\xi = a\sin\tau; \quad \sigma = a\tau$$



$$\partial u^2 = a^2 \partial \tau^2 = \frac{a^2(\partial \sin \tau)^2}{1 - \sin^2 \tau} = \frac{a^2 \partial \xi^2}{a^2 - \xi^2}$$

und die Gleichung wird:

$$\partial v = \pm \frac{ac\partial \xi}{\sqrt{\xi(c-\xi)(a^2 - \xi^2)}} \tag{28}$$

Da elliptische Functionen erster Gattung in der Geometrie nur selten vorkommen, so verdient wol der vorliegende Fall derart notirt zn werden.

XV.

Perspectivische Dreiecke die einem Kegelschnitt einbeschrieben sind.

Von

L. Klug.

In dem 70ten Teile dieses Archiv's p. 446 haben wir gezeigt, wie man Punktreihen construirt, die mit zwei oder drei projectivischen Punktreihen involutorisch liegen. Von diesen Constructionen ausgehend sind wir im Stande Dreiecke zu finden, welche mit zwei oder drei, einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecken zugleich perspectivisch liegen und dem Kegelschnitt einbeschrieben sind.

1.

Es seien $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ zwei demselben Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke, wir wollen ein mit den gegebenen perspectivisches Dreieck construiren, welches dem Kegelschnitt einbeschrieben ist.

Zu dem Ende construiren wir eine Punktreihe, welche mit den, durch $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ Punkte bestimmten projectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ zugleich involutorisch liegt; diejenigen Elemente dieser neuen Punktreihe, welche den $A_1 B_1 C_1$ Punkten projectivisch entsprechen, sind die Eckpunkte des gewünschten Dreiecks.

Wir wissen (70. T., p. 446), dass es unendlich viele Punktreihen gibt, die mit $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ zugleich involutorisch liegen, und dass dieselben erst dadurch vollkommen bestimmt sind, dass

wir von den zu construirenden Punktreihen ein Element annehmen, welches einem bestimmten Elemente der gegebenen Punktreihen entsprechen soll. Daraus folgt: dass wir einen Eckpunkt des gewünschten Dreiecks beliebig annehmen können auf dem Kegelschnitt.

Ist D ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts, dann sind unter den unendlich vielen Punktreihen, welche mit $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ zugleich involutorisch liegen, drei vorhanden, welche zur Bestimmung der perspectivischen Dreiecke dienen. Den Punkt D können wir nämlich als dem Punkte A_1, oder B_1, oder C_1 entsprechend betrachten und in diesen drei Fällen mit A, resp. B', C'' bezeichnen; die mit $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ involutorischen Punktreihen $ABC\ldots$, $A'B'C' \ldots$, $A''B''C'' \ldots$ bestimmen drei Dreiecke ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, welche einen gemeinsamen Eckpunkt D haben, dem Kegelschnitt einbeschrieben sind und mit den Dreiecken $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ perspectivisch liegen.

Sechs Punkte zu dreien in zwei Gruppen verteilt, bestimmen auf sechserlei Art projectivische Punktreihen. Den Punkten $A_1 B_1 C_1$ können nämlich die Punkte $A_2 B_2 C_2$, $B_2 C_2 A_2$, $C_2 A_2 B_2$, $C_2 B_2 A_2$, $B_2 A_2 C_2$, $A_2 C_2 B_2$ entsprechen, wir finden daher sechsmal unendlich viele Punktreihen, welche mit den gegebenen involutorisch liegen. Dies in Betracht gezogen, können wir sagen: wenn $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ zwei demselben Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke sind, D ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts ist, dann kann man 3mal 6 solche Dreiecke construiren, die D zum gemeinsamen Eckpunkt haben, dem Kegelschnitt einbeschrieben sind und mit den gegebenen zwei Dreiecken perspectivisch liegen.

2.

Unter den unendlich vielen Dreiecken die mit zwei demselben Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecken perspectivisch sind, gibt es auch solche, welche mit einem oder anderen der gegebenen Dreiecke auf zwei- oder dreierlei Art perspectivisch liegen. Um diese zu bestimmen, müssen wir wissen, dass die Verbindungslinien p, q, r, der Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2$; $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $B_2 C_2 A_2 \ldots$; $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $C_2 A_1 B_2 \ldots$, welche die Pascal'schen Linien der einfachen Sechsecke $A_1 C_2 B_1$, $A_1 C_1 B_2$, $A_1 B_2 B_1$, $B_1 C_2 C_1 A_2$, $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ sind, durch denselben U Punkt gehen, und dass sich die Verbindungslinien p', q, r' der Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1$, $C_2 B_2 A_2 \ldots$; $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 C_2 B_2$; $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $B_2 A_2 C_2 \ldots$ als Pascal'sche Linien der einfachen Sechsecke $A_1 A_2 B_1$, $C_2 C_1 B_2$, $A_1 B_2 B_1$, $A_2 C_1 C_2 A_1 C_2 B_1$, $B_2 C_1 A_2$ in denselben U Punkte schneiden. Werden die Eckpunkte des Dreiecks

$A_1 B_1 C_1$, oder $A_2 B_2 C_2$ aus einem beliebigen Schnittpunkte von zweien der Geraden $pqr\, p'q'r'$ auf den Kegelschnitt projicirt, so sind die Projectionen die Eckpunkte von Dreiecken, welche mit den gegebenen auf zwei- oder dreierlei Art perspectivisch liegen. Projicirt man eins der gegebenen Dreiecke aus den Punkten U oder U', dann wird die Projection mit diesem auf einerlei, mit dem anderen der gegebenen Dreiecke auf dreierlei, wenn nicht aus den Schnittpunkten U, U' aber bloss auf zweierlei Art perspectivisch liegen.

Bezeichnen wir die Projection der Punkte $A_1 B_1 C_1$ vom Schnittpunkte (p, r') der Geraden p, r' auf den Kegelschnitt mit ABC, dann wird ABC Dreieck sowol mit $A_2 B_2 C_2$ als auch mit $B_2 A_2 C_2$ perspectivisch liegen, der Schnittpunkt der Projectionsstrahlen AA_2, BB_2, CC_2 befindet sich auf p, der Schnittpunkt der Projectionsstrahlen AB_2, BA_2, CC_2 befindet sich auf r', da (p, r') auf p und r' liegt. Diese zwei Schnittpunkte liegen auch auf CC_2 Geraden und sind wie aus $AB_2 A_2 B$ Viereck ersichtlich conjugirte Punkte des Kegelschnitts. — Es gibt 18 solche Dreiecke, welche mit einem der gegebenen Dreiecke auf zweierlei, mit dem anderen auf einerlei Art perspectivisch liegen, da pqr, $p'q'r'$ Geraden sich ausser in UU' noch in 9 Punkten schneiden, und die Projectionen der zwei gegebenen Dreiecke aus diesen 9 Punkten auf dem Kegelschnitt 18 Dreiecke liefern.

3.

Wenn wir die Projectionen der $A_1 B_1 C_1$ Punkte aus U auf den Kegelschnitt mit $E_2 F_2 G_2$ bezeichnen, dann ist das Dreieck $E_2 F_2 G_2$ auf dreierlei Art perspectivisch mit $A_2 B_2 C_2$; die Geraden $E_2 A_2$, $F_2 B_2$, $G_2 C_2$ treffen sich in P_2, die $E_2 C_2$, $F_2 A_2$, $G_2 B_2$ Geraden in Q_2 endlich $E_2 B_2$, $F_2 C_2$, $G_2 A_2$ Geraden in R_2, und es liegen P_2, Q_2, R_2 beziehungsweise auf den Geraden p, q, r. Sind ebenso $E_2' F_2' G_2'$ die Projectionen der $A_1 B_1 C_1$ Punkte auf U' auf dem Kegelschnitt, dann ist $E_2' F_2' G_2'$ Dreieck auf dreierlei Art perspectivisch mit $A_2 B_2 C_2$, die Geraden $E_2' C_2$, $F_2' B_2$, $G_2' A_2$ treffen sich in P_2'; $E_2' A_2$, $F_2' C_2$, $G_2' B_2$ in Q_2' endlich $E_2' B_2$, $F_2' A_2$, $G_2' C_2$ in R_2', und es liegen P_2', Q_2', R_2' beziehungsweise auf p', q', r'. Ist ferner die Projection des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ aus U und U' auf den Kegelschnitt $E_1 F_1 G_1$, $E_1' F_1' G_1'$, dann sind $E_1 F_1 G_1$, $E_1' F_1' G_1'$ Dreiecke mit $A_2 B_2 C_2$ auf einerlei, mit $A_1 B_1 C_1$ auf dreierlei Art perspectivisch; die Projectionscentren, welche diesen Lagen entsprechen, bezeichnen wir mit $P_1 Q_1 R_1 P_1' Q_1' R_1'$ je nachdem dieselben auf den Geraden $pqrp'q'r'$ liegen.

Es können daher vier Dreiecke dem Kegelschnitt einbeschrieben werden, welche mit einem der gegebenen auf einerlei mit dem an-

deren auf dreierlei Art perspectivisch liegen. Von diesen vier Dreiecken sind solche zwei, welche die Projectionen eines der gegebenen Dreiecke bilden, also $E_2 F_2 G_2$, $E_2' F_2' G_2'$ oder $E_1 F_1 G_1$, $E_1' F_1' G_1'$ zu einander perspectivisch, das Projectionscentrum ist in beiden Fällen der Pol der UU' Geraden. U, U' Punkte sind nämlich conjugirt, und es wird die Seite $E_2 E_2'$ des Dreiecks $A_2 E_2 E_2'$ durch den Pol der Geraden UU' gehen, da U und U' auf $A_2 E_2$ beziehungsweise $A_2 E_2'$ liegen.

Die oben mit $P_1 \ldots R_2'$ bezeichneten Projectionscentren haben eine besondere Lage: Die Punkte $P_2 Q_2 R_2$, $P_2' Q_2' R_2'$, wie auch $P_1 \ldots R_1'$ liegen auf je einer Geraden, welche durch den Pol T der UU' Geraden gehen. Dies folgt daraus, dass $P_2 Q_2 R_2$, daher auch $P_2' Q_2' R_2'$, $P_1 Q_1 R_1$, $P_1' Q_1' R_1'$ auf je einer Geraden liegen, ferner dass die Verbindungsgeraden der $P_2 Q_2 R_2$ Punkte mit jedem der Punkte $P_2' Q_2' R_2'$ durch T gehen.

Nachdem die Schnittpunkte der Gegenseiten der einfachen Sechsecke $E_2 C_2 F_2 \;\; B_2 G_2 A_2$, $E_2 B_2 F_2 \;\; A_2 G_2 C_2$, $E_2 A_2 F_2 \;\; C_2 G_2 B_2$ die Punkte P_2, Q_2, R_2 sind, fallen die Pascal'schen Linien der benannten einfachen Sechsecke in $P_2 Q_2 R_2$ Geraden, nachdem ferner die Pascal'schen Linien der $E_2' E_2 A_2 G_2' G_2 C_2$, $F_2' F_2 B_2 G_2' G_2 C_2$ einfachen Sechsecke $T P_2 P_2'$, $T P_2 Q_2'$ Geraden sind, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Bezüglich der Punktpare $R_2 R_2'$, $P_2 P_2'$, $Q_2 Q_2'$ und $P_2 Q_2'$, $Q_2 R_2'$, $R_2 P_2'$ endlich $P_2 R_2'$, $Q_2 P_2'$, $R_2 Q_2'$ ist zu bemerken, dass dieselben eine Involution bilden, da die erste, zweite und dritte Punktgruppe die Projection der $E_2 E_2'$, $F_2 F_2'$, $G_2 G_2'$ involutorischer Punktpare ist aus den B_2, A_2, C_2 Punkten auf $P_2 Q_2$ Gerade. Ebenso bilden $P_1 \ldots R_1'$ Punkte auf dreierlei Art eine Involution.

Die sechs Punkte E_2, C_2, F_2, B_2, G_2, A_2 haben abgesehen von der dreifachen perspectivischen Lage der Dreiecke $E_2 F_2 G_2$, $A_2 B_2 C_2$ noch die Eigenschaft, dass die drei Pascal'schen Linien der $E_2 C_2 F_2 B_2 G_2 A_2$, $E_2 B_2 F_2 A_2 G_2 C_2$, $E_2 A_2 F_2 C_2 G_2 B_2$ einfachen Sechsecke, wie aus den früheren ersichtlich, zusammenfallen in die $P_2 Q_2$ Gerade. Bei einem anderen Pascal'schen Sechsecke schneiden sich die drei Pascal'schen Linien, welche solchen einfachen Sechsecken entsprechen, in einem Steiner'schen Punkte. Im gegenwärtigen Falle können wir jeden Punkt der $P_2 Q_2$ Geraden als einen Steiner'schen nennen, bezüglich des in Betracht gezogenen Sechsecks, und es wird der Schnittpunkt S_2 der Pascal'schen Linien der $E_2 C_2 F_2 A_2 G_2 B_2$, $E_2 B_2 F_2 C_2 G_2 A_2$, $E_2 A_2 F_2 B_2 G_2 C_2$ einfachen Sechsecke, als zu allen Punkten der $P_2 Q_2$ Geraden conjugirt, der Pol von $P_2 Q_2$ sein. — Wir können auch auf eine andere Art zeigen, dass der Schnitt-

punkt der Pascal'schen Linien der letztbenannten Sechsecke der Pol von $P_2 Q_2$ ist; dieselben sind nämlich als Verbindungslinien der Doppelpunkte von $E_2 F_2 G_2 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$; $E_2 F_2 G_2 \ldots$, $C_2 A_2 B_2 \ldots$; $E_2 F_2 G_2 \ldots$, $B_2 C_2 A_2 \ldots$ involutorischen Punktreihen die Polaren von P_2, Q_2, R_2 Punkten.

Die einfachen Sechsecke $E_2' C_2 G_2' B_2 F_2' A_2$, $E_1 C_1 F_1 B_1 G_1 A_1$, $E_1' C_2 G_1' B_1 F_1' A_1$ haben dieselbe Eigenschaft als $E_2 C_2 F_2 B_2 G_2 A_2$ nämlich: vom ersten Sechsecke fallen drei Pascal'sche Linien in $P_2 Q_2$ Geraden, während sich drei in S_2 schneiden; von den anderen zwei Sechsecken fallen drei Pascal'sche Linien in $P_1 Q_1$, während sich die anderen drei im S_1 Punkte treffen. Es ist ferner leicht ersichtlich, dass sich $S_2 S_1 U U'$ Punkte in einer Geraden befinden, denn diese Punkte sind conjugirt zu T.

Die bisherigen Betrachtungen können wir in einem Satz zusammengefasst, so aussprechen:

„Wenn einem Kegelschnitt zwei Dreiecke einbeschrieben sind, „dann kann man unendlich viele Dreiecke dem Kegelschnitt einschreiben, „welche mit den gegebenen zugleich perspectivisch liegen; es gibt „18 Dreiecke, welche denselben gemeinsamen Eckpunkt haben, dem „Kegelschnitt einbeschrieben und mit den gegebenen Dreiecken per„spectivisch sind; es gibt ferner 18 dem Kegelschnitt einbeschriebene „Dreiecke, welche mit einem der gegebenen Dreiecke auf einerlei „mit dem anderen auf zweierlei Art perspectivisch sind. Ausser „diesen sind noch 4 besondere Dreiecke vorhanden, welche mit je „einem der gegebenen Dreiecke auf einerlei, mit dem anderen auf „dreierlei Art perspectivisch sind. Von diesen vier besondern Drei„ecken sind zweimal genommen zwei selbst perspectivisch, das Pro„jectionscentrum, welches diesen Lagen entspricht, ist ein und der„selbe Punkt. Die Zahl der Projectionscentren, welche der per„spectivischen Lage dieser vier und der gegebenen zwei Dreiecke „entsprechen, ist 14, wovon 2 Punkte solche zwei Steiner'sche con„jugirte Punkte sind, welche zu den, durch die Eckpunkte der ge„gebenen Dreiecke bestimmten Pascal'schen Sechsecken gehören, die „übrigen 12 liegen zu je 6 auf zwei Geraden und bilden auf diesen „Geraden auf dreierlei Art Involutionen. Der Schnittpunkt dieser „zwei Geraden fällt einerseits mit dem Projectionscentrum zusammen, „welches die perspectivische Lage der vier besonderen Dreiecke be„stimmt, andrerseits bildet er mit den erwähnten Steiner'schen Punkten „ein Tripel bezüglich des Kegelschnitts".



4.

Untersuchen wir in wie fern sich dieser Satz ändert, wenn die gegebenen Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ auf dreriei Art perspectivisch sind, nämlich wenn: $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$; $A_1 C_2$, $B_1 A_2$, $C_1 B_2$; $A_1 B_2$, $B_1 C_2$; $C_1 A_2$ Geraden sich beziehungsweise in P, Q, R Punkten schneiden oder kürzer ausgedrückt, wenn $A_1 B_1 C_1$ in Rücksicht auf die Reihe der entsprechenden Punkte mit $A_2 B_2 C_2$, $C_2 A_2 B_2$, $B_2 C_2 A_2$ perspectivisch ist und die Projectionscentren beziehungsweise P, Q, R sind.

Wenn die Polaren von P, Q, R mit p, q, r bezeichnet werden, dann ist aus dem früheren bekannt, dass sich diese Polaren als Pascal'sche Linien der $A_1 C_2 B_1 A_2 C_1 B_2$. $A_1 B_2 B_1 C_2 C_1 A_2$, $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ einfachen Sechsecke in einem gewissen S Punkte schneiden, welcher der Pol ist von den in eine s Gerade fallenden Pascal'schen Linien der einfachen Sechsecke $A_1 B_2 B_1 A_2 C_1 C_2$, $A_1 C_2 B_1 B_2 C_1 A_2$, $A_1 B_2 B_1 C_2 C_1 B_2$.

Es seien nun ABC die Projectionen der $A_1 B_1 C_1$ Punkte aus einem beliebigen P_1 Punkte der s Geraden, so wird ABC Dreieck mit $A_2 C_2 B_2$, $B_2 A_2 C_2$, $C_2 B_2 A_2$ perspectivische Lage haben; die Projectionscentren P_2, Q_2, R_2 liegen auf s. Nachdem ABC Dreieck die Projection von $A_2 B_2 C_2$ ist aus einem P_2 Punkte der s Geraden, so wird ABC Dreieck auch mit $A_1 B_1 C_1$, $B_1 C_1 A_1$, $C_1 A_1 B_1$ perspectivische Lage haben und die Projectionscentren sind P_1, Q_1, R_1; ABC Dreieck ist daher auf dreierlei Art perspectivisch mit den gegebenen Dreiecken. — Die erhaltenen Projectionscentren $P_1 Q_1 R_1$, $P_2 Q_2 R_2$ bilden auf dreierlei Art Involutionen, weil die Projection der $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ wie auch $A_1 C_2$, $B_1 A_2$, $C_1 B_2$, endlich $A_1 B_2$, $B_1 C_2$, $C_1 A_2$ involutorische Punktgruppen aus A beziehungsweise B, C auf die Gerade s die Punktpare $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$; $P_1 P_2$, $P_1 Q_2$, $Q_1 P_2$; $Q_1 P_2$, $R_1 Q_2$, $P_1 R_2$ sind.

Es sei zweitens $E_2 F_2 G_2$ die Projection der $A_1 B_1 C_1$ Punkte aus (p, s) auf den Kegelschnitt, dann wird $E_2 F_2 G_2$ Dreieck, da (p, s) auf s liegt, mit $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ auf dreierlei, da (p, s) auch auf p liegt mit $A_2 B_2 C_2$ noch auf einerlei Art perspectivisch sein, nämlich: $E_1 F_2 G_2$ Dreieck ist mit den Dreiecken $A_2 B_2 C_2$, $A_2 C_2 B_2$, $B_2 A_2 C_2$, $C_2 B_2 A_2$ und $A_1 B_1 C_1$, $B_1 C_1 A_1$, $C_1 A_1 B_1$ perspectivisch. Die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $E_2 F_2 G_2$ sind daher parweise perspectivisch, und es bilden die Projectionscentren, welche dieser Lage entsprechen, ein Polardreieck; zwei Projectionscentren sind aber P und (p, s), daher wird das dritte Centrum S sein, da S zu den ersteren zwei Punkten conjugirt ist. Daraus schliessen wir, dass $E_2 F_2 G_2$ die Pro-

jection der Eckpunkte des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ aus S auf den Kegelschnitt, daher von (p, s) unabhängig ist, welche Eigenschaft wir auch so aussprechen können: dass die Projection des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ aus den Punkten (p, s), (q, s), (r, s) ein und dasselbe $E_2 F_2 G_2$ Dreieck ist.

Man kann noch ein so merkwürdiges Dreieck $E_1 F_1 G_1$ finden, indem man $A_1 B_1 C_1$ aus S, oder aber $A_2 B_2 C_2$ Dreieck aus (p, s), oder (q, s) endlich (r, s) Punkte auf den Kegelschnitt projicirt.

Die zwei Dreiecke $E_1 F_1 G_1$, $E_2 F_2 G_2$ sind auf dreierlei Art perspectivisch nämlich: $E_1 F_1 G_1$ mit $E_2 F_2 G_2$. $G_2 E_2 F_2$, $F_2 G_2 E_2$, die Projectionscentren sind beziehungsweise P, Q, R. Dies ist daraus ersichtlich, dass sich $A_1 E_1$, $A_2 E_2$, $B_1 F_1$ ... $C_2 G_2$ Gerade im Pole S von s, und $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ Gerade im Punkte P schneiden, daher $E_1 E_2$, $F_1 F_2$, $G_1 G_2$ Gerade durch P gehen; ebenso wird der Beweis geführt für die zwei anderen perspectivischen Lagen.

Das Resultat dieser Untersuchung lautet:

„Wenn zwei demselben Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke auf „dreierlei Art perspectivisch sind, dann kann man unendlich viele „Dreiecke dem Kegelschnitt einschreiben, welche mit den gegebenen „auf einerlei, und unendlich viele, welche auf dreierlei Art per-„spectivisch sind. Die Projectionscentren, welche zu jedem dieser „letzteren Dreiecke gehören, liegen auf einer s Geraden und bilden „eine Involution; diese s Gerade enthält auch die Projectionscentren, „welche aus der perspectivischen Lage der gegebenen Dreiecke ent-„stammen. Man kann aber noch zwei besondere Dreiecke dem „Kegelschnitt einschreiben, welche mit einem der gegebenen auf „dreierlei, mit dem anderen auf viererlei Art perspectivisch sind, und „diese sind die Projectionen der gegebenen Dreiecke aus dem Pole „der s Geraden auf den Kegelschnitt. Diese zwei besonderen Drei-„ecke sind mit einander auf dreierlei Art perspectivisch; die Pro-„jectionscentren, welche zu diesen Lagen gehören, fallen mit den „Projectionscentren zusammen, durch welche die perspectivische Lage „der gegebenen Dreiecke bestimmt ist."

Zu bemerken ist noch: wenn die gegebenen Dreiecke auf viererlei Art perspectivisch sind, wie z. B. in der früheren Figur $E_2 F_2 G_2$, $A_2 B_2 C_2$, erhalten wir keine wesentlich verschiedene Figur.

5.

Kehren wir nun zu der, von den früheren Constructionen sich ergebenden bestimmten Aufgabe zurück, welche so lautet: es sind drei dem-

selben Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ gegeben, man construire ein Viereck, welches dem Kegelschnitt einbeschrieben ist und mit dem gegebenen perspectivisch liegt.

Wir construiren (70. Teil p. 447) die Verbindungsgerade der Doppelpunkte der perspectivischen Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ und $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_3 B_3 C_3 \ldots$, welche die Pascal'sche Linie der $A_1 C_2 B_1 A_2 C_1 B_2$, $A_1 C_3 B_1 A_3 C_1 B_3$ einfachen Sechsecke sind, die Projection der Punkte $A_1 B_1 C_1$ vom Schnittpunkte dieser Geraden auf den Kegelschnitt, bilden die Eckpunkte des gewünschten Dreiecks.

Die Punkte $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ wie auch $A_1 B_1 C_1$, $A_3 B_3 C_3$ bestimmen auf sechserlei Art projectivische Punktreihen, dann hat die Aufgabe im Allgemeinen 36 Lösungen.

Bei besonderer Lage der gegebenen Dreiecke ändert sich die Anzahl der Lösungen. Fällt nämlich von den Doppelpunkten der sechs ersten projectivischen Punktreihen irgend einer, oder zwei, mit irgend einem oder zwei zusammen gehörigen Doppelpunkten der sechs anderen projectivischen Punktreihen zusammen, dann liefern im ersten Falle diese besondern Punktreihen kein Dreieck, im zweiten Falle aber bestimmen die Punktreihen unendlich viele Dreiecke, welche mit den gegebenen perspectivisch liegen. In diesem letzteren Falle sind 6 besondere Dreiecke vorhanden, welche mit einem der gegebenen Dreiecke auf dreierlei, mit den beiden anderen auf einerlei Art perspectivisch sind. Um dies einzusehen, setzen wir voraus, dass $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$, und $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A_3 B_3 C_3 \ldots$. projectivischen Punktreihen dieselben Doppelpunkte haben, welche daher auch Doppelpunkte sind der $A_2 B_2 C_2 \ldots$, $A_3 B_3 C_3 \ldots$ projectivischen Punktreihen. Die Verbindingslinie dieser Doppelpunkte ist die gemeinsame Pascal-sche Linie der $A_1 C_2 B_1 A_2 C_1 B_2$, $A_1 C_3 B_1 A_3 C_1 B_3$, $A_2 C_3 B_2 A_3 C_2 B_3$ einfachen Sechsecke. Auf dieser Pascal'schen Linie liegen S_3, S_2, S_1 drei Steiner'sche Punkte, welche aus den drei aufgeschriebenen Sechsecken entstammen, wenn man dieselben als vollständige Sechsecke betrachtet. Werden nun z. B. die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ aus S_3 auf den Kegelschnitt projicirt, so bekommen wir zwei solche Dreiecke, von welchen das erste mit $A_1 B_1 C_1$, $A_3 B_3 C_3$ auf einerlei mit $A_2 B_2 C_2$ auf dreierlei, das zweite mit $A_2 B_2 C_2$ und $A_3 B_3 C_3$ auf einerlei, mit $A_1 B_1 C_1$ auf dreierlei Art perspectivisch ist.

Wir können daher sagen:

„Wenn einem Kegelschnitt drei Dreiecke einbeschrieben sind, so können im Allgemeinen 36 Dreiecke dem Kegelschnitt einbeschrieben werden, welche mit den gegebenen perspectivisch sind. Bilden die Eckpunkte des einen Dreiecks mit den Eckpunkten eines

der zwei anderen zwei solche Sechsecke, von dessen Seiten keine auf die Seiten der Dreiecke fällt, von welchen aber zwei Pascal'sche Linien in derselben s Geraden liegen, dann kann man dem Kegelschnitt unendlich viele Dreiecke einbeschreiben, welche mit den gegebenen perspectivisch sind. In diesem Falle kann man sechs besondere Dreiecke finden, welche die Projectionen von den gegebenen Dreiecken aus gewissen Punkten der s Geraden sind; diese besonderen Dreiecke sind mit einem der gegebenen auf dreierlei, mit den übrigen zwei auf einerlei Art perspectivisch."

6.

Wir wollen jetzt die Frage beantworten: wie man einem Kegelschnitt ein Dreieck einbeschreiben kann, dass mit dem im Kegelschnitt einbeschriebenen $A_1 B_1 C_1$ Dreieck auf zwei-, drei- oder viererlei Art perspectivisch ist und einen A Punkt des Kegelschnittes zum Eckpunkt hat.

a) Die erste Aufgabe kann man nur dann lösen, wenn die Eckpunkte des Dreiecks und der gegebene Punkt harmonisch liegen, dann aber hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen. Sind z. B. $B_1 C_1$ Punkte durch AA_1 harmonisch getrennt und BC fernere Punkte des Kegelschnittes, welche ebenfalls durch AA_1 harmonisch getrennt sind, dann ist ABC Dreieck mit $A_1 B_1 C_1$ auf zweierlei Art perspectivisch.

b) Um die zweite Aufgabe zu lösen, bezeichnen wir die (bekanntlich in derselben Geraden liegenden) Schnittpunkte der Tangenten in $A_1 B_1 C_1$ Punkten mit den gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ resp. mit $Q_1 Q_2 Q_3$, den gemeinsamen Punkt von AA_1, $Q_1 Q_2$ Geraden mit P_1, endlich die Projection von B_1, C_1 aus P_1 auf den Kegelschnitt mit B resp. C. Die Pascal'schen Linien der $B_1 B_1 B A C_1 C$ und $A A_1 B C_1 C B_1$ einfachen Sechsecke liegen in derselben $P_1 Q_1 Q_2 Q_3$ Geraden, da die Pascal'sche Linie des ersteren Sechsecks $Q_2 P_1$ ist und durch den Schnittpunkt P_3 von BA_1, CB_1 geht, während die des zweiten P_3 und P_1 Punkte verbindet und zugleich den Schnittpunkt P_2 von BC_1, AB_1 enthält. Ebenso kann man beweisen, dass die Pascal'schen Linien der $C_1 C_1 C A_1 B_1 B$, $A C_1 B B_1 C A_1$ wie auch $A_1 A_1 A B_1 C_1 C$, $A B_1 B A_1 C C_1$ einfachen Sechsecke in $P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3$ Gerade fallen und in Anbetracht des zweiten und vierten Sechsecks $C_1 B$, CA_1 Gerade durch P_2, BA_1 und CA_1 Gerade durch P_3 gehen. Die Lage der BC Punkte ist daher derart bestimmt, dass ABC Dreieck mit $A_1 B_1 C_1$ auf dreierlei Art perspectivisch liegt.

c) Die dritte Aufgabe kann man nur unter der Bedingung lösen, dass — wie bei a) — ein Eckpunkt des Dreiecks z. B. A_1 von $B_1 C_1$ durch den gegebenen A Punkt harmonisch getrennt ist. Führt man dabei die unter b) gegebene Construction durch, so erhält man BC Punkte, und ABC Dreieck wird mit $A_1 B_1 C_1$, $B_1 C_1 A_1$, $C_1 A_1 B_1$, $A_1 C_1 B_1$ perspectivisch liegen. Bezeichnet man die Projectionscentren, welche diesen Lagen entsprechen, mit $P_1 P_2 P_3 R$, die Schnittpunkte von $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ mit $P_1 P_2 P_3$ Gerade resp. mit $Q_1 Q_2 Q_3$, dann folgt in Anbetracht der Vierecke $B_1 C_1 BC$, $A_1 B_1 AC$, $A_1 C_1 AB$, dass $P_1 Q_1 R$, $P_2 Q_3 R$, $P_3 Q_2 R$ Polardreiecke sind, und dass nicht allein $B_1 C_1$ und BC durch AA_1 harmonisch getrennt sind, sondern auch $A_1 C_1$, BA durch CB_1, sowie $A_1 B_1$, AC durch BC_1, welche letztere Eigenschaft znr einfachen Construction der BC Punkte dienen kann. Man bemerkt auch, dass $ABC\,A_1 B_1 C_1$ Punkte auf dem Kegelschnitt $P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3$ aber auf der Polare von R auf viererlei Art Involutionen bilden.

Mittelst dieser Constructionen sind wir im Stande folgende Aufgaben zu lösen:

„Auf einer Geraden (oder Kegelschnitt) sind $A_1 B_1 C_1$ A Punkte gegeben, man bestimme B, C Punkte derart, dass die sechs Punkte $ABC\,A_1 B_1 C_1$ auf zwei-, drei- oder viererlei Art Involutionen bilden sollen".

Die erste und dritte Aufgabe kann nur dann gelöst werden, wenn die gegebenen Punkte harmonisch liegen. Ist AA_1 von $B_1 C_1$ harmonisch getrennt, dann entsprechen alle Punktpare, welche A, A_1 harmonisch trennen (und beim Kegelschnitt auf demselben liegen) der ersten, diejenigen zwei Punkte B resp. C aber, welche A_1, B_1 von C_1 und A_1, C_1 von B_1 harmonisch trennen, der dritten Aufgabe.

Um die zweite Aufgabe zu lösen, projicirt man die gegebenen Punkte, wenn dieselben auf einer Geraden liegen, auf einen Kegelschnitt aus einem beliebigen 0 Punkte desselben nach $A_1' B_1' C_1' A'$ und sucht B', C' derart, dass $A'B'C'$, $A_1' B_1' C_1'$ Dreiecke auf dreierlei Art perspectivisch liegen sollen, die Projectionen BC, der $B'C'$ aus 0 auf die Gerade sind die gewünschten Punkte.

7.

Wenn wir in der letzteren Construction keine Rücksicht auf die Ordnung der gegebenen Punkte nehmen, dann hat die Aufgabe vier Lösungen. Um die gegenseitige Lage dieser vier Punktpaare zu erkennen, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen.



Die gegebenen vier Punkte A, B, C, D bestimmen vier Dreiecke und wir bezeichnen mit a, b, c, d diejenigen Geraden, in welchen die Seiten der BCD, CDA, DAB, BAC Dreiecke die Tangenten in den gegenüber liegenden Eckpunkten schneiden. Auf jeder der Geraden a, b, c, d liegen sechs involutorische Punkte, wovon drei die Schnittpunkte der Seiten des zur Geraden gehörigen Dreiecks sind, die übrigen drei aber die Projectionen der Eckpunkte des Dreiecks aus dem vierten Punkt auf die Gerade; die ersteren drei Punkte z. B. auf d, d. h. die Schnittpunkte von BC, CA, AB mit d nennen wir D_α, D_β, D_γ, die anderen drei, d. h, die Schnittpunkte von DA, DB, DC mit d nennen wir D_a, D_b, D_c. Es wird daher nach dieser Bezeichnung B_γ der Schnittpunkt von b mit AD (oder auch mit der Tangente in C), C_a aber von AC mit c sein.

Bevor wir die gewünschten vier Punktpaare construiren, wollen wir zeigen, dass $ABCD$ Viereck und $abcd$ Vierseit ein gemeinsames Diagonaldreieck XYZ haben, wo X, Y, Z resp. auf AB, AC, AD Geraden liegen. XYZ ist namlich das Diagonaldreieck desjenigen Vierseits, welches den Kegelschnitt in $ABCD$ Punkten berührt und es werden daher die Schnittpunkte der Tangenten in B und A mit den Geraden AC resp. DD, d. h. D_β und C_α durch X Punkt und YZ Gerade harmonisch getrennt; ebenso C_β und D_α Punkte. Daraus folgt, dass sich $C_\alpha C_\beta \equiv c$ und $D_\alpha D_\beta \equiv d$ Geraden auf YZ schneiden. Ebenso wird bewiesen, dass die Schnittpunkte der übrigen Seiten des Vierseits auf den Seiten des XYZ Dreiecks liegen. Aus dieser Eigenschaft des genannten Vierseits ist leicht ersichtlich, dass die so bezeichneten Punktepare A_c, C_a wie auch D_γ, C_δ durch Ecken und Seiten des Diagonaldreiecks XYZ harmonisch getrennt sind.

Wir wenden uns jetzt zur Construction der gewünschten Punktepare und bezeichnen die Projectionen der B, C Punkte aus D_α auf den Kegelschnitt mit E_4F_4, aus A_d mit E_1F_1; die Projectionen der A, D Punkte aus C_b mit E_3F_3 aus B_c mit F_2E_2.

Aus dem Früheren ist bekannt, dass ABC, DE_4F_4; DBC, AE_1F_1; BAD, CE_3F_3; CAD, BF_2E_2 Dreiecke auf dreierlei Art perspectivisch sind, oder was dasselbe ist, die bezeichneten Punktgruppen auf dreierlei Art Involutionen bilden. Nachdem D_α, A_d und C, B Punkte durch Z, XY harmonisch getrennt sind, so werden sich die Geraden CD_a, BA_d wie auch CA_d, BD_a auf XY Gerade, der Polare von Z schneiden; diese Schnittpunkte sind conjugirt zu Z, daher CB und F_4E_1, wie auch CB, E_4F_1 Geraden durch Z gehen.



Ebenso wie wir jetzt bewiesen haben, dass F_1E_1 Punktpar die Projection von E_4F_4 ist aus Z auf den Kegelschnitt, kann man zeigen, E_3F_3 die Projection von E_2F_2 aus Z; E_4F_4 die Projection von E_2F_2 aus Y; E_3F_3 die Projection von E_4F_4 aus X etc. oder in Worte gefasst, dass die Projection eines dieser Punktpare aus XYZ auf den Kegelschnitt die übrigen Punktpare sind.

Das Resultat dieser Untersuchung können wir so aussprechen:

„Wenn einem Kegelschnitt ein Viereck einbeschrieben ist, so kann man vier Punktpare construiren, von denen jede mit den gegebenen vier Eckpunkten auf dreierlei Art Involutionen bilden; die Projectionen eines jeden dieser Punktpare aus den Eckpunkten des zum Viereck gehörigen Diagonaldreiecks auf dem Kegelschnitt, sind die übrigen drei Punktpare.“

XVI.

Einige Sätze über das Viereck und Kegelschnittbüschel.

Von

L. Klug.

---

1. Bekanntlich liegen die conjugirten Punkte zu allen Punkten einer Geraden bezüglich eines Vierecks auf einem Kegelschnitt; derselbe geht durch die Eckpunkte des Diagonaldreiecks, weil diese conjugirt sind zu den Schnittpunkten der Geraden mit den Seiten des Diagonaldreiecks, und trifft ausserdem die Seiten des Vierecks in denjenigen Punkten, welche zu den Schnittpunkten der Seiten mit den Geraden conjugirt, daher durch die Eckpunkte des Vierecks harmonisch getrennt sind. Verbindet man von diesen letzteren Schnittpunkten zwei solche die auf den Gegenseiten liegen, so treffen sich die drei Verbindungsgeraden in demselben Punkte, welcher der Pol der angenommenen Geraden bezüglich des Kegelschnitts ist. Die Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Geraden sind Doppelpunkte derjenigen Involution, welche die Spuren der Vierecksseiten auf der Geraden bestimmen. Geht die Gerade durch einen Diagonalpunkt des Vierecks, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei Gerade, wovon eine von der angenommenen durch zwei Viereksseiten harmonisch getrennt ist, die andere aber die übrigen zwei Diagonalpunkte verbindet; geht die Gerade durch einen Eckpunkt des Vierecks, so berührt sie den entsprechenden Kegelschnitt in diesem Punkte.

Im Folgenden wollen wir die Eckpunkte des Vierecks mit $ABCD$, die Diagonalpunkte auf den Seiten BC, CA, AB mit XYZ, die

Schnittpunkte den angenommenen g Geraden und der BC, CA, AB, AD, BD, CD Seiten mit $PQRP_1Q_1R_1$, die ihnen conjugirten Punkte mit $P'O'R'P_1'Q_1'R_1'$, den Schnittpunkt der $P'P_1'$, $Q'Q_1'$, $R'R_1'$ Geraden mit G, endlich den zu g gehörigen $P'Q' \ldots XYZ$ Kegelschnitt mit γ, bezeichnen.

2. Nennt man die Schnittpunkte der $P'P_1'$, $Q'Q_1'$, $R'R_1'$ Geraden mit g beziehungsweise P_0, Q_0, R_0, dann gehen die Geraden P_0X, Q_0Y, R_0Z durch denselben G' Punkt, welcher conjugirt ist zu G bezüglich des Vierecks.

Nachdem nämlich die Punkte P', P'_1; Q_1, Q_1'; R', R'_1 durch G, g harmonisch getrennt sind, so schneiden sich P_0X, Q_0Y, R_0Z Geraden in einem Punkte, welcher von G durch die Seiten des Vierecks ebenfalls harmonisch getrennt ist, d. h. in dem zu G conjugirten Punkte.

3. Schneidet ein dem Viereck $ABCD$ umschriebener Kegelschnitt E die Gerade g in E, E_1, dann geht die Verbindungslinie der zu E, E_1 bezüglich des Vierecks conjugirten Punkte durch G.

E, E_1 ist ein entsprechendes Punktpar derjenigen involutorischen Punktreihe $PP_1\,QQ_1\,RR_1 \ldots$, in welchen die Gegenseiten des Vierecks g schneiden. Construirt man in dem involutorischen Strahlbüschel $X(PP_1\,QQ_1\,EE_1)$ diejenigen Strahlen $XP' \ldots$, XE', XE_1', welche von den ersteren durch A, B harmonisch getrennt sind, so bilden dieselben *) ebenfalls ein involutorisches Strahlbüschel $X(P'P_1'\,Q'Q_1'\,E'E_1')$. Dieses Strahlbüschel schneidet den Kegelschnitt γ in einer involutorischen Punktreihe $P'P_1'Q'Q_1'E'E_1' \ldots$ und es wird daher die Gerade $E'E_1'$ durch den Schnittpunkt G von $P'P_1'$, $Q'Q_1'$ gehen. — Aendert sich E im Büschel $(ABCD)$, so beschreibt EE_1 die involutorische Punktreihe auf g und $E'E_1'$ Gerade ein Strahlbüschel um G; die involutorische Punktreihe E, $E_1 \ldots$, das Strahlbüschel $E'E_1' \ldots$, wie auch die Spuren desselben in g, sind zu einander projectivisch **).

4. Wenn E' der conjugirte Punkt von E bezüglich des Vierecks $ABCD$ und XYZ das Diagonaldreieck des Letzteren ist, so liegt der conjugirte Punkt E'' von E bezüglich des Vierecks $E'XYX$ auf dem, durch $ABCDE$ Punkte gehenden Kegelschnitt E und $E'E''$ berührt E in E''.

---

*) Staudt. I. Beiträge z. G. d. L. p. 45.

**) Chasles. Traité des Sections coniques. p. 101.

Die Tangenten aus E' zum Kegelschnitt E werden denselben in E und in einem anderen E'' Punkte berühren; die Polare des Schnittpunktes der Geraden EE'', XZ ist $E'Y$, daher die Punkte E, E'', durch $E'Y$, XZ Geraden harmonisch getrennt. Ebenso wird bewiesen, dass E, E'' Punkte durch $E'X$, YZ wie auch $E'Z$, XY harmonisch getrennt und also E'' der zu E bezüglich des Vierecks $E'XYZ$ conjugirte Punkt ist.

5. Werden zu den Schnittpunkten einer Geraden mit den Seiten eines Vierecks zuerst die conjugirten Punkte construirt, dann diejenigen, welche von den genannten Schnittpunkten harmonisch getrennt sind, durch die gefundenen conjugirten und Diagonalpunkte, dann gehen die Verbindungslinien der auf den Gegenseiten liegenden Punkte, die wir zuletzt erhalten haben, durch denselben Punkt.

Bezeichnet man die Schnittpunkte der g Geraden und der Viereckseiten, wie früher, mit $PQR\,P_1Q_1R_1$, die conjugirten Punkte derselben mit $P'Q' \ldots R_1'$ die conjugirten von P, $Q \ldots R_1$ bezüglich der Vierecke $P'XYZ$, $Q'XYZ, \ldots R'_1XYZ$ mit P'', Q'', $\ldots R_1''$, dann sind $P''Q'' \ldots R_1''$ diejenigen Punkte, deren Lagenverhältnisse der Satz ausspricht. P'' muss nämlich, da sich P auf Seite $P'X$ des Vierecks $P'XYZ$ befindet, auf derselben Seite liegen und von P durch P', X harmonisch getrennt sein. Man construirt diese Punkte auf eine einfache Art. Nachdem P', P_1' Punkte durch g, G harmonisch getrennt sind, so schneiden sich die Geraden GP_1, PP', wie auch GP, P_1P_1' in P'' resp. P_1''; die Strahlen $G(P_1Q_1R_1\,PQR)$ schneiden daher die entsprechenden Viereckseiten in $P''Q''R''P_1''Q_1''R_1''$ Punkten. Es ist ferner aus der, auf den Viereckseiten liegenden harmonischen Punktgruppe leicht ersichtlich, dass $P''P_1''$, $Q''Q_1''$, $R''R_1''$ Geraden beziehungsweise durch $P_0 \equiv (PP_1,\ P'P_1')$, $Q_0 \equiv (QQ_1,\ Q'Q_1')$, $R_0 \equiv (RR_1,\ R'R_1')$ gehen. Betrachtet man nun die harmonischen Strahlen $P_0(P'P''XP)$, $Q_0(Q'Q''YQ)$, $R_0(R'R''ZR)$ die in g einen gemeinsamen Strahl haben, und deren entsprechende Strahlen P_0P', Q_0Q', R_0R', wie auch P_0X, Q_0Y, R_0Z durch G resp. G' (2), gehen, so folgt, dass sich $P_0P''P_1''$, $Q_0Q''Q_1''$, $R_0R''R_1''$ Geraden in demjenigen G_0 Punkte treffen, welcher von g durch G, G_1 harmonisch getrennt ist.

6. Schneidet der durch $ABCD$ Eckpunkte eines Vierecks, dessen Diagonalpunkte XYZ sind, gelegte E Kegelschnitt eine g Gerade in E, E_1, und sind $E'E_1'$ die conjugirten Punkte von E, E_1 bezüglich $E'XYZ$ resp. $E_1'XYZ$ Vierecke, dann gehen EE_1, $E'E_1'$, $E''E_1''$ Gerade durch denselben E_0 Punkt, EE_1'', E_1E'', $E'E_1'$ durch G; E_0 und G sind conjugirt bezüglich des Kegelschnittes E.

Die Tangenten in den E, E'' und E_1 E_1'' Eckpunkten des dem Kegelschnitt E einbeschriebenen $EE_1E''E_1''$ Vierecks schneiden sich nach (4) in E' resp. E_1'. Daraus folgt, dass EE_1, $E'E_1'$, $E''E_1''$ und EE_1'', E_1E'', $E'E_1'$ Geraden durch denselben E_0 resp. G Punkt gehen, welche bezüglich E conjugirt sind. G stellt den von uns in dem Früheren mit demselben Buchstaben bezeichneten Punkt dar, weil G von $E_0 \equiv (g, E'E_1')$ durch E', E_1' Punkte harmonisch getrennt ist.

7. Schneidet der, durch $ABCD$ Eckpunkte eines Vierecks gelegte Kegelschnitt E eine g Gerade in E, E_1 und sind E', E_1' ihre conjugirten Punkte bezüglich des Vierecks, dann geht die Gerade, welche den Schnittpunkt E_0 von EE_1' mit dem Pole der $E'E_1'$ Geraden verbindet, bei Aenderung des Kegelschnitts E im Büsche $(ABCD)$, durch denselben G' Punkt.

Diese Verbindungsgerade ist die Polare desjenigen Punktes G, welher E', E_1' von E_0 harmonisch trennt, und diese Polare geht bei Aenderung des Kegelschnitts im Büschel $(ABCD)$, durch den zu G conjugirten Punkt G'.

8. Umschreibt man dem Viereck $ABCD$, dessen Diagonalenpunkte XYZ sind, einen Kegelschnitt E, welcher eine Gerade g in E, E_1 trifft, construirt zu diesen Schnittpunkten die conjugirte E', E_1' bezüglich des Vierecks $ABCD$, wie auch E'', E_1'' bezüglich der Vierecke $E'XYZ$ resp. $E_1'XYZ$, dann geht die Verbindungsgerade $E''E_1''$ der zuletzt gefundenen Punkte, bei Aenderung des Kegelschnitts im Büschel $ABCD$ durch denselben Punkt.

Bezeichnet man den zum Schnittpunkt von EE_1'', E_1E'', d. h. G bezüglich $ABCD$ Vierecks conjugirten Punkt mit G, so werden G, G' Punkte nicht nur durch E, sondern auch durch EE_1, $E''E_1''$ Geraden harmonisch getrennt. Bei Aenderung des Kegelschnitts E, im Büschel $(ABCD)$, wird sich daher $E''E_1''$ Gerade um denjenigen Punkt drehen, welcher von $g \equiv EE_1$ Geraden durch G, G' harmonisch getrennt ist, und den wir in (5) mit G_0 bezeichnet haben.

Anmerkung. Die zwei letzten Sätze sind die Verallgemeinerungen von (2) und (5). Denn degenerirt E in die Geraden AD, BC, dann fallen $E_0EE_1E'E_1'E_1''E_1''$ Punkte in $P_0PP_1P'P_1'P''P_1''$, der Pol von $E'E_1'$ in X.

9. Ist XYZ das Diagonaldreieck des Vierecks $ABCD$, der conjugirte Punkt von E bezüglich dieses Vierecks E', bezüglich des


20*

Vierecks $E'XYZ$ aber E'', dann ist der geometrische Ort des E'' Punktes, wenn E eine Gerade g beschreibt, das Erzeugniss eines involutorischen Strahlbüschels mit einem zu ihm perspectivischen Strahlbüschel I. Ordnung, welches bei allgemeiner Lage der Gebilde eine Curve III. Ordnung ist, die durch die Eckpunkte des angenommenen Vierecks geht.

Benutzt man die früheren Bezeichnungen, so ist ersichtlich, dass die Punkte EE_1 bei Aenderung des E Kegelschnittes aus G durch ein involutorisches Strahlbüschel, $E''E_1''$ Punkte aus G_0 durch ein einfaches Strahlbüschel projicirt werden; die Spuren E_0 des letzteren Büschels auf g sind aber nach (3) und (6) projectivisch entsprechend mit der involutorischen Punktreihe EE_1 ..., daher auch beide Büschel projectivisch sind. Nach (6) schneiden GE, GE_1 Gerade den Strahl $G_0E''E_1''$ in den Punkten E_1'', E'', daher ist das Erzeugniss der erwähnten Büschel der geometrische Ort der Punkte E'' oder E_1''. Die Schnittpunkte des veränderlichen E Kegelschnitts im Büschel $(ABCD)$ mit dem entsprechenden Strahle G_0E_0 des zu ihm projectivischen Strahlbüschels G_0 erzeugen dasselbe Gebilde, darum ist das gefundene involutorische und einfache Strahlbüschel in allgemeiner Lage. Die Punkte $ABCDGG_0$ liegen auf dieser Curve III. Ordnung und G ist bekanntlich Doppelpunkt derselben. Während daher die zu den E Punkten der g Geraden conjugirten Punkte E' einen Kegelschnitt γ beschreiben, welcher der Geraden g nach der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht *), beschreiben die E'' Punkte eine Curve III. Ordnung.

10. Dreht sich die Gerade g der Ebene des Vierecks $ABCD$ um einen fixen U Punkt derselben, so beschreiben die nach der Steiner'schen Verwandtschaft entsprechenden γ ein mit dem Strahlbüschel U projectivisches Kegelschnittbüschel $[\gamma]$.

Nennt man den zu U conjugirten Punkt bezüglich des Vierecks U', so gehen bekanntlich die den Strahlen des Büschels U nach der Steiner'schen Verwandtschaft entsprechenden Kegelschnitte durch U' und die Diagonalpunkte des Vierecks. Die Spurpunkte des Büschels U auf der AB Geraden sind projectivisch zu den Schnittpunkten derselben Geraden mit den entsprechenden Kegelschnitten, da je zwei entsprechende Punkte durch A, B harmonisch getrennt sind.

11. Dreht sich eine Gerade g um einen fixen U Punkt der Ebene eines Vierecks $ABCD$, so liegen die Doppelpunkte derjenigen

*) Durège. Curven III. Ordnung p. 121.

Involutionen, welche durch die Spuren der Viereckseiten auf den beweglichen Geraden erzeugt werden, auf einer Curve III. Ordnung, welche durch die Eck- und Diagonalpunkte des Vierecks, so wie durch den zu U conjugirten U' Punkt geht.

Diese Doppelpunkte sind nämlich die Schnittpunkte der Geraden g mit den entsprechenden Kegelschnitten γ des Büschels $(U'XYZ)$. Geht g durch den A Eckpunkt des Vierecks, so berührt g den entsprechenden Kegelschnitt des Büschels in A, welcher Punkt daher auf der Curve III. Ordnung liegt. Die Diagonalpunkte XYZ geben je einen Doppelpunkt auf den Geraden UX, UY, UZ, endlich werden U, U' die Doppelpunkte der auf UU' Geraden erzeugten Involutionen sein.

12. Dreht sich die Gerade g um einen U Punkt, so wird der durch g und das Viereck $ABCD$ nach (1) bestimmte G Punkt eine Curve III. Ordnung beschreiben, welche durch die Eckpunkte des Vierecks und den zu U bezüglich des $U'XYZ$ Vierecks conjugirten U'' Punkt, endlich durch die Diagonalpunkte des letzteren Vierecks geht. XYZ sind, wie früher, Diagonalpunkte von $ABCD$ Viereck, U, U' sind conjugirte Punkte.

Die Pole eines beliebigen Strahles g_i im Büschel U bezüglich desjenigen Kegelschnittbüschels $[\gamma]$, welcher dem Strahlbüschel U nach der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht, liegen auf einem Kegelschnitt k_i. Ist u_i die Polare des Punktes U bezüglich jenes γ_i Kegelschnittes im Büschel $[\gamma]$, welcher der g_i Geraden entspricht, so wird der Pol der Geraden g_i bezüglich γ_i sowohl auf u_i als auf k_i liegen und daher eines der Schnittpunkte dieser Linien sein. Dieser Pol ist aber der zum Strahle g_i des Büschels U gehöriger G Punkt. Bei Aenderung der Strahlen g_i im Büschel U, beschreibt k_i einen Kegelschnittbüschel $[k]$, dessen Grundpunkte die Diagonalpunkte des Vierecks $U'XYZ$ und der zu U bezüglich dieses Vierecks conjugirte U'' Punkt ist; ebenso beschreibt u_i ein Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt U''. Beide Büschel sind projectivisch zu dem Büschel U, daher ist der geometrische Ort der Punkte G das Erzeugniss der Büschel $[k]$ und U'' d. h. eine Curve III. Ordnung. Nachdem hier der Mittelpunkt U'' des Strahlbüschels zugleich Grundpunkt des Kegelschnittbüschels ist, wird U'' ein Doppelpunkt der Curve sein. Geht der veränderliche Strahl g_i des Büschels U durch den Eckpunkt A des Vierecks $ABCD$, se berührt g_i den ihm entsprechenden Kegelschnitt des Büschels $[\gamma]$ im Punkte A; A ist daher als Pol dieses Strahles ein Punkt der Curve III. Ordnung, und ebenso die übrigen Eckpunkte des Vierecks. Die Mittelpunkte der degenerirten Kegelschnitte im Büschel $[k]$ sind auch Pole der entsprechenden

Strahlen im Büschel U, weshalb die Curve III. Ordnung auch durch die Diagonalpunkte des Vierecks $U'XYZ$ geht.

13. Die Pole eines Strahlbüschels I. Ordnung bezüglich der entsprechenden Elemente eines ihm projectivischen Kegelschnittbüschels liegen auf einer Curve III. Ordnung, welche durch die Diagonalpunkte des dem Büschel einbeschriebenen Vierecks und durch den, bezüglich dieses Vierecks, dem Mittelpunkt des Strahlbüschels conjugirten Punkt geht.

Der Beweis dieses Satzes ist in (12) gegeben.

XVII.

Die Auflösung dreigliedriger Gleichungen nach Gauss.

Von

A. M. Nell.

---

§ 1.

Um die reellen Wurzeln solcher höherer Gleichungen zu finden, welche aus nur 3 Gliedern bestehen, hat der unsterbliche Verfasser der Theoria motus eine überraschend einfache Methode entwickelt, bei welcher eine Tafel der Additionslogarithmen zu benutzen ist. Im III. Buche der Gauss'chen Werke findet sich diese Methode unter dem Titel: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen Seite 85 u. s. f. abgeleitet. Auch wird dort (Seite 96 u. s. f.) gezeigt, wie die imaginären Wurzeln verhältnissmässig leicht bestimmt werden können.

Da nun diese Methode einerseits nicht so bekannt zu sein scheint, wie sie es verdient, andererseits die neueren Tafeln der Additionslogarithmen zweckmässiger angeordnet sind, als die erste von Gauss selber berechnete Tafel, wodurch auch das Verfahren zur Lösung der bezeichneten Gleichungen selbst entsprechend abzuändern ist, so wollen wir uns hier nochmals damit beschäftigen.

Die allgemeine Form einer dreigliedrigen Gleichung ist

$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$$

in welcher e, f, m und n stets positive Grössen sein sollen; dabei wird jederzeit vorausgesetzt, dass die Exponenten m, n keinen gemein-



schaftlichen Teiler haben. Indem zunächst die positiven Wurzeln aufgesucht werden sollen, hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

Erste Form.

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0,$$

durch f dividirt, gibt

$$\frac{x^{m+n}}{f} + \frac{e}{f} \cdot x^m = 1$$

Setzt man

$$\frac{x^{m+n}}{f} = \sin^2\theta, \qquad \frac{ex^m}{f} = \cos^2\theta,$$

so findet sich

$$\frac{x^n}{e} = \mathrm{tg}^2\theta$$

also

$$x^m = \frac{f\cos^2\theta}{e}$$

und

$$x^n = e\,\mathrm{tg}^2\theta$$

$$x^{mn} = \frac{f^n \cos^{2n}\theta}{e^n}, \qquad x^{nm} = e^m \mathrm{tg}^{2m}\theta$$

Die beiden Werte gleichgesetzt, gibt

$$\mathrm{tg}^{2m}\theta \,.\, \sec^{2n}\theta = \frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$$

$$m \log \mathrm{tg}^2\theta + n \log \sec^2\theta = \log \lambda$$

Nach der sehr zweckmässigen Entwicklung, welche Wittstein seiner fünf- und siebenstelligen Tafel der Additionslogarithmen gegeben, und welche jetzt fast überall zu Grunde gelegt wird, besteht zwischen dem Argument A und der Function B der Tafel die Beziehung, dass wenn $A = \log x$, $B = \log(x+1)$ ist, also auch, wenn $A = \log \mathrm{tg}^2\theta$, $B = \log \sec^2\theta$ sein muss.

Hiernach lässt sich obige Gleichung schreiben:

$$mA + nB = \log \lambda$$

Durch einige Versuchsrechnungen erhält man gewöhnlich sehr schnell, wenn man ausserdem noch die Regula falsi anwendet, den genauern Wert von A; dann hat man

$$\log x = \frac{\log e + A}{n}$$

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0,$$

durch das erste Glied dividirt, gibt



$$ex^{-n} + fx^{-m-n} = 1$$

$ex^{-n} = \cos^2\theta$ und $fx^{-m-n} = \sin^2\theta$ gesetzt, so wird

$$\frac{fx^{-m}}{e} = \mathrm{tg}^2\theta$$

$$x^m = \frac{f}{e\,\mathrm{tg}^2\theta}, \quad x^n = e\sec^2\theta$$

$$x^{mn} = \frac{f^n}{e^n . \mathrm{tg}^{2n}\theta}, \quad x^{nm} = e^m \sec^{2m}\theta$$

$$\mathrm{tg}\,\theta^{2n} . \sec\theta^{2m} = \frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$$

$$nA + mB = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log f - \log e - A}{m}$$

In beiden Fällen hat die Gleichung nur eine positive Wurzel.

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0,$$

durch ex^m dividirt

$$\frac{x^n}{e} + \frac{fx^{-m}}{e} = 1$$

$$\frac{x^n}{e} = \sin^2\theta, \quad \frac{f}{ex^m} = \cos^2\theta,$$

also

$$x^m = \frac{f}{e\cos^2\theta}$$

$$x^{nm} = e^m \sin^{2m}\theta, \quad x^{mn} = \frac{f^n}{e^n \cos^{2n}\theta}$$

$$\sin^{2m}\theta . \cos^{2n}\theta = \frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$$

Wird zur Linken mit $\cos^{2m}\theta$ dividirt und multiplicirt, so findet sich

$$\mathrm{tg}^{2m}\theta . \cos^{2m+2n}\theta = \lambda$$

oder

$$\frac{\mathrm{tg}^{2m}\theta}{\sec^{2m+2n}\theta} = \lambda$$

$$mA - (m+n)B = \mathrm{tg}\,\lambda.$$

Da ferner

$$x^{m+n} = f . \mathrm{tg}^2\theta,$$

so hat man

$$\log x = \frac{\log f + A}{m+n}$$

Vierte Form.

$$x^{m+n} + ex^m + f = 0$$

Diese Gleichung kann offenbar keine positive Wurzel haben.

§ 2.

Bei der dritten Form hatten wir die Gleichung

$$\sin^{2m}\theta . \cos^{2n}\theta = \lambda$$

Schreiben wir statt dessen $u = \sin^{2m}\theta . \cos^{2n}\theta$, so wird $u = 0$, sowohl für $\theta = 0$, als für $\theta = 90^0$; daraus folgt, dass u zwischen diesen Grenzen einen Maximalwert haben wird, der durch u_1 und das zugehörige θ durch θ_1 bezeichnet werden soll.

$$lu = 2m . l\sin\theta + 2n . l\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2u(m\cot\theta - n\,\mathrm{tg}\,\theta)$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

liefert

$$\mathrm{tg}^2\theta_1 = \frac{m}{n}, \quad \sin^2\theta_1 = \frac{m}{m+n}, \quad \cos^2\theta_1 = \frac{n}{m+n}$$

daher

$$u_1 = \frac{m^m . n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

Für $\theta = 45^0 = \theta_2$ wird

$$u_2 = \frac{1}{2^{m+n}}$$

In dem besonderen Falle, dass $n = m$ wäre, fände sich $\theta_1 = \theta_2 = 45^0$ und $u_1 = u_2$.

Betrachtet man die Bögen θ als Abscissen und die u als Ordinaten einer Curve, so berührt diese die θ Axe an beiden Enden.

Zieht man im Abstande λ parallel zur Abscissenaxe die Gerade PP', so bilden die Abscissen der Durchschnittspunkte P, P' die Lösungen der obigen Gleichung.

Ist λ gleich dem Maximalwert u_1, so hat die Gleichung (dritte Form, § 1.) 2 gleiche Wurzeln, nämlich

$$x^{m+n} = f\,\mathrm{tg}^2\theta_1 = \frac{fm}{n}$$

Wenn $\lambda > u$, so hat die Gleichung keine positive Wurzel.

Dagegen hat die Gleichung stets 2 positive Wurzeln, wenn $\lambda < u_1$.

Man erkennt, dass, wenn $m > n$ und λ zwischen u_1 und u_2 liegt, beide Werte von θ grösser sind als 45^0; es liegt nämlich

der eine Wert zwischen 45^0 und θ_1, also A_1 zwischen 0,0 und $\log \frac{m}{n}$

„ andere „ „ θ_1 „ 90^0 „ $A_2 > \log \frac{m}{n}$

Ist $\lambda < u_2$, so ist der eine Wert von $\theta < 45^0$, daher $A_1 < 0{,}0$

„ „ „ andere „ „ $\theta > \theta_1$, „ $A_2 > \log \frac{m}{n}$

Ebenso zeigt sich, wenn $m < n$, dass, wenn λ zwischen u_1 und u_2 liegt, beide Werte von $\theta < 45^0$ sind und zwar der eine Wert $< \theta_1$, der andere zwischen θ_1 und 45^0 liegt. Ist $\lambda < u_2$, so ist der eine Wert von $\theta < \theta_1$, der andere $> 45^0$.

Die negativen Wurzeln der Gleichung bestimmt man dadurch, dass man $x = -y$ setzt, und die positiven Wurzeln der umgeformten Gleichung nach den oben gegebenen Vorschriften aufsucht.

§ 3.

Imaginäre Wurzeln.

Dividirt man die Gleichung

$$X = x^{m+n} + e \cos \varepsilon x^m + f \cos \varphi = 0$$

durch das erste Glied, so wird

$$1 + e \cos \varepsilon x^{-n} + f \cos \varphi x^{-m-n} = 0$$

Wird eine imaginäre Wurzel derselben durch

$$x = r(\cos \varrho + i \sin \varrho)$$

bezeichnet und dieser Wert eingesetzt, so findet sich:

$$1 + er^{-n} \cos\varepsilon \cos n\varrho + f \cos\varphi r^{-m-n}.\cos(m+n)\varrho - i[er^{-n}\cos\varepsilon \sin n\varrho + fr^{-m-n}\cos\varphi.\sin(m+n)\varrho] = 0$$

Hieraus folgt

$$er^{-n} \cos \varepsilon \sin n\varrho + fr^{-m-n} \cos \varphi \sin(m+n)\varrho = 0$$

$$r^m = -\frac{f\cos\varphi\sin(m+n)\varrho}{e\cos\varepsilon\sin n\varrho}$$

Dividirt man die Gleichung $X = 0$ durch $f\cos\varphi$ und setzt den obigen Wert von x ein, so wird

$$r^{m+n}.\sin(m+n)\varrho + e\cos\varepsilon\, r^m \sin m\varrho = 0$$

$$r^n = -\frac{e\cos\varepsilon\sin m\varrho}{\sin(m+n)\varrho}$$

Der erste Wert von r zur $n$ten, der andere zur $m$ten Potenz erhoben, gibt

$$r^{mn} = (-1)^n.\frac{f^n\cos\varphi^n\sin(m+n)\varrho^n}{e^n\cos\varepsilon^n\sin n\varrho^n} = (-1)^m.\frac{e^m\cos\varepsilon^m\sin m\varrho^m}{\sin(m+n)\varrho^m},$$

daraus

$$\frac{1}{\lambda} = (-1)^{m+n}.\frac{\cos\varphi^n}{\cos\varepsilon^{m+n}}.\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m\sin n\varrho^n}$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf ϱ aufzulösen, wobei es genügt, die zwischen den Grenzen 0 und 90° liegenden Werte von ϱ zu bestimmen, da, wenn eine imaginäre Wurzel bekannt ist, auch sogleich noch eine zweite angegeben werden kann. Eliminirt man noch die Grösse aus den Werten für r^m und r^n, so findet sich

$$r^{m+n} = f\cos\varphi\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}.$$

§ 4.

Nach den Ausführungen des § 3. ergeben sich folgende Regeln zur Bestimmung der imaginären Wurzeln einer dreigliedrigen Gleichung:

Erste Form.

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0$$

In der Gl. $X = 0$ des § 3. ist zu setzen $\varepsilon = 0$, $\varphi = 180°$, dadurch wird

$$\frac{1}{\lambda} = (-1)^m\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m\sin n\varrho^n}, \quad r^{m+n} = -f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0$$

Setzt man $\varepsilon = 180°$ und $\varphi = 180°$, so wird

$$\frac{1}{\lambda} = (-1)^n\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m\sin n\varrho^n}, \quad r^{m+n} = -f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0, \quad \varepsilon = 180^0, \quad \varphi = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \sin n\varrho^n}, \quad r^{m+n} = f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}.$$

Vierte Form.

$$x^{m+n} + ex^m + f = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \varphi = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = (-1)^{m+n}\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \sin n\varrho^n}, \quad r^{m+n} = f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

In allen 4 Fällen erhält man zu jedem Werte von ϱ die beiden Wurzeln

$$x = r(\cos\varrho \pm i\sin\varrho).$$

§ 5.

Noch ist zu zeigen, wie die transcendente Gleichung

$$\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda}$$

aufgelöst werden kann. Wir setzen y an die Stelle von $\frac{1}{\lambda}$ und stellen uns die Aufgabe, die entsprechende Curve zu construiren, indem die Bögen ϱ als Abscissen betrachtet werden.

Für $\varrho = 0$ wird $y = \frac{0}{0}$. Entwickeln wir die Sinus nach der Form

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120}\cdots\right)$$

so wird

$$\sin m\varrho^m = m^m\varrho^m\left[1 - \frac{m^3}{6}\varrho^2 + \frac{m^5(5m-2)}{360}\varrho^4 \ldots\right]$$

$$\sin n\varrho^n = n^n\varrho^n\left[1 - \frac{n^3}{6}\varrho^2 + \frac{n^5(5n-2)}{360}\varrho^4 \ldots\right]$$

$$\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^n = m^m . n^n . \varrho^{m+n}\left[1 - \frac{m^3+n^3}{6}\varrho^2 \ldots\right]$$

$$\sin(m+n)\varrho^{m+n} = (m+n)^{m+n} . \varrho^{m+n}\left[1 - \frac{(m+n)^3}{6}\varrho^2 \ldots\right]$$

$$y = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m . n^n}\left[1 - \tfrac{1}{2}mn(m+n)\varrho^2 \ldots\right]$$

Setzt man hier $\varrho = 0$ und bezeichnet den entsprechenden Wert von y durch y_0

$$y_0 = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m \cdot n^n}$$

Nehmen wir von

$$y = \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \sin n\varrho_n}$$

die Logarithmen und differentiiren, so wird

$$\frac{dy}{d\varrho} = y[(m+n)^2 \cot(m+n)\varrho - m^2 \cot m\varrho - n^2 \cot n\varrho]$$

und weil

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^2 \ldots$$

$$\frac{dy}{d\varrho} = -mn(m+n)[\varrho + \tfrac{1}{9}(m^2+mn+n^2)\varrho^3 \ldots]y$$

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} = -mn(m+n)\left[\varrho + \frac{m^2+mn+n^2}{9}\varrho^3 \ldots\right]\frac{dy}{d\varrho}$$
$$-mn(m+n)\left[1 + \frac{m^2+mn+n^2}{3}\varrho^2 \ldots\right]y$$

Für $\varrho = 0$ wird $\frac{dy}{d\varrho} = 0$. Die Curve schneidet also die Ordinatenaxe in B im Abstande $AB = y_0$ vom Anfangspunkte und eine durch B geführte Parallele zur Abscissenaxe ist eine Tangente.

y wird $= 0$ für $\varrho = \frac{\pi}{m+n}$; dafür ist $\frac{dy}{d\varrho} = 0$ und auch $\frac{d^2y}{d\varrho^2} = 0$.

Macht man also $AC = \frac{\pi}{m+n}$, so geht die Curve durch C, wo gleichzeitig AC Tangente ist. Zwischen A und C liegt jedenfalls ein Wendepunkt, ausserdem kann C stets möglicher Weise ein Wendepunkt sein. Um darüber zu entscheiden, sind die Ordinaten der Nachbarpunkte von C zu untersuchen. Nur dann, wenn dieselben verschiedene Vorzeichen haben, hat C die bezeichnete Eigenschaft. Zu dem Zweck setzen wir

$$\varrho = \frac{\pi}{m+n} + \alpha,$$

also

$$\sin(m+n)\varrho = \sin[\pi + (m+n)\alpha] = \cos\pi \sin(m+n)\alpha,$$

hier soll α einen sehr kleinen Bogen bedeuten. Dadurch wird

$$y = \frac{(-1)^{m+n} . \sin(m+n)\alpha^{m+n}}{\sin\left(\frac{m\pi}{m+n} + m\alpha\right)^m \sin\left(\frac{n\pi}{m+n} + n\alpha\right)^n}$$

Das Vorzeichen des Zählers entscheidet über das von y, da die Bögen im Nenner kleiner sind als π.

Wenn $(m+n)$ eine gerade Zahl, so ist y für positive und negative α stets positiv.

Wenn $(m+n)$ eine ungerade Zahl, so erhält y verschiedene Vorzeichen, je nachdem man α positiv oder negativ nimmt, daher kann nur in letzterem Falle C ein Wendepunkt sein.

Die Curve trifft noch an mehreren Stellen mit der Abscissenaxe zusammen; man erhält die betreffenden Punkte aus der Bedingung $\varrho = \frac{k\pi}{m+n}$, wo der Reihe nach $k = 1, = 2, = 3$ zu setzen ist. Für alle diese Stellen ist $\frac{dy}{d\varrho}$ und $\frac{d^2y}{d\varrho^2} = 0$, daher findet jedesmal eine Berührung mit der Abscissenaxe statt, ausserdem können diese Punkte auch Wendepunkte sein. Setzt man ferner $\varrho = \frac{\pi}{m}, = \frac{2\pi}{m}, = \frac{3\pi}{m}$ ... und auch $\varrho = \frac{\pi}{n}, = \frac{2\pi}{n}$ ..., so wird für alle diese Werte $y = \infty$, d. h. die durch diese Punkte der Abscissenaxe geführten Ordinaten sind Asymptoten der Curve. Letztere besteht daher aus einer Reihe von Zweigen, welche durch Asymptoten getrennt sind.

Wenn $(m+n)$ eine gerade Zahl, so liegen diese Zweige abwechselnd ober- und unterhalb der Abscissenaxe.

Ist dagegen $(m+n)$ ungerade, so liegen stets beide Teile eines Zweiges zu verschiedenen Seiten der Abscissenaxe.

Um dies nachzuweisen, betrachten wir zuerst den Fall, dass $(m+n)$ eine gerade Zahl ist. Dann sind stets m und n ungerade Zahlen, da sie keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Wir schreiben jetzt:

$$y = \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n} . \sin m\varrho . \sin n\varrho}{\sin m\varrho^{m+1} . \sin n\varrho^{n+1}}$$

$$= \left[\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^{m+1} . \sin n\varrho^{n+1}}\right] . \sin m\varrho . \sin n\varrho$$

Der in [ ] gesetzte Factor ist stets positiv, daher stimmt das Zeichen von y mit dem des Products der beiden Sinus überein.

Setzt man

$$\varrho = \frac{k\pi}{m+n} + \alpha,$$

also

$$m\varrho = \frac{k\pi m}{m+n} + m\alpha$$

$$\sin m\varrho = \sin\frac{k\pi m}{m+n} + m\alpha\,.\cos\frac{k\pi m}{m+n} - \tfrac{1}{2}m^2\alpha^2\,.\sin\frac{k\pi m}{m+n}\cdots$$

Den Zuwachs α stellen wir uns so klein vor, dass nur die erste Potenz zu beachten ist

$$\sin n\varrho = \sin\frac{k\pi n}{m+n} + n\alpha\cos\frac{k\pi n}{m+n}$$

$$\sin m\varrho\,.\sin n\varrho = \sin\frac{k\pi m}{m+n}\;\sin\frac{k\pi n}{m+n} + m\alpha\sin\frac{k\pi n}{m+n}\;\cos\frac{k\pi m}{m+n}$$
$$+ n\alpha\sin\frac{k\pi m}{m+n}\cdot\cos\frac{k\pi n}{m+n} = S_k$$

Da nun allgemein

$$\sin x\,.\sin y = \tfrac{1}{2}\cos(x-y) - \tfrac{1}{2}\cos(x+y)$$
$$\sin x\,.\cos y = \tfrac{1}{2}\sin(x-y) + \tfrac{1}{2}\sin(x+y),$$

so wird

$$S_k = -\tfrac{1}{2}\cos k\pi + \tfrac{1}{2}\cos\frac{k\pi(m-n)}{m+n} - \frac{m-n}{2}\,\alpha\,.\sin\frac{k\pi(m-n)}{m+n}$$

$$k = 1 \quad S_1 = \left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{m-n}{2}\,\alpha\sin\pi\frac{m-n}{m+n}$$

$$k = 2 \quad S_2 = -\left(\sin\pi\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{m-n}{2}\,\alpha\sin 2\pi\frac{m-n}{m+n}$$

$$k = 3 \quad S_3 = \left(\cos\frac{3\pi}{2}\,\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{m-n}{m+n}\,\alpha\sin 3\pi\frac{m-n}{m+n}$$

$$k = 4 \quad S_4 = -\left(\sin 2\pi\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - \frac{m-n}{2}\,\alpha\sin 4\pi\frac{m-n}{m+n}$$

Das zweite Glied hat, da α sehr klein, keinen Einfluss auf das Vorzeichen der S.

Hiernach sind die Ordinaten der beiderseitigen Nachbarpunkte von C, C', C'' entweder alle positiv, oder alle negativ; es können also hier keine Wendepunkte vorkommen.

§ 6.

Ist $(m+n)$ eine ungerade Zahl, dann ist

entweder m gerade und n ungerade
oder n „ „ m „

Nehmen wir an, m sei gerade, so ist $(n+1)$ gleichfalls eine gerade Zahl.

$$y = \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n} . \sin n\varrho}{\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^{n+1}}$$

Um über das Zeichen von y zu entscheiden, braucht man nur den Zähler, den wir durch Z bezeichnen wollen, zu beachten, da der Nenner jedenfalls positiv ist.

Ausserdem lassen wir den Exponenten $(m+n)$ weg, da er auf das Vorzeichen ohne Einfluss ist. Setzen wir noch

$$\varrho = \frac{k\pi}{m+n} + \alpha,$$

daher

$$\sin(m+n)\varrho = \sin[k\pi + (m+n)\alpha] = \cos k\pi \sin(m+n)\alpha,$$

so wird

$$Z = \cos k\pi . \sin(m+n)\alpha . \sin n\varrho = \cos k\pi \sin\left(\frac{k\pi n}{m+n} + n\alpha\right). \sin(m+n)\alpha$$

Z und also auch y erhalten entgegengesetzte Vorzeichen, wenn man dem α einmal einen positiven, das andere mal einen negativen Wert beilegt, daher sind alle in der Abscissenaxe liegenden Punkte Wendepunkte.

Setzt man noch

$$\cos k\pi \sin\left(\frac{k\pi n}{m+n} + n\alpha\right) = Q,$$

so ist, unter der Voraussetzung, dass Q positiv ist:

für positive α der Wert von y positiv
„ negative α „ „ „ y negativ.

Ist dagegen Q negativ, so ist für positive α der Wert von y negativ. und für negative α der Wert von y positiv.

Wäre n gerade und m ungerade, so dürfte man in dem Ausdruck für Q nur m an die Stelle von n setzen und die gleichen Schlüsse ziehen.

Zur Anwendung dieser Regeln soll die Gestalt der Curve für den Fall bestimmt werden, dass $m = 4$ und $n = 5$ sei.

Für $k = 1$ wird $Q = -\sin\left(\frac{5}{9}\pi + 5\alpha\right)$

„ $k = 2$ „ $Q = \sin\left(\frac{10}{9}\pi + 5\alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{9} + 5\alpha\right)$

„ $k = 3$ „ $Q = -\sin\left(\frac{15}{9}\pi + 5\alpha\right) = \sin\left(\frac{6}{9}\pi + 5\alpha\right)$

„ $k = 4$ „ $Q = \sin\left(\frac{20}{9}\pi + 5\alpha\right) = \sin\left(\frac{2}{9}\pi + 5\alpha\right)$

Hat man nach diesen Andeutungen die Curve aufgezeichnet und zieht im Abstande $= \frac{1}{\lambda}$ eine Parallele zur Abscissenaxe, so sind die Abscissen der der Durchschnittspunkte P_1, P_2, P_3 die gesuchten Werte des Bogens ϱ, welche zur Berechnung der imaginären Wurzeln erforderlich sind. In dem vorliegenden Beispiel wären also 3 Paare imaginärer Wurzeln vorhanden, und da $m + n = 9$ ist, 3 reelle Wurzeln. Hätte dagegen $\frac{1}{\lambda}$ einen kleineren Wert als y_0, so erhielte man 4 Durchschnittspunkte, folglich 8 imaginäre und nur eine reelle.

Erscheint die Gleichung zur Bestimmung von ϱ in der Form

$$-\frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \,.\, \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda}$$

so hat die Curve gerade die entgegengesetzte Lage. Hier ist es am einfachsten, zunächst das negative Zeichen ausser acht zu lassen und dann den Wert von $\frac{1}{\lambda}$ unterhalb der Abscissenaxe aufzutragen.

§ 7.

Uebersichtliche Zusammenstellung der Regeln zur Auflösung der dreigliedrigen Gleichungen.

Die folgenden Vorschriften zeigen, wie die positiven und imaginären Wurzeln gefunden werden. Um die negativen zu bestimmen,

setzt man $x = -y$ und sucht von der umgeformten Gleichung die positiven Wurzeln.

Werden diese mit dem negativen Vorzeichen versehen, so sind es Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

In dem Folgenden ist immer

$$\lambda = \frac{f^n}{e^{m+n}}.$$

Erste Form.

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0$$

$$mA + nB = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log e + A}{n}$$

Aus der Gleichung

$$(-1)^m \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda}$$

sind die zwischen 0 und 90° liegenden Werte von ϱ zu bestimmen.

$$r^{m+n} = -f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

oder

$$r^m = \frac{f\sin(m+n)\varrho}{e\sin n\varrho}$$

Letztere Formel entscheidet über das Vorzeichen von r, wenn $(m+n)$ eine gerade Zahl.

$$x = r\cos\varrho \pm ir\sin\varrho.$$

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0$$

$$nA + mB = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log f - \log e - A}{m}$$

$$(-1)^n \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m . \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda},$$

daraus die Werte von ϱ zwischen 0 und 90°.

$$r^{m+n} = -f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

oder

$$r^m = -\frac{f\sin(m+n)\varrho}{e\sin n\varrho}$$

$$x = r\cos\varrho \pm ir\sin\varrho$$

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0.$$

Hier sind 4 Fälle zu unterscheiden:

1. $\frac{1}{\lambda} < \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m \,.\, n^n}$, die Gleichung hat keine positive Wurzel,

2. $\frac{1}{\lambda} = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m \,.\, n^n}$, „ „ „ 2 gleiche „ Wurzeln,

nämlich

$$x^{m+n} = f\frac{m}{n}$$

oder

$$x^n = \frac{em}{m+n}$$

3. $\frac{1}{\lambda} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m \,.\, n^n}$ und nicht grösser als 2^{m+n}, 2 positive Wurzeln

$$mA - (m+n)B = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log f + A}{m+n}$$

α) $m > n$; $A_1 > 0{,}0$ und $< \log\frac{m}{n}$

$A_2 > \log\frac{m}{n}$

β) $m < n$; $A_1 < \log\frac{m}{n}$

$A_2 > \log\frac{m}{n}$ und $< 0{,}0$

4. $\frac{1}{\lambda} > 2^{m+n}$, 2 positive Wurzeln.

$$mA - (m+n)B = \log\lambda, \quad \log x = \frac{\log f + A}{m+n}$$

α) $m > n$, $A_1 < 0{,}0$

$A_2 > \log\frac{m}{n}$

β) $m < n$, $A_1 < \log\frac{m}{n}$

$A_2 > 0{,}0$

$$\frac{\sin(m \times n)\varrho^{m+n}}{\sin m\varrho^m \,.\, \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda},$$

daraus die Werte von ϱ zwischen 0 und 90°.

$$r^{m+n} = \frac{f \sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

oder

$$r^m = \frac{f \sin(m+n)\varrho}{e \sin n\varrho}$$

$$x = r\cos\varrho \pm ir\sin\varrho.$$

Vierte Form.

$$x^{m+n} + ex^m + f = 0.$$

Diese Gleichung hat keine positive Wurzel.

$$(-1)^{m+n} \cdot \frac{\sin(m+n)\varrho^{m+n}}{\sin(m\varrho^m \cdot \sin n\varrho^n} = \frac{1}{\lambda},$$

daraus die Werte von ϱ zwischen 0 und 90^0.

$$r^{m+n} = f\frac{\sin m\varrho}{\sin n\varrho}$$

oder

$$r^m = -\frac{f \sin(m+n)\varrho}{e \sin n\varrho}$$

$$x = r\cos\varrho \pm ir\sin\varrho.$$

§ 8.

Zur Erläuterung der Vorschriften des § 7. sollen sämmtliche Wurzeln der folgenden Gleichung bestimmt werden.

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0 \qquad \text{(Erste Form)}$$

$e = 28, \quad f = 480, \quad m = 4, \quad n = 3 \qquad \log\lambda = 7,913\,6175$

$$4A + 3B = 7,913\,6175.$$

Um diese Gleichung aufzulösen, beginnt man die Arbeit am zweckmässigsten mittelst einer dreistelligen Tafel der Additionslogarithmen *)

A	B	$4A+3B$
9.4	0.097	7.891
9.5	0.119	8.375

Der Wert von A liegt hiernach zwischen 9.4 ... 9.5, man kann ihn durch Anwendung der regula falsi bestimmen. Nach derselben ist

*) Der Verfasser kann hier seine Tafel der fünfstelligen Logarithmen der Zahlen etc. empfehlen, die in Darmstadt im Verlag von A. Bergsträsser 1883 erschienen. Seite 84 sind die Additionslogarithmen auf 3 Decimalen und Seite 69 bis 82 auf 5 Decimalen angegeben.

$$9{,}5-9{,}4 : 8{,}375-7{,}891 = A-9{,}4 : 7{,}914-7{,}891$$
$$0{,}1 : 0{,}484 = A-9{,}4 : 0{,}023$$
$$A = 9{,}4+0{,}1 \,.\, \frac{0.023}{0.484} = 9.4048$$

Wendet man jetzt eine fünfstellige Tafel der Additionslogarithmen an, so ist

A	B	$4A+3B$	
9.404	0.09813	7.91039	hieraus genauer $A = 9{,}404702$
9.405	0.09833	7.91499	

Wird A noch genauer verlangt, so wende man die siebenstellige Tafel von Wittstein *) an. Durch diese hat man

A	B	$4A+3B$
9.4047	0.098 2705	7.913 6115
9.4048	0.098 2907	7.914 0721

Nach der Regula falsi erhält man daraus

$$A = 9.404\,7013$$
$$+\log c = 1.447\,1580$$
$$3 \log x_1 = 0.851\,8593$$
$$x_1 = 1{,}922\,8841 \qquad \log x_1 = 0.283\,9531$$

Um die negativen Wurzeln zu erhalten, setzen wir $x = -y$ und bekommen

$$y^7 - 28y^4 + 480 = 0 \quad \text{(Dritte Form)}$$
$$e = 28, \quad f = 480, \quad m = 4, \quad n = 3;$$
$$y_0 = \frac{7^7}{4^4 . 3^3} = \frac{823\,543}{6912} = 119{,}147; \quad \frac{1}{\lambda} = 122{,}006, \quad 2^{m+n} = 2^7 = 128.$$

Hier sind also die Vorschriften Nro. 3, α) der dritten Form anzuwenden.

$$\log \frac{m}{n} = 0{,}12494.$$

Daher

$$A_1 < 0{,}125 \quad \text{und} \quad A_2 > 0{,}125$$

*) Siebenstellige Gauss'sche Logarithmen von Dr. Th. Wittstein. Hannover. Hahn'sche Hofbuchhandlung. 1866.

Durch stufenweise Anwendung der drei-, fünf- und siebenstelligen Tafeln der Additionslogarithmen erhält man unter Zuhülfenahme der Regula falsi die genannten Werte:

$$A_1 = 0.052\,9417 \qquad A_2 = 0.197\,5072$$
$$\log f = 2.681\,2412 \qquad \log f = 2.681\,2412$$
$$7\log y_1 = 2.734\,1829 \qquad 7\log y_2 = 2.8787\,484$$

$$\log y_1 = 0{,}390\,5976, \quad x_2 = -y_1 = -2{,}458\,0890,$$
$$\log y_2 = 0.411\,2498, \quad x_3 = -y_2 = -2{,}577\,8036$$

Um die imaginären Wurzeln zu erhalten, ist zunächst folgende Gleichung aufzulösen

$$\frac{\sin 7\varrho^7}{\sin 4\varrho^4 \sin 3\varrho^3} = 122.00638$$

Um die Gleichung

$$y = \frac{\sin 7\varrho^7}{\sin 4\varrho^4 \sin 3\varrho^3}$$

nach den Andeutungen der §§ 6. und 7. zu construiren *), so wird

$$y = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 25\tfrac{5}{7}{}^0, \; = 51\tfrac{3}{7}{}^0 \quad \text{und} \quad = 77\tfrac{1}{2}{}^0$$
$$y = \infty \quad „ \quad \varrho = 45^0, \; = 60^0 \quad „ \quad = 90^0$$

Hiernach bestimmen sich die Berührungspunkte in der Abscissenaxe und die Asymptoten. Ferner ist $y_0 = 119.147$. Die Grösse Q des § 7. wird hier

$$Q = \cos k\pi \,.\, \sin\left(\frac{3k\pi}{7} + 3\alpha\right)$$

$$Q_1 = -\sin(\tfrac{3}{7}\pi + 3\alpha): \quad Q_2 = \sin(\tfrac{6}{7}\pi + 3\alpha);$$

$$Q_3 = -\sin(\tfrac{9}{7}\pi + 3\alpha) = \sin(\tfrac{2}{7}\pi + 3\alpha)$$

Danach erhält man die einzelnen Teile der Curve.

Den Durchschnittspunkten P und P' mit der im Abstand $\frac{1}{\lambda}$ zur

---

*) Sebstverständlich ist es nicht notwendig, die Curve zu construiren, sondern es genügt vollständig, sich eine Skizze zu entwerfen, indem man auf eine Gerade, dem Augenmaasse nach 9 gleiche Teile aufträgt und mit 0, 10, 20 ... 90 beziffert. Die Dimensionen y_0 und $\frac{1}{\lambda}$ können nach einem ganz willkürlichem Maasse bestimmt werden, oder man hat eigentlich nur darauf zu achten, ob $\frac{1}{\lambda}$ grösser oder kleiner ist als y_0.

Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden entsprechen als Abscissen beiläufig die Werte 58° und 87°.

Man nimmt zuerst $\varrho = 58^0$ und berechnet y, wobei man mit dreistelligen *) Logarithmen den Anfang macht. Durch mehrere Versuche erhält man leicht 2 Grenzen, zwischen welchen der richtige Wert von ϱ liegt. Durch Anwendung der Regula falsi und durch stufenweisen Uebergang zu fünf- und siebenstelligen Logarithmen erhält man meist sehr schnell den genauen Wert von ϱ. So findet man z. B. hier

mittelst der dreistelligen Tafel $\varrho = 57^0\, 41'$
" " fünf " " $\varrho = 57^0\, 41'\, 41{,}5''$
" " sieben " " $\varrho = 57^0\, 41'\, 41{,}366$

also wird

$$\begin{aligned}\log(-f) &= 2.681\;2412_n\\ \log\sin m\varrho &= 9.889\;1425_n\\ \hline &\,2.570\;3837\\ \log\sin n\varrho &= 9.080\;6477\\ \hline 7\log r &= 3.489\;7360\\ \log r &= 0.498\;5337\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\cos\varrho &= 9.727\;8898\\ \log r &= 0.498\;5337\\ \log\sin\varrho &= 9.926\;9664\\ \hline \log r\cos\varrho &= 0.226\;4235\\ \log r\sin\varrho &= 0.425\;5001\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix}x_4\\ x_5\end{matrix}\right\} = 1.684\;3159 \pm 2.663\;7908i$$

Für das letzte Wurzelpaar findet sich

$$\varrho = 86^0\, 19'\, 13\,342'', \quad \log r = 0{,}299\;1866_n$$

$$\left.\begin{matrix}x_6\\ x_7\end{matrix}\right\} = -\,0.127\;8113 \mp 1.987\;4234i.$$

§ 9.

Als zweites Beispiel soll eine Gleichung von geradem Grade aufgelöst werden.

$$x^4 - 16x - 12 = 0 \quad \text{(Zweite Form)}$$

*) Die eben angeführte 5 stellige Logarithmentafel des Verfassers enthält Seite 85 die Logarithmen der trigonometrischen Functionen auf 3 Decimalen für jeden Grad des Quadranten.

$e = 16 \quad f = 12, \quad m = 1, \quad n = 3; \quad \log\lambda = 8.421\,0638$

$$\log\frac{1}{\lambda} = 1.578\,9362.$$

$$3A + B = 8.421\,0638.$$

Man findet für A der Reihe nach die Werte 9.438; 9.43857 und endlich

$$A = 9.438\,5725$$

und mit diesem Wert

$$x_1 = 2.732\,0508.$$

Die Gleichung hat auch eine negative Wurzel; dafür ist

$$y^4 + 16y - 12 = 0 \quad \text{(Erste Form)}$$

$$A + 3B = 8.421,0638.$$

Man erhält

$$A = 8.389, \quad A = 8.389\,50$$

und endlich

$$A = 8.389\,5035; \quad x_2 = -y = -0.732\,0508.$$

Zur Bestimmung der imaginären Wurzeln ist zunächst folgende Gleichung aufzulösen:

$$-\frac{\sin 4\varrho^4}{\sin\varrho\sin 3\varrho^3} = 37.925\,93.$$

Wir setzen

$$y = \frac{\sin 4\varrho^4}{\sin\varrho\sin 3\varrho^3}$$

und haben

$$y = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 45^0 \quad \text{und} \quad = 90^0$$
$$y = \infty \quad ,, \quad \varrho = 60^0.$$

Wegen des negativen Vorzeichens trägt man hier $\frac{1}{\lambda}$ abwärts auf und sieht, dass der Wert von ϱ zwischen 60^0 und 70^0 liegt.

Wir beginnen die Rechnung mit dem Werte 65^0 und erhalten für ϱ stufenweise die Werte $65^0\,54'$; $65^5\,54'$, $18.2''$ und endlich

$$\varrho = 65^0\,54'\,18.569''$$

$$m\varrho = \varrho, \quad n\varrho = 197^0\,42'\,55.707'', \quad 4\log r = 1.556\,3021.$$

Die Formel

$$r = -\frac{f\sin 4\varrho}{e\sin 3\varrho}$$

sagt uns, dass r negativ ist, daher

$$\log r = 0.389\,0755_n$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = = -0.999\,99954 \mp 2.236\,06598i.$$

§ 10.

Zum Schlusse soll noch die Gleichung

$$z^9 + 345\,z^3 - 12 = 0$$

aufgelöst werden. Hier setzt man $z^3 = x$ und erhält

$$x^3 + 345x - 12 = 0 \quad \text{(Erste Form)}$$

$$e = 345, \quad f = 12, \quad m = 1, \quad n = 2, \quad \log\lambda = 4.544\,9052 - 10$$

$$A + 2B = 4.544\,9052 - 10,$$

daraus

$$A = 4.544\,9022 - 10$$

$$\log x_1 = \frac{\log e + A}{2} = 8.541\,3607\,; \quad x_1 = 0.034\,78249$$

Die Gleichung hat nur diese eine reelle Wurzel. Zur Bestimmung der beiden imaginären Wurzeln dienen die Gleichungen:

$$-\frac{\sin 3\varrho^3}{\sin\varrho \sin 2\varrho^2} = 285\,164.1\,; \quad r^3 = -\frac{f\sin\varrho}{\sin 2\varrho}; \quad x = r(\cos\varrho \pm i\sin\varrho)$$

Wir setzen wieder

$$y = \frac{\sin 3\varrho^3}{\sin\varrho\sin 2\varrho^2}; \quad y_0 = \frac{3^3}{2^2} = \frac{27}{4} = 6.75$$

Für $\varrho = 60^0$ wird $y = 0$ und für $\varrho = 90^0$ wird $y = \infty$.

Da $y = -\frac{1}{\lambda}$, so ist $\frac{1}{\lambda}$ abwärts aufzutragen.

Wegen des sehr grossen Wertes von $\frac{1}{\lambda}$ kann ϱ nur wenig kleiner sein als 90^0; in der Tat findet sich

$$\varrho = 89^0\,56'\,46.871''.$$

Damit erhält man

$$\log r = 1.268\,9096_n.$$

Die imaginären Wurzeln sind

$$-0.017\,3913 \mp 19.360\,1786i.$$

Nun sind noch die Gleichungen

$$z^3 = x_1 \quad \text{und} \quad z^3 = r(\cos\varrho \pm i\sin\varrho)$$

aufzulösen.

Schreibt man

$$z = \sqrt[3]{x_1}\,.\,\sqrt[3]{1},$$

so ist bekanntlich:

$$z = \left[\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right]\sqrt[3]{x_1}$$

Man setzt der Reihe nach $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ und findet

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{x_1} \\ z_2 &= (\cos 120^0 + i\sin 120^0)z_1 = -(\cos 60^0 - i\sin 60^0)z_1 \\ z_3 &= (\cos 240^0 + i\sin 240^0)z_1 = -(\cos 60^0 + i\sin 60^0)z_1 \end{aligned}$$

$$z_1 = 0.326\,4276 \qquad \left.\begin{matrix} z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = -0.163\,2138 \pm 0.2826\,946i$$

Die andere Gleichung für z^3 gibt zunächst:

$$z = (\cos\tfrac{1}{3}\varrho \pm i\sin\tfrac{1}{3}\varrho)\sqrt[3]{r}.$$

Hier sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob r positiv oder negativ ist.

I. r sei positiv.

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{r}\,.\,\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)(\cos\tfrac{1}{3}\varrho \pm i\sin\tfrac{1}{3}\varrho) \\ &= \left[\cos\frac{2k\pi \pm \varrho}{3} + i\sin\frac{2k\pi \pm \varrho}{3}\right]\sqrt[3]{r} \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck braucht man nur das eine Vorzeichen vor dem ϱ beizubehalten, da, wenn eine Gleichung die Wurzel $a + bi$ hat, ihr auch noch die andere $a - bi$ zukommt.

Hiernach kann der Wert für z in folgender Weise geschrieben werden:

$$z = \left[\cos\frac{2k\pi + \varrho}{3} \pm i\sin\frac{2k\pi + \varrho}{3}\right]\sqrt[3]{r}$$

Setst man auch hier $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, so erhält man die 6 übrigen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

II. r sei negativ; dann ist $(-r)$ eine positive Grösse

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{-r}\,.\,\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{-r}\left[\cos\frac{2k+1}{3}\pi + i\sin\frac{2k+1}{3}\right]$$

$$z = \sqrt[3]{-r}\left[\cos\frac{2k+1}{3}\pi + i\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right][\cos\tfrac{1}{3}\varrho \pm i\sin\tfrac{1}{3}\varrho]$$

$$z=\left[\cos\frac{(2k+1)\pi\pm\varrho}{3}+i\sin\frac{(2k+1)\pi\pm\varrho}{3}\right]\sqrt[3]{-r},$$

oder

$$z=\left[\cos\frac{2k+1)\pi+\varrho)}{3}\pm i\sin\frac{(2k+1)\pi+\varrho}{3}\right]\sqrt[3]{-r}.$$

In dem Beispiel dieses Paragraphen ist r negativ, daher

$$\left.\begin{matrix}z_4\\z_5\end{matrix}\right\}=[\cos(60^0+\tfrac{1}{3}\varrho)\pm i\sin(60^0+\tfrac{1}{3}\varrho)]\sqrt[3]{-r}$$

$$\left.\begin{matrix}z_6\\z_7\end{matrix}\right\}=[\cos(180^0+\tfrac{1}{3}\varrho)\pm i\sin(180^0+\tfrac{1}{3}\varrho)]\sqrt[3]{-r}$$

$$=-[\cos\tfrac{1}{3}\varrho\pm i\sin\tfrac{1}{3}\varrho]\sqrt[3]{-r}$$

$$\left.\begin{matrix}z_8\\z_9\end{matrix}\right\}=[\cos(300^0+\tfrac{1}{3}\varrho)\pm i\sin(300^0+\tfrac{1}{3}\varrho)]\sqrt[3]{-r}$$

$$=[\cos(60^0-\tfrac{1}{3}\varrho)\mp i\sin 60^0-\tfrac{1}{3}\varrho)]\sqrt[3]{-r}$$

Werden die Zahlenwerte in diese Ausdrücke eingesetzt, nämlich $\tfrac{1}{3}\varrho = 29^0\,58'\,55.624''$, $60^0+\tfrac{1}{3}\varrho = 89^0\,58'\,55{\cdot}624''$; $60^0-\tfrac{1}{3}\varrho = 30^0\,1'\,4.376''$ und $\log\sqrt[3]{-r}=0{,}422\,9699$, so finden sich die übrigen 6 Wurzeln der Gleichung $z^9+3452^3-12=0$ wie folgt:

$$\left.\begin{matrix}z_4\\z_5\end{matrix}\right\}=\quad 0.000\,8265\pm 2.648\,3165i$$

$$\left.\begin{matrix}z_6\\z_7\end{matrix}\right\}=-2.293\,9222\mp 1.323\,4424i$$

$$\left.\begin{matrix}z_8\\z_9\end{matrix}\right\}=\quad 2.293\,0963\mp 1.324\,8741i.$$

XVIII.

Miscellen.

1.

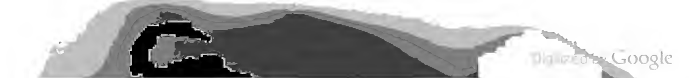
Eine Verallgemeinerung der Sätze von Pascal und Brianchon und das Problem von Castillon.

Wir können den Satz von Pascal auf folgende Art aussprechen. Schneiden sich in einem, einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseck die erste und vierte und zweite und fünfte Seite in festen Punkten, so liegt der Schnittpunkt der 3. und 6. Seite auf einer festen geraden Linie, der Verbindungslinie der beiden festen Punkte. Dieser Satz nun lässt folgende Verallgemeinerung zu.

Schneiden sich in einem, einem Kegelschnitt einbeschriebenen $2n$ eck $n-1$ Paare von Gegenseiten in festen Punkten, so liegt der Schnittpunkt des $n$ten Paares von Gegenseiten auf einer festen geraden Linie.

Unter Gegenseite verstehen wir zwei Seiten, welche in ihrer Reihenfolge um die Zah n verschieden sind, also z. B. die 1. und $n+1$. Seite.

Wir wollen nun diesen Satz für einen speciellen Fall, nämlich für $n=4$ beweisen, und wir werden sehen, dass der Beweis für den allgemeinen Fall vollständig gleich bleiben wird. Sind M, N, O drei feste Punkte, und wir legen durch diese Punkte beliebige dem Kegelschnitt einbeschriebenen Achtecke derart, dass die 1. und 5. Seite durch M, die 2. und 6. durch N und die 3. und 7. durch O gehen, so erhalten wir auf dem Kegelschnitt 8 proj. Punktreihen A, B, C, D, E, F, G und H.



Wir können hiebei die Punkte A und E beliebig wählen, wollen aber zunächst annehmen, dass Punkt E, und somit auch die Punkte F, G, H fest seien. Wir erhalten nun als Ort des Punktes P den Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen der Büschel H, A ... und E, D ... In diesen beiden Büscheln entspricht aber wie wir sofort finden der Strahl HE sich selbst, d. h. die beiden Büschel sind perspectivisch, d. h. der Ort von P ist eine gerade Linie xy. Um zu zeigen, dass nun die Linie xy wirklich eine feste gerade Linie ist die von der Lage der Punkte E, F, G, H unabhängig ist, lassen wir den Punkt A mit einem der Schnittpunkte x oder y der geraden Linie mit dem Kegelschnitt zusammenfallen. Fällt A etwa nach x, so finden wir, dass ED durch A, also durch x gehen muss, d. h. die Punkte x und y sind zwei Ecken der durch die Punkte M, N und O bestimmten Dreiecke des Castillon'schen Problems, also von den festen Punkten des Achtecks unabhängig.

Aus dem ganzen Gang des Beweises geht aber offen hervor, dass der Satz für jedes beliebige einem Kegelschnitt einbeschriebene $2n$-eck giltig ist, und dass irgend zwei Lagen der $2n$ ecke zwei Punkte P liefern, und dass die Verbindungslinie dieser Punkte zwei Eckpunkte des Castillon'schen Vielecks durch die $n-1$ Punkte liefert.

Dehnen wir diese Sätze auf die Sätze von Brianchon aus, so finden wir ganz analog eine Construction des entsprechenden Tangenten $n$ecks eines Kegelschnitts. Der Satz, der sich in diesem Falle ergibt, lautet, wenn wir mit Hauptdiagonalen die Verbindungslinien der 1. und $n+1$ten, 2. und $n+2$ten u. s. w. Ecke des $2n$seits verstehen.

Sind in einem Tangenten $2n$seit eines Kegelschnitts $n-1$ Haupttangenten fest, so geht die $n$te durch einen festen Punkt.

Weingarten, (Württ.) im Oct. 1883.

B. Sporer.

2.

Ueber die Lage des Schwerpunkts im Viereck.

Der Beweis des im 65ten Bande pag. 445 von mir aufgestellten Satzes über die Lage des Schwerpunkts im Viereck hat die Entwickelungen des Herrn Nöggerath in demselben Bande pag. 218 zur Grundlage; im 2ten Hefte des 13ten Jahrgangs von Hoffmann's Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht habe ich einen elementaren synthetischen Beweis desselben Satzes gegeben; andere elementare

Beweise von Anderen finden sich eben dort. Im Folgenden soll der Satz analytisch mit Anwendung trimetrischer Liniencoordinaten, die zu diesem Zwecke ganz besonders geeignet sind, entwickelt werden.

Wenn $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ die Gleichungen der vier Eckpunkte eines gewöhnlichen ebenen Vierecks sind, so lassen sich bekanntlich immer vier Grössen α_1, α_2, α_3, α_4 so bestimmen, dass die Identitäten

$$1) \quad \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 + \alpha_4\xi_4 \equiv 0 \quad \text{und}$$

$$2) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0 \quad \text{bestehen.}$$

Die Gleichung des Schnittpunkts der Diagonalen findet man, indem man $\lambda\xi_1 + \lambda_1\xi_3 \equiv \mu\xi_2 + \mu_1\xi_4 = 0$ oder $\lambda\xi_1 - \mu\xi_2 + \lambda_1\xi_3 - \mu_1\xi_4 = 0$ setzt, was mit 1) verglichen giebt: $\lambda = \alpha_1$, $\mu = -\alpha_2$, $\lambda_1 = \alpha_3$, $\mu_1 = -\alpha_4$; daher ist die gesuchte Gleichung:

$$3) \quad \alpha_1\xi_1 + \alpha_3\xi_3 \equiv -(\alpha_2\xi_2 + \alpha_4\xi_4) = 0.$$

Ferner ist die Gleichung des Mittelpunkts von 12: $\xi_1 + \xi_2 = 0$, die des Mittelpunkts von 34: $\xi_3 + \xi_4 = 0$; ein Punkt, der auf der Verbindungslinie beider liegt, hat zur Gleichung:

$$\lambda(\xi_1 + \xi_2) + \lambda_1(\xi_3 + \xi_4) = 0.$$

Ebenso hat ein Punkt, der auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte von 23 und 41 liegt, die Gleichung:

$$\mu(\xi_2 + \xi_3) + \mu_1(\xi_4 + \xi_1) = 0.$$

Sollen beide Punkte identisch sei, so muss

$$(\lambda - \mu_1)\xi_1 + (\lambda - \mu)\xi_2 + (\lambda_1 - \mu)\xi_3 + (\lambda_1 - \mu_1)\xi_4 = 0$$

sein, was geschieht, wenn man $\lambda = \lambda_1 = \mu = \mu_1$ annimmt. Die Gleichung des Punktes, in welchem sich die Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten schneiden, ist demnach:

$$4) \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

Die Gleichungen der Schwerpunkte der Dreiecke 123 und 341 sind bezüglich:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 + \xi_4 + \xi_1 = 0,$$

ebenso die Dreiecke 412 und 234 bezüglich:

$$\xi_4 + \xi_1 + \xi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

Die Verbindungslinie der zwei ersten Punkte schneidet die Verbindungslinie der zwei letzten Punkte im Schwerpunkte des Vierecks; daher hat die Gleichung des letzteren die Formen:

$$\lambda(\xi_1+\xi_2+\xi_3)+\lambda_1(\xi_3+\xi_4+\xi_1)\equiv\mu(\xi_4+\xi_1+\xi_2)+\mu_1(\xi_2+\xi_3+\xi_4)=0$$

woraus

$$(\lambda-\lambda_1-\mu)\xi_1+(\lambda-\mu-\mu_1)\xi_2+(\lambda+\lambda_1-\mu_1)\xi_3+(\lambda_1-\mu-\mu_1)\xi_4\equiv 0$$

folgt. Dies mit 1) verglichen, ergiebt die Bedingungsgleichungen:

$$\lambda-\lambda_1-\mu=\alpha_1,\quad \lambda-\mu-\mu_1=\alpha_2,\quad \lambda+\lambda_1-\mu_1=\alpha_3,$$
$$\lambda_1-\mu-\mu_1=\alpha_4,$$

deren Addition mit Benutzung von 2) die Hülfsgleichung

$$\lambda+\lambda_1-\mu-\mu_1=0$$

liefert. In Folge dessen geben die Bedingungsgleichungen nach der Reihe:

$$\mu_1=\alpha_1,\quad \lambda_1=-\alpha_2,\quad \mu=\alpha_3,\quad \lambda=-\alpha_4,$$

und die Gleichung des Schwerpunkts ist demnach:

5) $\alpha_1(\xi_2+\xi_3+\xi_4)+\alpha_3(\xi_4+\xi_1+\xi_2)\equiv-\{\alpha_2(\xi_3+\xi_4+\xi_1)+\alpha_4(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\}=0$

oder in anderer Form:

$$(\alpha_1+\alpha_3)(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)-(\alpha_1\xi_1+\alpha_3\xi_3)$$
$$\equiv-\{(\alpha_2+\alpha_4)(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)-(\alpha_2\xi_2+\alpha_4\xi_4)\}=0$$

woraus sofort folgt, dass **der Schnittpunkt der Diagonalen** D, **der Schnittpunkt** M **der die Gegenseiten halbirenden Geraden und der Schwerpunkt** S **in gerader Linie liegen.** Weil aber identisch

$$3\,.\,\frac{(\alpha_1+\alpha_3)(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)-(\alpha_1\xi_1+\alpha_3\xi_3)}{3(\alpha_1+\alpha_3)}\equiv 4\,.\,\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}{4}$$
$$-\frac{\alpha_1\xi_1+\alpha_3\xi_3}{\alpha_1+\alpha_3}$$

ist, so muss $SD:SM=4:1$ oder $SM:MD=1:3$ sein.

Bensheim, 11. Juli 1884.

Dr. Stoll, Gymnasiallehrer.

XIX.

Elliptische Integralfunctionen und ihre geometrische, analytische und dynamische Bedeutung.

Von

Emil Oekinghaus.

Aus der Untersuchung über die Eigenschaften der analytischen Functionen der Resultanten zwischen den biquadratischen Gleichungen und ihrer Differentialquotienten sind die vorliegenden Entwickelungen hervorgegangen. Die genauere Durchsicht dieser Functionen führte auf eine Gruppe von Gleichungen, aus welchen sich die Euler'schen Identitäten und damit in Folge einer Transformation eine Reihe von Differentialformeln und Integralgleichungen ergaben, deren Anwendung auf Geometrie fast ausnahmslos auf elliptische Integrale und Functionen führte. Aus diesem Grunde haben wir die auftretenden Formen elliptische Integralfunctionen genannt. Indem wir dieselben auf den Kreis, die Lemniskate und Ellipse anwandten, resultirte eine Menge interessanter Sätze über Rectificationsverhältnisse, harmonische und andere geometrische Beziehungen dieser Curven, welche noch in Folge einer dynamischen Einkleidung eine bemerkenswerte mechanische Bedeutung so z. B. in der Theorie der elastischen Curve von J. Bernoulli, in der Pendelbewegung etc. gewannen. Ueberhaupt liessen sich diejenigen mechanischen Probleme, deren Lösung von der Integration einer elliptischen Differentialgleichung abhängt, zwangslos in den Bereich dieser Functionen ziehen. Aus diesem Gesichtspunkte haben wir ebenfalls bestimmte Curven 3. und 4. Grades betrachtet und ausser ihren harmonischen Eigenschaften besonders ihren geo-

metrisch dynamischen Zusammenhang mit dem Problem der Bewegung eines schweren Punktes in Kugel und Kreis nachgewiesen.

In allgemeinster an die Eigenschaften der Kegelschnitte sich anschliessender Betrachtung sind ferner rein analytische, von geometrischen Rücksichten freie Integralfunctionen der 1., 2. und 3. Art aufgestellt worden, welche für biquadratische und kubische Gleichungen sofort diejenigen Functionen zur Verfügung stellen, deren man zum Zwecke einer Untersuchung einer der oben genannten Curven bedarf. Da drei von einander unabhängige Functionen dieser Art entwickelt werden konnten, so war die Folge ihrer Anwendung eine nicht geringe Erweiterung der Eigenschaften namentlich der Lemniskate, des Kreises und der Kegelschnitte, welch' letztere in ihren mannigfachen Beziehungen zu den 3 Fällen der Bewegung eines Punktes im vertikalen Kreis sowie auch für die Centralbewegung eine erhöhte Bedeutung gewannen.

Auch bezüglich der Additionstheoreme für 2 und 3 elliptische Integrale wird man manches Neue finden, wie auch zum Schluss der Abhandlung ein Versuch, die eingeführten Functionen zur Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades zu benutzen wenigstens ein theoretisches Interesse beanspruchen dürfte.

Erster Teil.

§ 1.

Analytische Entwickelungen.

Die aus der Verbindung der biquadratischen Gleichung und ihres Differentialquotienten hervorgehenden analytischen Gleichungen und Integrale werden die Basis bilden für die nachstehenden Entwickelungen, für welche demnach die Curve

1) $$\varDelta = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$$

und deren derivirte

2) $$\frac{\partial \varDelta}{\partial x} = \operatorname{tg} \tau = 4x^3 - 3ax^2 + 2bx - c = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)$$

nebst andern verwandten Formen zu Grunde gelegt werden sollen.

Wird aus beiden Gleichungen x eliminirt, so ist die Resultante

$$3)\quad \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^4 - (a^3 - 4ab + 8c)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^3$$
$$+ (4b^3 - 14abc + 18c^2 + 6a^2d - 16bd - ab^2 + 3a^3c)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^2$$
$$+ \frac{4}{27}(b^2 - 3ac + 12d)^3 - \frac{1}{27}(72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3)^2 = 0,$$

oder abgekürzt

$$4)\quad \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^4 - A\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^3 + B\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^2 + D = 0.$$

worin das Absolutglied die Discriminante der biquadratischen Gleichung ist.

Eliminiren wir ferner aus 1) und

$$\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x} = 4x^2 - 3ax + 2b - \frac{c}{x}$$

die Unbekannte x, so erhält man

$$5)\quad \left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^4 - \frac{a^2d - c^2}{d}\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^3$$
$$+ \frac{3a^2bd - 8acd - 8b^2d + 32d^2 - a^2c^2 + 3bc^2}{d}\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^2 + \frac{D}{d} = 0,$$

oder abgekürzt

$$6)\quad \left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^4 - A_1\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^3 + B_1\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x}\right)^2 + D_1 = 0.$$

Auf diesem Wege fortfahrend findet man

$$\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^2}\right)^4 - A_2\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^2}\right)^3 + B_2\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^2}\right)^2 + D_2 = 0,$$

$$\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^3}\right)^4 - A_3\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^3}\right)^3 + B_3\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^3}\right)^2 - D_3\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right) + D_3 = 0,$$

$$7)\quad \left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right)^4 - A_4\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right)^3 + B_4\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right)^2 - D_4 a\left(\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}{x^4}\right) + D_4 = 0,$$

$$7)\quad \left(x\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^4 - A'\left(x\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^3 + B'\left(x\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2 + \frac{D'}{d}\left(x\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + D' = 0,$$

$$\left(x^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^4 - A''\left(x^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^3 + B''\left(x^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2 + \frac{c}{d^2}D''\left(x^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + D'' = 0.$$

Die gegebene Darstellung hat uns also auf die Euler'schen Identitäten geführt, denn es resultiren aus 3)—7) die 5 Formen

$$\text{a)}\quad \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 0,$$

$$\text{b)}\quad \frac{x_1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 0,$$

$$\text{c)}\quad \frac{x_1^2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2^2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3^2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4^2}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 0,$$

$$8)\quad \text{d)}\quad \frac{x_1^3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2^3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3^3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4^3}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = 1,$$

$$\text{e)}\quad \frac{x_1^4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{x_2^4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{x_3^4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{x_4^4}{\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = a,$$

welchen sich noch die folgenden

$$\text{f)}\quad \frac{1}{x_1\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{x_2\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{x_3\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{x_4\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = -\frac{1}{d}.$$

$$\text{g)}\quad \frac{1}{x_1^2\frac{\partial\Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{x_2^2\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{x_3^2\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{x_4^2\frac{\partial\Delta}{\partial x_4}} = -\frac{c}{d^2}$$

anschliessen.

Diese Formeln sind allgemein gültig für Gleichungen $n$ten Grades. Indem wir uns hier auf den 4. und 3. Grad beschränken, wollen wir zeigen, dass die daraus abgeleiteten Integrale für die Geometrie von Bedeutung sind.

Liegt nämlich eine geometrisch-analytische Gleichung 4. Grades vor, worin ausser der Variabeln x noch andere Veränderliche y etc. enthalten sind, so gibt die Differentiation der Gleichung

$$\Delta(x, y) = 0$$

9)
$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Delta}{\partial y} \cdot dy = 0.$$

Nun folgt aber aus 8) a) nach Multiplication und Division der Summanden mit den entsprechenden dx

10)
$$\Sigma \frac{dx}{\frac{\partial \Delta}{dx} dx} = 0,$$

welche Gleichung vermöge 9) in die Differentialformel

11)
$$\Sigma \frac{dx}{\frac{\partial \Delta}{\partial y}} = 0$$

übergeht.

Vermittelst $\Delta(xy) = 0$ kann man in 11) das darin vorkommende y fortschaffen, sofern der 2. Grad dieser Grösse nicht überschritten ist und als Resultat erhält man durch Integration dieser Differentialfunctionen folgende Formel

12)
$$\int \frac{dx_1}{f(x_1)} + \int \frac{dx_2}{f(x_2)} + \int \frac{dx_3}{f(x_3)} + \int \frac{dx_4}{f(x_4)} = \text{Const.}$$

Um nun für gegebene Fälle die Function $f(x)$ gleich niederschreiben zu können, wählen wir zwei häufig auftretende Gleichungen von $\Delta(x, y)$ deren einer wir die folgende typische Form geben:

13)
$$X_1 y^2 + 2 X_2 y + X_3 = 0,$$

worin die X bekannte Functionen von x sind.

Nach 11) ist also

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \frac{dx}{X_1 y + X_2} = C.$$

Aus der quadratischen Gleichung 13) folgt aber

$$X_1 y + X_2 = \sqrt{X_2^2 - X_1 X_3},$$

demnach gewinnen wir folgende Integralfuncton

14)
$$\int \frac{dx_1}{2\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} + \int \frac{dx_2}{2\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} + \int \frac{dx_3}{2\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} + \int \frac{dx_4}{2\sqrt{X_2^2 - X_1 X_3}} = \text{Const.}$$

Eine andere Form von $\Delta(xy) = 0$ ist:

15) $$X_1 \sin\varphi + X_2 \cos\varphi + X_3 = 0,$$

das Integral 11) geht hierfür über in

$$\Sigma \int \frac{dx}{X_1 \cos\varphi - X_2 \sin\varphi} = C.$$

Nach Elimination von φ vermittelst 15) resultirt

16) $$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} + \int \frac{dx_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} + \int \frac{dx_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} + \int \frac{dx_4}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2}} = \text{Const.}$$

Ueber die Vorzeichen werden wir später das Notwendige festsetzen.

Von allgemeiner Bedeutung werden diese Integrale dadurch, dass man nach 8) unter dem Integralzeichen noch mit x und x^2 multipliciren darf, für die andern Potenzen x^3, x^4, x^{-1}, x^{-2}, bestehen für die Constanten leicht zu bestimmende Modificationen, welche von den Parametern der Gleichungen abhängen.

Wir führen sämmtliche Integralfunctionen hier auf:

17)
$$\begin{aligned}
&a)\quad \Sigma \int \frac{dx}{f(x)} = C, \\
&b)\quad \Sigma \int \frac{x\,dx}{f(x)} = C, \\
&c)\quad \Sigma \int \frac{x^2 dx}{f(x)} = C, \\
&d)\quad \Sigma \int \frac{x^3 dx}{f(x)} = y, \\
&e)\quad \Sigma \int \frac{x^4 dx}{f(x)} = \int a\,dy, \\
&f)\quad \Sigma \int \frac{dx}{x f(x)} = -\int \frac{dy}{d}, \\
&g)\quad \Sigma \int \frac{dx}{x^2 f(x)} = -\int \frac{c\,dy}{d^2},
\end{aligned}$$

wonach man über 7 Integralfunctionen verfügen kann.

In den Anwendungen wird sich zeigen, dass die meisten Integrale dieser Art auf elliptische zurückzuführen sind. In Folge der hohen Bedeutung der letzteren werden deshalb die folgenden Entwickelungen einiges Interesse beanspruchen dürfen.

§ 2.

Die Integralfunction des Kreises.

In den folgenden §§ wenden wir die vorigen Entwickelungen an auf den Kreis, die Lemniskate und die Ellipse, um alsdann die Resultate zu verallgemeinern. Wir verbinden zugleich damit eine dynamische Betrachtung und Erklärung, sofern die vorkommenden Functionen einer solchen fähig sind.

Ein Kreis vom Radius s sei gegeben (Fig. 1.), auf dem Durchmesser oder der Verlängerung desselben gehe durch einen Punkt D eine Secante, welche mit der ersten DE den Winkel φ einschliesst und durch den Kreis in 2 Punkten geschnitten wird, deren Strecken von D aus gleich $x_1 x_2$ sind. Der feste Punkt D habe vom Centrum die Enfernung R. Danach besteht die Gleichung

18) $$x^2 - 2R\cos\varphi . x + R^2 - s^2 = 0,$$

welche der Form 15) entspricht. Die Differentialgleichung ist also

19) $$\frac{dx_1}{\sqrt{4R^2x_1^2 - (x_1^2 + R^2 - s^2)^2}} + \frac{dx_2}{\sqrt{4R^2x_2^2 - (x_2^2 + R^2 - s^2)^2}} = 0,$$

woraus nach einer Transformation und Integration die Function

20) $$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - (R-s)^2)((R+s)^2 - x^2)}} = \text{Const.}$$

folgt.

Um sie auf die Normalform des elliptischen Integrals der 1. Art zu bringen, sind folgende Relationen einzuführen:

21) $$x = \frac{R-s}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{\vartheta}{2}^2}}, \qquad Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2},$$

und es resultirt

22) $$\int_0^{\frac{\vartheta}{2}} \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta_1^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1 - Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2^2}} = K,$$

worin K das vollständige elliptische Integral der 1. Art bedeutet. Dass die Constante $= K$ sei, geht aus der leicht zu beweisenden Relation

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_2 = \frac{R+s}{R-s} = \frac{1}{Z'}$$

hervor.

Verbindet man den Punkt E mit den Schnittpunkten der Secante durch Gerade, so sind die Winkel zwischen diesen und der Secante bezüglich $\frac{1}{2}\vartheta_1$, $\frac{1}{2}\vartheta_2$, also Peripheriewinkel zweier entsprechenden Centriwinkel $\vartheta_1 \vartheta_2$ als Wurzeln von

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 - \frac{2s\cot\varphi}{R-s}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta + \frac{R+s}{R-s} = 0.$$

Die obige Integralfunction steht mit dem kinetischen Problem der Pendelbewegung oder allgemeiner mit der Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreise in eigentümlicher Verbindung:

Die theoretische Mechanik zeigt bekanntlich, dass die Lösung dieser Aufgabe auf die Differentialgleichung

23) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{s}\sin\vartheta = 0$$

führt, woraus das Integral

24) $$t = \int_\vartheta^\alpha \frac{s\,d\vartheta}{\sqrt{v_0^2 + 4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2 - 4gs\sin\vartheta^2}}$$

folgt. Hierin bedeutet t die Zeit, welche verfliesst, bis der anfängliche Winkel α in ϑ übergegangen ist. Von den 3 Fällen der Bewegung trifft hier derjenige ein, für welchen im letzten Integral

25) $$Z^2 = \frac{4gs}{v_0^2 + 4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2}$$

kleiner als 1 ist. Der Punkt beschreibt also volle Umläufe. Soll nun das obige Kreisintegral 22) mit der Kreisbewegung übereinstimmend sein, so muss nach 21) und 25)

26) $$\frac{4Rs}{(R+s)^2} = \frac{4gs}{v_0^2 + 4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2}$$

gesetzt werden.

Führen wir anstatt v_0 die Geschwindigkeitshöhe h ein, wonach $v_0^2 = 2gh$ ist, so resultirt aus der letzten Formel

$$R^2 + s^2 + 2R\cos\alpha = 2Rh.$$

Bezeichnet man die Strecke vom festen Punkt D nach dem Anfangspunkt der Bewegung mit ϱ_0, und nennt sie Harmonikale, so ist

27) $$\varrho_0^2 = 2Rh \quad \text{oder} \quad \varrho_0^2 = \frac{R}{g} v_0^2,$$

d. i.

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}\, \varrho_0.$$

Diese Formel gilt allgemein.

Aus

$$v = -s\frac{d\vartheta}{dt}$$

folgt nämlich nach 24) und 26)

28) $$v^2 = 4gs\left(\frac{(R+s)^2}{4Rs} - \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2\right),$$

und hieraus erhält man die Beziehung

29) $$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\, \varrho.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes in der Bahn ist direct proportional der Harmonikalen der Bewegung.

Bedeutet nun $2T$ die Zeit des vollen Umlaufs, so ist demnach nach 22)

30) $$t_1 + t_2 = T$$

Man bemerke aber, dass die aus 29) folgende Formel

$$h = \frac{(R+s)^2}{2R}$$

auf die quadratische Gleichung

$$R^2 - 2R(h-s) + s^2 = 0$$

führt, deren Wurzeln

31) $$R = h - s \pm \sqrt{(h-s)^2 - s^2}$$

sind. Hierin ist

$$\sqrt{(h-s)^2 - s^2}$$

die Tangente von D an den Kreis, woraus eine einfache Construction für die beiden Strecken R_1 und R_2 folgt. Die hierdurch bestimmten Punkte D und D' sind in Bezug auf den Kreis harmonisch zugeordnete Punkte, und die Mitte ihrer Verbindungsgeraden ist von dem

tiefsten Punkte E des Kreises um die Geschwindigkeitshöhe entfernt. Zieht man von dem äussern Punkt D zwei Secanten an den Kreis, so schliessen dieselben 2 Kreisbogen ein, welche von dem den Kreis durchlaufenden Punkte in gleichen Zeiten zurückgelegt werden. Zieht man durch den innern Punkt eine Gerade, so werden die hierdurch bestimmten Kreisbogen ebenfalls in gleichen Zeiten beschrieben, welche der halben Umlaufszeit gleichkommen.

Zwei durch den genannten Punkt gehende Gerade begrenzen also 2 Bogen gleicher Zeitdauer. Beide Fälle sind übrigens identisch; wie auch die Geschwindigkeit durch die Constanz des Verhältnisses beider Harmonikalen $\varrho : \varrho'$ nach bekannten Sätzen durch

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\,\varrho = \sqrt{\frac{g}{R'}}\,\varrho'$$

ausgedrückt wird.

Je grösser die Geschwindigkeit des im Kreise herumfliegenden Punktes ist, um so mehr entfernt sich der äussere Punkt vom Centrum, während der entsprechende harmonische innere Punkt sich demselben nähert und ihn für unendliche Geschwindigkeit erreicht. Bei abnehmender Geschwindigkeit nähern sich diese zugeordneten Punkte der Peripherie und fallen in der Grenzlage für die Geschwindigkeitshöhe $h = 2s$ der asymptotischen Bewegung zusammen.

Wir werden später eine Verallgemeinerung der vorstehenden Sätze geben, in welcher wir die Geraden durch Kegelschnitte ersetzen. Wir fügen noch folgende Betrachtung bei:

Eine Secante schneide den Kreis in 2 imaginären Punkten, (Fig. 2), die aus 18) folgenden Wurzeln sind dann

$$z = R\cos\varphi \pm \sqrt{R^2\cos\varphi^2 - R^2 + s^2},$$

oder

$$z = x \pm iy,$$

indem wir setzen

$$x = R\cos\varphi$$

und

$$y = \sqrt{R^2\sin\varphi^2 - s^2}$$

Die Construction dieser Ausdrücke ist der vorigen analog. Die durch $\pm y$ bestimmten Punkte DD' sind zugeordnete harmonische Punkte für den Kreis. Der obige complexe Wurzelwert erhält durch die gegebene Darstellung eine allgemeine geometrische Erklärung, die vielleicht neu ist.

§ 3.

Die Integralfunctionen der Lemniskate.

Durch einen Brennpunkt einer Lemniskate, deren Polargleichung

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ist, legen wir eine Gerade und verbinden die 4 Schnittpunkte der Curve durch die Brennstrahlen $x_1 x_2$ etc. mit dem andern Brennpunkt. (Fig. 3.)

Der Winkel zwischen der Geraden und der X-Achse sei ψ, dann besteht folgende Gleichung

32) $$x^4 - 4c^2x^2 + 4c^3 \cos\psi \,.\, x - c^4 = 0.$$

Der Radiusvector r nach einem Schnittpunkt schliesse mit x den Winkel γ ein, der Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen xy heisse v, folgende Formeln sind dann leicht nachzuweisen

$$r = a \cos \tfrac{1}{2}v, \quad \cos 2\varphi = \cos \tfrac{1}{2}v^2, \quad \sin \tfrac{1}{2}v = \sqrt{2} \sin\varphi,$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}v + \varphi,$$

33) $$\sin \tfrac{1}{2}v = \sin(\gamma - \varphi) = \sqrt{2} \sin\varphi,$$

$$\frac{x}{c} = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}.$$

Man kann also φ durch γ und demnach auch $x = \frac{c^2}{y}$ durch γ ausdrücken, und es findet sich

34) $$y^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos\gamma,$$

ferner

$$\sin(\gamma - \tfrac{1}{2}v) = \sin\varphi,$$

oder

$$\sin(\gamma - \tfrac{1}{2}v) = \frac{c}{a} \sin \tfrac{1}{2}v.$$

Wir wenden nun auf 16) die Formel 32) an und finden zunächst das Differential

35)

$$\frac{dx}{\sqrt{16c^2x^6 - (x^4 + 4c^2x^2 - c^4)^2}} \text{ d. i. } \frac{dx}{(x^2 - c^2)\sqrt{-x^4 + 2(a^2 + c^2)x^2 - c^4}}$$

oder transformirt und integrirt

36) $$\Sigma \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - x^2)}} = C.$$

Die Bildung der Normalform verlangt die Substitutionen

37) $$x = \frac{a-c}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2}}, \qquad Z^2 = \frac{4ac}{(a+c)^2}.$$

Demnach ist

38) $$\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{(a+c)^2-y^2}{4ac}, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{x^2-(a-c)^2}{4ac}$$

Hieraus erhält man durch Subtraction und eine Umformung

39) $$y_2 = a^2+c^2+2ac\cos\gamma,$$

und diese stimmt mit 34) überein.

Die Integralfunction ist demnach

40) $$\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_3^2}}$$
$$+\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_4^2}} = C,$$

welche wir noch vermittelst der Landon'schen Substitution transformiren.

Wir führen deshalb ein

41) $$p = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\sin(\gamma-\tfrac{1}{2}v) = \frac{c}{a}\sin\tfrac{1}{2}v,$$

und das Resultat ist

42) $$\frac{2c}{1+\frac{c}{a}}\int\frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{1-\frac{4ac}{(a+c)^2}\sin\frac{1}{2}\gamma^2}} = c\int\frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v^2}}$$
$$= a\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}.$$

Da aber die Rectification der Lemniskate auf letztere Integrale führt, so erhält man aus der folgenden Integralfunction

43) $$\int\frac{d\frac{1}{2}v_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_1^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}v_2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_2^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}v_3}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_3^2}}$$
$$+\int\frac{d\frac{1}{2}v_4}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_4^2}} = 2K$$

den Satz:



Jede durch einen Brennpunkt einer Lemniskate gehende Gerade schneidet auf derselben 4 von den entsprechenden beiden Scheitelpunkten an gerechnete Bogen u_1, u_2 und u_3, u_4 ab, deren Summe $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2K$ constant der halben Lemniskate gleich ist.

Entwickelt man die Gleichung der durch einen Brennpunkt gehenden Geraden in Bezug auf $\operatorname{tg} \frac{1}{2}v$ so findet sich die Amplitudengleichung

44) $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v^4 - 2\cot\psi \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v^3 + (1 + \cot\psi^2) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v^2 - 2\cot\psi \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v - 1 = 0.$$

Nach der Formel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = \frac{a - c}{1 - b + d}$$

ist, wenn $\frac{1}{2}v$ in absolutem Sinn genommen wird

$$\tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2 + \tfrac{1}{2}v_3 - \tfrac{1}{2}v_4 = 180^0,$$

und also auch

45) $$\operatorname{am} u_1 + \operatorname{am} u_2 + \operatorname{am} u_3 - \operatorname{am} u_4 = \pi.$$

Die elliptischen Functionen aber leiten für $\operatorname{am} u$ folgende periodische Reihe ab

$$\operatorname{am} u = \frac{\pi u}{2K} + 2\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K}\ \ldots\right).$$

Schreiben wir hierin für u der Reihe nach u_1 u_2 etc. und addiren diese Reihen, wobei wir für die Summe zweier Sinus ihr bekanntes Product setzen, und beachten ferner, dass $\Sigma \operatorname{am} u$ wegen 45) durch $\pi + 2\operatorname{am} u_4$ ausgedrückt werden kann, so erhält man schliesslich

46) $$\tfrac{1}{8}v_4 = \frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi}{2K}(u_1+u_2)\sin\frac{\pi}{2K}(u_1+u_3)\sin\frac{\pi}{2K}(u_2+u_3)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{q}{1+q^4}\sin\frac{2\pi}{2K}(u_1+u_2)\sin\frac{2\pi}{2K}(u_1+u_3)\sin\frac{2\pi}{2K}(u_2+u_3)\ldots$$

In ähnlicher Art findet man noch

$$K^2\cos 2\varphi = \pi + 8\pi^2 \times$$
$$\left(\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi}{2K}(u_1+u_2)\cos\frac{\pi}{2K}(u_1+u_3)\cos\frac{\pi}{2K}(u_2+u_3)\ldots\right)$$

47)

$$\tfrac{1}{2}u_4 = \tfrac{1}{2}a_2\sin\tfrac{1}{2}(v_1+v_2)\sin\tfrac{1}{2}(v_1+v_3)\sin\tfrac{1}{2}(v_2+v_3)$$
$$- \tfrac{1}{4}a_4\sin(v_1+v_2)\sin(v_1+v_3)\sin(v_2+v_3)\ldots$$

Hierin ist $q = e^{-\pi}$ und die Constanten a_2, a_4 sind die bekannten Coefficienten der Reihe

$$F(\varphi) = a_0\varphi - \tfrac{1}{2}a_2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{4}a_4\sin 4\varphi\ \ldots$$

§ 4.

Andere Integralfunctionen lassen sich nach 8) ohne Mühe ableiten. Da das zweite Glied 32) d. i. der Coefficient von x^2 gleich Null ist, so führt die hierauf bezügliche Formel 17c) auf

48) $$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{(1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2)^3}} = C.$$

Nach den Methoden der Integralrechnung geht diese Function über in

49) $$E_1+E_2-E_3-E_4 = Z^2\,\Sigma\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\Delta}.$$

In

$$Z^2\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\Delta} = \frac{Z^2}{2(a-c)}y\sin\gamma = \frac{2a}{a+c}\sin\psi$$

ist $y\sin\gamma$ die Normale vom Brennpunkte auf den entsprechenden Radius r.

Man kann das obige Integral auch auf folgende Art deuten:

In einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sei ein Punkt durch die Coordinaten $x=a\sin\varphi$ und $y=b\cos\varphi$ bestimmt, der Winkel zwischen den Brennstrahlen sei Θ, der Winkel der Normalen mit der X-Achse sei ψ Das elliptische Integral E oder

$$\int\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2}\,d\varphi$$

transformiren wir durch Einführung von

$$\cos\varphi = \frac{b}{c}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Theta, \qquad \sin\frac{1}{2}\Theta = \frac{c}{a}\sin\psi$$

in

$$\frac{b^2}{a^2}\int\frac{d\frac{1}{2}\Theta}{\cos\frac{1}{2}\Theta^2\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\sin\frac{1}{2}\Theta^2}} = \frac{b^2}{a^2}\int\frac{d\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\psi^2\right)^3}}.$$

Es bedeutet also

50) $$s = \frac{b^2}{a}\int\frac{d\psi}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin\psi^2\right)^3}}$$

den vom Scheitelpunkte der grossen Achse an bis zu jenem Punkte, dessen Normale mit der Achse den Winkel ψ einschliesst, gerechneten Bogen der Ellipse, wie bekannt ist. Hiernach kann man das analoge

Integral 49) der Lemniskate für die Ellipse einrichten, wenn $\psi = \frac{1}{2}\gamma$ und $Z^2 = \frac{4ac}{(a+c)^2}$ = dem Modul des letztern Integrals gemäss bestimmt wird.

Man kann übrigens auch das Integral

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2-(a-c)^2)((a+c)^2-y^2)}}$$

in anderer Art für die Ellipse benutzen, wenn man beachtet, dass die Normale des genannten Punktes durch

$$N = b\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2},$$

und der zu r conjugirte Halbmesser r' durch

$$r' = \frac{a}{b}N$$

bestimmt ist. Daher geht das Integral

$$a\int\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\varphi^2}\,d\varphi$$

über in

$$-\int\frac{r'^2 dr'}{\sqrt{(r'^2-b^2)(a^2-r'^2)}}.$$

Wenn wir nun als Halbachsen einer Ellipse $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ die Beziehungen

$$A = a+c$$
$$B = a-c$$

einführen, in welchen a und c sich auf die Lemniskate beziehen, und die Brennstrahlen x der letztern als Radien r' der erstern einführen, so bestimmen die ihnen entsprechenden conjugirten Radien 4 Ellipsenpunkte, deren zugehörige von der kleinen Achse an gerechneten Bogen s die Relation haben:

$$s_1+s_2-s_3-s_4 = S,$$

worin S ein Ellipsenquadrant ist.

Diesen Functionen lassen sich noch mehrere anschliessen, so ist das Differential

$$\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-(a-c)^2)((a+c)^2-y^2)}} = \frac{a-c}{a+c}\,\frac{d\frac{1}{2}\gamma}{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma^2} = d\psi$$

ferner

$$\frac{d\gamma}{c+a\cos\gamma}$$

leicht zu integriren.

Ebenso existirt ein elliptisches Integral 3. Art

51) $$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\gamma}{\left(1-\frac{2a}{a+c}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2\right)\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2}}=C,$$

welches sich aus 35) ergibt.

Um zu entscheiden, ob noch Integrale 2. Art bestehen, berücksichtigen wir die Formel 17g) oder

$$\Sigma\frac{dx}{x^2\frac{\partial\varDelta}{\partial x}}=-\frac{c}{d^2}$$

in welchem unserm Beispiel gemäss $c=-4c^3\cos\varphi$ und $d=-c^4$ ist. Das obige Differential können wir nun nach geeigneter Transformation in die Integralfunction

$$\Sigma\int\frac{dx}{x^2(x^2-c^2)\sqrt{(x^2-(a-c)^2)((a+c)^2-y^2)}}=\int\frac{4c^3}{c^8}\cos\psi d\psi$$

übergehen lassen. Nach Einführung von $\tfrac{1}{2}\gamma$ wird hieraus

$$\Sigma\int\frac{c^6(1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2}}{(a+c)(a-c)^2(a^2-2ac+c^2Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)}=\int 4\cos\psi d\psi.$$

Ferner ist

$$\Sigma\int\frac{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2}\,d\tfrac{1}{2}\gamma}{(a+c)(a-c)^2(a^2-2ac+c^2Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)}=0.$$

Wir multipliciren das vorletzte Integral mit $-c^2$, das letzte mit $a^2-2ac+c^2$ und addiren beide, dann resultirt nach geordneter Zusammenstellung

$$\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\gamma_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma_2{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\gamma_2\ldots=4\,\frac{a-c}{c}\sin\psi,$$

oder kurz

52) $$E_1+E_2-E_3-E_4=4\cdot\frac{a-c}{c}\sin\psi.$$

Die geometrische Deutung dieser Function ist leicht.



§ 5.

Die Integrale der entwickelten Formeln haben die Amplitude $\frac{1}{2}\gamma$, man kann noch mehrere von der Amplitude $\frac{1}{2}v$ in folgender Art bestimmen. Wir transformiren nämlich die allgemeine Form

$$\Sigma\int\frac{dx}{(x^2-c^2)\sqrt{(x^2-(a-c)^2)((a+c)^2-x^2)}}=C$$

in

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}v}{(x^2-c^2)\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}v^2}}=C.$$

Es ist aber

$$\frac{x}{c}=\sqrt{1+\cos\tfrac{1}{2}v^2}-\cos\tfrac{1}{2}v,\qquad \frac{y}{c}=\sqrt{1+\cos\tfrac{1}{2}v^2}+\cos\tfrac{1}{2}v,$$

also auch

$$\frac{x}{a}=\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v^2}-\frac{\cos\frac{1}{2}v}{\sqrt{2}}.$$

Das letzte Integral geht also nach Einführung von x und darauf erfolgter Multiplication mit x über in

$$\int\frac{d\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v^2}}=\int\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}=C.$$

Die Integration ergibt

53) $\operatorname{tg}(45^0+\varphi_1)\operatorname{tg}(45^0+\varphi_2)\operatorname{tg}(45^0+\varphi_3)\operatorname{tg}(45^0+\varphi_4)=1.$

Das Hauptintegral 35) multipliciren wir jetzt mit $x^2(x^2-c^2)$ und beachten, dass das 2. Glied der Gleichung 32) fehlt. Nach einigen Umformungen resultirt

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}v^2}}\times$$
$$\left(1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v^2-\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v^2}+\frac{\cos\frac{1}{2}v^2}{2}\right)=C.$$

Die Reduction dieses Ausdruckes auf die kanonischen Integrale führt schliesslich auf folgende Form:

$$\Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}v^2}\,d\tfrac{1}{2}v=\Sigma\frac{\sin\frac{1}{2}v}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{2}\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}v^2}}\cdot$$

oder

54) $E_1+E_2-E_3-E_4=\Sigma\sin\varphi+\frac{1}{2}(F_1+F_2-F_3-F_4).$

Das Additionstheorem für die Integrale 2. Art lässt eine Vergleichung der Functionen 52) und 54) zu. Es ist bekanntlich

$$E\tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{4}F\tfrac{1}{2}v + \left(1+\frac{c}{a}\right)E\tfrac{1}{2}\gamma - \frac{\sin\frac{1}{2}v}{\sqrt{2}}.$$

Die Combination der letzten Integrale gibt also in Verbindung mit 52)

$$2(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 - \sin\varphi_4)$$

$$= \frac{a+c}{a}(\sin\tfrac{1}{2}\gamma_1 + \sin\tfrac{1}{2}\gamma_2 + \sin\tfrac{1}{2}\gamma_3 + \sin\tfrac{1}{2}\gamma_4) = 4\cdot\frac{(a+c)(a-c)}{ac}\sin\psi$$

oder die Relation

55) $$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 - \sin\varphi_3 - \sin\varphi_4 = \sqrt{2}\sin\psi,$$

d. i.

$$2\sin\tfrac{1}{4}(v_1+v_2)\sin\tfrac{1}{4}(v_2-v_4)\sin\tfrac{1}{4}(v_1-v_4) = \sin\psi.$$

Die letzten Formeln finden ihre Bestätigung durch die leicht zu entwickelnde Gleichung

56) $$\sin\varphi^4 - \sqrt{2}\sin\psi\sin\varphi^3 - \tfrac{1}{2}\sin\varphi^2 + \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin\psi^2 = 0,$$

woraus

$$\Sigma\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\psi.$$

Die bisher entwickelten Integrale der 2. Art haben, wie man sieht, Bezug auf die Rectification einer die Lemniskate einschliessenden Ellipse mit den Halbachsen a und c, deren Bogen also mit den entsprechenden Lemniskatenbogen in einfachem additivem Zusammenhang stehen.

Es lässt sich im Anschluss an die Function

$$\int^{\cdot}\frac{d\frac{1}{2}v^2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_1{}^2}} + \int\frac{d\frac{1}{2}v_2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_2{}^2}} + \int^{\cdot}\frac{d\frac{1}{2}v_3}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_3{}^2}}$$
$$+\int^{\cdot}\frac{d\frac{1}{2}v_4}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v_4}} = 2K,$$

eine zweite leicht entwickeln:

57) $$\int^{\cdot}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v_1}\,d\tfrac{1}{2}v_1 + \int^{\cdot}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v_2{}^2}\,\tfrac{1}{2}dv_2$$
$$+\int^{\cdot}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v_3}\,d\tfrac{1}{2}v_3 + \int^{\cdot}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}v_4}\,d\tfrac{1}{2}v_4 = 2E + \sqrt{2}\sin\psi,$$

wo E das vollständige Integral der 2. Art ist. Eine directe Herleitung dieser und anderer Formeln geben wir später.

Aus der Combination der Formeln



$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 2K,$$

58) $$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 2E + \sqrt{2}\sin\psi,$$

$$E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = \tfrac{1}{2}(F_1 + F_2 - F_3 - F_4) + \sqrt{2}\sin\psi$$

resultirt noch

59) $$E_3 + E_4 - \tfrac{1}{2}(F_3 + F_4) = E - \tfrac{1}{4}K,$$

und

$$E_1 + E_2 - \tfrac{1}{2}(F_1 + F_2) = E - \tfrac{1}{4}K + \sqrt{2}\sin\psi,$$

welche als Ellipsen- und Lemniskatenbogen eine gegenseitige Vergleichung zulassen. Für jede durch einen Brennpunkt einer Lemniskate gehende Gerade ist, wenn die Curve mit der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ in Verbindung gebracht wird, die Differenz der Ellipsenbogen $\frac{a}{\sqrt{2}}(E_3 + E_4)$ und der Lemniskatenbogen $\frac{c}{4}(F_1 + F_2)$ eine constante Grösse. Die Brennpunkte beider Curven fallen wie die grossen Achsen aufeinander, und die kleine Halbachse der Ellipse ist $= c$. Ihre Amplitude ist $\frac{1}{2}v$, so dass die entsprechenden Ellipsencoordinaten $x = a\sin\frac{1}{2}v$; $y = c\cos\frac{1}{2}v$ durch den excentrischen Winkel $\frac{1}{2}v$ definirt sind.

§ 6.

Obgleich die vorhergehenden geometrischen Anwendungen der entwickelten Integralfunctionen nur specielle Fälle behandelten, so zeigten dieselben doch schon die Fruchtbarkeit der gegebenen Methoden, so dass der Gedanke nahe liegt, diese Functionen allgemein für alle möglichen Fälle derart einzurichten, dass die Moduli und Constanten der elliptischen Integrale ohne Zwischenrechnung aus den Parametern der Gleichungen abgeleitet werden können.

Da wir nun die Art, wie vorhin das Beispiel der Lemniskate behandelt worden ist, für die folgenden Probleme zum Muster nehmen, so wollen wir die auch später vorkommenden Reihenentwickelungen jener Integrale in unserm speciellen Falle der Lemniskate zunächst entwickeln, um den Gang derselben bei der Auflösung der biquadratischen Gleichungen mittelst der genannten Integralfunctionen schon jetzt anzudeuten.

Wir benutzen die bekannten Reihen

60) $$F(\varphi) = a_0\varphi - \tfrac{1}{2}a_2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{4}a_4\sin 4\varphi - \ldots,$$

$$E(\varphi) = b_0\varphi + \tfrac{1}{2}b_2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{4}b_4\sin 4\varphi - \ldots,$$

in welchen

$$a_0 = \frac{2}{\pi}K, \quad a_2 = \lambda a_0 - \frac{8}{\pi Z^2}K, \quad a_4 = \frac{2}{3}(\lambda a_2 - a_0) \text{ etc.}$$

61)

$$b_0 = \frac{2}{\pi}E, \quad b_2 = \frac{1}{3}\left(\lambda b_0 - 8\frac{(1-Z^2)}{\pi Z^2}K\right), \quad b_4 = \frac{2}{5}(\lambda b_2 - b_0) \text{ etc.}$$

Ferner erinnern wir an die Formeln

62)
$$\begin{aligned}
\sin 2\varphi &= 2\sin\varphi - \sin\varphi^3 - \tfrac{1}{4}\sin\varphi^5 - \tfrac{1}{8}\sin\varphi^7 \ldots \\
\sin 3\varphi &= 3\sin\varphi - 4\sin\varphi^3 \\
\sin 4\varphi &= 4\sin\varphi - 10\sin\varphi^3 + \tfrac{7}{2}\sin\varphi^5 + \tfrac{3}{4}\sin\varphi^7 \ldots \\
\sin 5\varphi &= 5\sin\varphi - 20\sin\varphi^3 + 16\sin\varphi^5 \\
\sin 6\varphi &= 6\sin\varphi - 35\sin\varphi^3 + \tfrac{189}{4}\sin\varphi^5 - \tfrac{99}{8}\sin\varphi^7 \ldots
\end{aligned}$$

und benutzen endlich noch die für die biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

bestehenden symmetrischen Relationen der Wurzelpotenzen

63)
$$\begin{aligned}
\Sigma x &= -a, \\
\Sigma x^3 &= -a^3 + 3ab - 3c, \\
\Sigma x^5 &= -a^5 + 5a^3b + 5ab^2 - 5a^2c + 5ad + 5bc, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

welche wir für das folgende nötig haben.

In der abgeleiteten Relation der Lemniskatenbogen

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 2K$$

ist die Amplitude $\frac{1}{2}v$ an die Gleichung

64) $$\sin v^4 - 8\sin\psi\cos\psi\sin v^3 + 16\sin\psi^2\sin v - 16\sin\psi^4 = 0$$

geknüpft, wie leicht zu beweisen ist.

Man bemerke aber, dass eine Wurzel $\frac{1}{2}v_4$ negativ ist, dass also, wenn die Amplituden absolut genommen werden, geschrieben werden muss

$$\tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2 + \tfrac{1}{2}v_3 - \tfrac{1}{2}v_4 = 180^0,$$
$$\sin v + \sin v_2 + \sin v_3 - \sin v_4 = 4\sin 2\psi,$$

oder

65)
$$\begin{aligned}
\Sigma \sin v &= 8\sin\psi\cos\psi, \\
\Sigma \sin v^3 &= 128\cos 3\psi\sin\psi^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Das unvollständige elliptische Integral 1. Art hat nun folgende Form



$$F(\tfrac{1}{2}v) = a_0 \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}a_2 \sin v$$

$$+ \tfrac{1}{4}a_4 (2 \sin v - \sin v^3 - \tfrac{1}{4} \sin v^5 - \tfrac{1}{8} \sin v^7 \ldots)$$

66) $$- \tfrac{1}{6}a_6 (3 \sin v - 4 \sin v^3)$$

$$+ \tfrac{1}{8}a_8 (4 \sin v - 10 \sin v^3 + \tfrac{7}{2} \sin v^5 + \tfrac{3}{4} \sin v^7 \ldots)$$

$$- \tfrac{1}{10}a_{10} (5 \sin v - 20 \sin v^3 + 16 \sin v^5) \ldots$$

Die Function

67) $$F_1 + F_2 + F_3 - F_4$$

$$= a_0 \Sigma \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}a_2 \Sigma \sin v + \tfrac{1}{4} a_4 \Sigma \sin 2v - \tfrac{1}{6}a_6 \Sigma \sin 3v \ldots$$

kann nun in folgender Art transformirt werden. Für $F_1 + F_2 + F_3$ setzen wir $2K - F_4$, und beachten, dass $a_0 \Sigma \tfrac{1}{2}v = a_0 \pi = 2K$. Da wir die F reell wählen, so muss dementsprechend der Winkel ψ innerhalb bestimm er Grenzen genommen werden. Derselbe ist, wie man sieht, ein Parameter der Hauptgleichung 32) oder 44). Für

$$F_4 = u_4 = \int \frac{d\tfrac{1}{2}v_4}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin \tfrac{1}{2}v^2}}$$

gewinnen wir schliesslich das Resultat

$$u_4 = (a_2 - a_4 + a_6 - a_8 \ldots) \sin 2\psi$$

68) $$+ \tfrac{16}{3} (3a_4 - 8a_6 + 15a_8 - 24a_{10} \ldots) \cos 3\psi \sin \psi^3$$

$$+ \tfrac{4}{5}(5a_4 - 35a_8 + 128a_{12})(21 - 32 \cos 2\psi + 32 \cos 4\psi) \sin 2\psi \sin \psi^4,$$

. . . .

wonach der Lemniskatenbogen u_4 durch eine Reihe ausgedrückt wird, deren Coefficienten durch vollständige elliptische Integrale bestimmt sind, und die innerhalb der angegebenen Grenzen des Focalwinkels ψ convergirt.

In ähnlicher Art findet man

$$E_4 = \frac{\sin \psi}{\sqrt{2}} - (b_2 - b_4 + b_6 - b_8 \ldots) \sin 2\psi$$

69) $$- \tfrac{16}{3} (3b_4 - 8b_6 + 15b_8 \ldots) \cos 3\psi \sin \psi^3$$

$$- \tfrac{4}{5}(5b_4 - 35b_8 + 128b_{10})(21 - 32\cos 2\psi + 32\cos 4\psi)\sin 2\psi \sin \psi^4.$$

Die obigen Reihen haben wir aus dem Grunde zunächst an einem einfachen Beispiel entwickelt, um den Weg anzudeuten, auf welchem wir später bei Verallgemeinerung der Methoden zur Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades vermittelst dieser Functionen gelangen werden.

Bemerkung. In § 1 leiteten wir aus der Gleichung 4. Grades und ihrem Differentiaquotienten die Formel her:

$$\operatorname{tg}\tau^4 - A\operatorname{tg}\tau^3 + B\operatorname{tg}\tau^2 + D = 0$$

und es war

$$\Sigma \frac{1}{\operatorname{tg}\tau} = 0$$

In ähnlicher Weise findet man aus der letzten Gleichung die folgende

$$\Sigma \frac{1}{4\operatorname{tg}\tau^3 - 3A\operatorname{tg}\tau^2 + 2B\operatorname{tg}\tau} = 0$$

oder auch

$$\Sigma \frac{1}{4\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right)^2 - 3A\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + 2B} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}$$

und an diese Relation schliessen sich noch andere verwandte an.

§ 7.

Integralfunctionen der Curven 4. und 3. Grades.

Da die gemeinsame Betrachtung der Eigenschaften der Lemniskate und der durch die Gleichung

70) $$\pm y^2 = x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D$$

definirten Curven 4. Grades auf harmonische Verhältnisse führt, so wollen wir folgende Untersuchung hier einschalten. Die Schnitte der X-Achse mit der obigen Curve (Fig. 4.) bestimmen die Wurzeln $a_1 a_2$ etc. der Gleichung $y = 0$. Die Formel 13) findet Anwendung auf dieselbe, wenn wir zur X-Achse eine parallele Gerade ziehen, welche, im Fall wir das obere Zeichen wählen und also y constant $= b$ festsetzen, in ihren Schnittpunkten mit der Curve auf die Wurzeln $x_1 x_2$ etc. führt. Dann ist

71) $$\int \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-a_1)(x_1-a_2)(x_1-a_3)(x_1-a_4)}} + \int \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2-a_1)(x_2-a_2)(x_2-a_3)(x_2-a_4)}} + \text{etc.} = C$$

die Integralfunction.

Die Bedingungen, welche für die Normalform der elliptischen Integrale 1. Art notwendig sind, finden sich aus

72) $$Z' = \frac{\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_4)} - \sqrt{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}}{\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_4)} + \sqrt{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_4)} + \sqrt{(a_1-a_4)(a_2-a_4)}}{\sqrt{(a_1-a_3)(a_1-a_4)} - \sqrt{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}} \sqrt{\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(x-a_3)(x-a_4)}},$$

und die Normalform wird

73) $$\int \frac{d\frac{1}{2}\gamma_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_1^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\gamma_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_2^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\gamma_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_3^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\gamma_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\gamma_4^2}} = C.$$

Wir wenden hierauf die Landen'sche Substitution an, und demnach hat man

$$\sin(\gamma - \tfrac{1}{2}v) = \frac{c}{a}\sin\tfrac{1}{2}v$$

zu setzen, wodurch die Function 71) übergeht in

74) $$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\frac{1}{2}v^2}} = C, \quad Z^2 = \frac{4ac}{(a+c)^2}$$

Nun geht aber vorstehender Ausdruck für $a^2 = 2c^2$ in die bekannte Function für die Lemniskate über, und die Relation

75) $$Z' = \frac{a-c}{a+c}$$

bedingt gemäss 72) die zweite

76) $$\frac{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}{(a_1-a_3)(a_2-a_4)} = \tfrac{1}{2}.$$

Diesem harmonischen Doppelverhältniss schliessen sich durch Permutation die beiden folgenden

77) $$\frac{(a_2-a_1)(a_4-a_3)}{(a_3-a_2)(a_4-a_1)} = 1,$$
$$\frac{(a_3-a_1)(a_2-a_4)}{(a_2-a_1)(a_3-a_4)} = 2,$$

identisch an. Dies zusammen fassend haben wir den Satz:

Wenn die Wurzeln $a_1 a_2$ etc. der Curve 4. Grades

$$y^2 = x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D$$

für $y = 0$ in harmonischer Beziehung zu einander stehen, dann existirt für jede beliebige der X-Achse parallele Gerade $y = b$ und der dadurch bedingten Wurzeln $x_1 x_2$ etc. eine Integralfunction

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{1-\frac{4ac}{(a+c)}\sin\frac{1}{2}\gamma^2}} = 2K,$$

deren doppelte Amplitude γ als Winkel zwischen einem Brennstrahl

und dem entsprechenden Radius einer Lemniskate aufgefasst werden kann, während in der transformirten Function

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}v}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}v^2}} = 2K, \qquad a = c\sqrt{2}$$

die doppelte Amplitude v der Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen ist und die Function selbst 4 Lemniskatenbögen charakterisirt, deren Summe stets constant ist. Die Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen x, γ und v sind

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}+\sqrt{(a_1-a_4)(a_2-a_4)}}{\sqrt{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}-\sqrt{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}}\;\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{b},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(v-\gamma) = (\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Die obigen harmonischen Doppelverhältnisse führen zu einer bekannten Reducente der biquadratischen Gleichung und zwar zur kubischen Invariante $K=0$ oder

78) $$72BD+9ABC-27C^2-27A^2D-2B^3=0.$$

Sobald diese Bedingung unter den Constanten der Gleichung erfüllt ist, sind ihre Wurzeln bekanntlich einander harmonisch zugeordnet.

§ 8.

Wir legen jetzt die Curven dritten Grades

79) $$\pm y^2 = x^3 - Ax^2 + Bx - C$$

den folgenden Untersuchungen zu Grunde und werden die aus ihr resultirende Integralfunction

80) $$\int \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-a_1)(x_1-a_2)(x_1-a_3)}} + \int \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2-a_1)(x_2-a_2)(x_2-a_3)}} + \int \frac{dx_3}{\sqrt{(x_3-a_1)(x_3-a_2)(x_3-a_3)}} = 0$$

geometrisch und dynamisch interpretiren. Wir wählen zunächst das obere Vorzeichen, setzen also voraus, dass die der X-Achse parallele Gerade $y=+b$ oberhalb der Achse die Curve in 3 durch die Abscissen $x_1\,x_2\,x_3$ bestimmten Punkten $P_1\,P_2\,P_3$ schneidet. (Fig. 5.) Bei der Bildung der Normalform hat man nun folgendes zu beachten:

Im 1. Integral der Function führen wir ein

$$x_1 - a_1 = z_1^2,$$

dasselbe geht dann über in

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{(a_2 - a_1 - z_1^2)(a_3 - a_1 - z_1^2)}}.$$

Wir setzen ferner

$$Z^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}. \qquad z_1^2 = (a_2 - a_1) \sin \varphi_1^2,$$

dann folgt

81) $$\frac{x_1 - a_1}{a_2 - a_1} = \sin \varphi_1^2,$$

und das Integral wird

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \varphi_1^2}}.$$

Ebenso findet man für $x_2 - a_2 = - z_2^2$

$$Z^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}. \qquad z_2^2 = (a_2 - a_1) \sin \varphi_2^2$$

woraus

82) $$\frac{a_2 - x_2}{a_2 - a_1} = \cos \varphi_2^2$$

und es ist das zweite Integral

$$\int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \varphi_2^2}}.$$

Es sei endlich

$$x_3 - a_3 = z_3^2$$

dann ist ebenfalls

$$Z^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}, \qquad z_3^2 = (a_3 - a_1) \cot \varphi_3^2,$$

also

83) $$\frac{x_3 - a_3}{a_3 - a_1} = \cot \varphi_3^2,$$

so dass die allgemeine Normalform wird:

84) $$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \varphi_3^2}} = 0$$

Es lässt sich leicht die geometrische Bedeutung der Amplituden φ nachweisen. Die X-Achse möge die Curve in den Punkten $A_1 A_2 A_3$ schneiden. Ueber $A_1 A_2$ beschreiben wir einen Halbkreis, verlängern die Ordinaten der Punkte $P_1 P_2$ bis zum Durchschnitt mit demselben und ziehen von A_2 aus nach diesen Schnittpunkten Sehnen, dieselben schliessen, wie aus 81) und 82) hervorgeht, mit der X-Achse die Winkel φ_1 und φ_2 ein.

Ferner beschreiben wir über $A_1 X_3$ einen Halbkreis, errichten in A_3 eine Ordinate bis zum Kreise und verbinden den Durchschnitt mit

X_3 durch eine Sehne, welche nach 83) den Winkel φ_3 mit der Achse einschliesst. In der Figur ist nur eine der zwei congruenten Curven angegeben. In der Integralfunction ist also die Amplitude geometrisch definirt.

Will man dieselbe auf die Lemniskate anwenden, so ist $Z^2 = \frac{1}{2}$ zu setzen, woraus

85) $$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

folgt.

Die Wurzeln $a_1 a_2 a_3$ müssen also, im Falle dass die Integralfunction durch Lemniskatenbogen ausgedrückt werden soll, eine stetige arithmetische Proportion bilden.

Die allgemeine Bedingungsgleichung ist hierfür das Verschwinden der kubischen Variante

86) $$2A^3 - 9AB + 27C = 0.$$

Erfüllen die Constanten der Curve 3. Grades 79) diese Bedingung, so ist φ der halbe Focalwinkel der Lemniskate, in welcher drei durch die oben angegebenen Amplituden bestimmten Lemniskatenbogen in der Relation

87) $$u_1 + u_2 = u_3$$

zu einander stehen.

In Bezug auf das untere Vorzeichen geht für die Curve

$$-y^2 = x^3 - Ax^2 + Bx - C$$

die Integralfunction über in

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{-(x_1 - a_1)(x_1 - a_2)(x_1 - a_3)}} + \int \frac{dx_2}{\sqrt{-(x_2 - a_1)(x_2 - a_2)(x_2 - a_3)}}$$
$$+ \int \frac{dx_3}{\sqrt{-(x_3 - a_1)(x_3 - a_2)(x_3 - a_3)}} = 0.$$

Im 1. Integral ist einzuführen

$$x_1 - a_1 = -z_1^2, \quad Z'^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \quad x_1 = a_1 - (a_3 - a_1)\cot\sigma_1^2,$$

woraus

$$\frac{a_1 - x_1}{a_3 - a_1} = \cot\sigma_1^2.$$

Im 2. Integral ist einzuführen

$$x_2 - a_2 = z_2^2, \quad Z'^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \quad x^2 = a_2 + (a_3 - a_2)\cos\sigma_2^2,$$

woraus

$$\frac{x_2 - a_2}{a_3 - a_2} = \cos\sigma_2^2.$$

Im 3. ist

$$x_3 - a_3 = -z_3^2, \quad Z'^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \quad x_3 = a_3 - (a_3 - a_2)\sin\sigma_3^2,$$

woraus

$$\frac{a_3 - x_3}{a_3 - a_2} = \sin\sigma_3^2,$$

so dass die Integralfunction übergeht in die Normalform

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - Z'^2 \sin\sigma_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - Z'^2 \sin\sigma_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - Z'^2 \sin\sigma_3^2}} = 0$$

deren Amplituden auf die nämliche Art wie im ersten Fall durch Winkel zwischen Kreissehnen und der X-Achse geometrisch definirt sind.

Die Anwendung auf die Lemniskate führt wieder auf die stetige Proportion

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

und damit auf Lemniskatenbogen, die in der Relation

$$u_1 + u_2 = u_3$$

zu einander stehen.

In Bezug auf die Curve bemerken wir, dass für das obere Zeichen die Curve oberhalb der Achse reell, unterhalb derselben imaginair wird. Für das untere Zeichen gilt das Gesagte umgekehrt, so dass die ganze Curve beide Fälle umfasst.

§ 9.

Dynamische Bedeutung der Curven 3. Grades.

Da die Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf der Kugeloberfläche auf das vorhin entwickelte Integral führt, so wollen wir eine gemeinschaftliche Betrachtung beider Integrale jetzt noch in Kürze vornehmen.

Nach den bekannten Methoden der analytischen Mechanik betreffs des Problems des Kugelpendels werden folgende Differentialgleichungen die Lösung desselben geben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{r},$$

88) $$\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{r},$$

88)
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{r} + g,$$
$$x^2+y^2+z^2 = r^2,$$
$$v^2 = 2gz + C,$$
woraus
$$\frac{xdy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C'.$$

Bei Einführung bekannter Polarcoordinaten φ und ψ wird

89)
$$v^2 = r^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + r^2 \sin\psi^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$
$$z = r\cos\psi,$$
und es ist also:

90)
$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \sin\psi^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{r}\cos\psi + \frac{C}{r^2},$$
oder wegen
$$\sin\psi^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C'}{r^2},$$

91)
$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{\sin\psi^2} = \frac{2g}{r}\cos\psi + A,$$
worin
$$A = \frac{C}{r^2}, \quad C = \frac{C'}{r^2}.$$

Aus der letzten Differentialgleichung resultirt also das Zeitintegral

92)
$$t = \int\frac{\sin\psi d\psi}{\sqrt{-C^2 + \left(A + \frac{2g}{r}\cos\psi\right)\sin\psi^2}},$$

worin die Constanten sich auf den Anfangszustand beziehen.

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen oder

93)
$$-\frac{2g}{r}\left(\cos\psi^3 + \frac{Ar}{2g}\cos\psi^2 - \cos\psi - \frac{r}{2g}(A - C^2)\right)$$

kann durch Einführung der Wurzeln dieser Gleichung auf eine Form gebracht werden, welche eine Vergleichung mit dem Integral 84) zulässt. Diese Form ist

94)
$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}}\int\frac{d\cos\psi}{\sqrt{-(\cos\psi - \cos\alpha)(\cos\psi - \cos\beta)\left(\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)}}$$

Vermittelst der bekannten Substitution (S. Schell, Theorie etc. S. 358)

$$\cos\psi = \cos\beta - (\cos\beta - \cos\alpha)\sin\sigma^2, \quad \text{woraus}$$

95) $$\sin\sigma^2 = \frac{\cos\beta - \cos\psi}{\cos\beta - \cos\alpha},$$

geht das Integral für $\cos\psi = x$ über in

96) $$\int\frac{dx}{\sqrt{-(x-\cos\alpha)(x-\cos\beta)\left(x+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)}},$$

und seine Normalform ist $\int\frac{d\sigma}{\sqrt{1-Z^2\sin\sigma^2}}$, so dass man hat

97) $$\int\frac{d\sigma_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\sigma_1^2}} + \int\frac{d\sigma_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\sigma_2^2}} + \int\frac{d\sigma_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\sigma_3^2}} = 0$$

worin

98) $$Z^2 = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta^2}.$$

Diese Gleichungen sind mit dem der Curve 3. Grades identisch, wenn man letzterer die Form gibt

99) $$y^2 = -(x-\cos\alpha)(x-\cos\beta)\left(x+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)$$

Hiernach sind die Abscissen der 3 Schnittpunkte $A_1\,A_2\,A_3$ von Achse und Curve der Reihe nach gleich

$$-\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}, \quad \cos\alpha, \quad \cos\beta. \quad \text{Fig. 6.}$$

Um den Anfangspunkt beschreiben wir mit dem Radius $r = 1$ einen Kreis, derselbe wird den 1. Punkt A_1 aus-, dagegen die beiden andern einschliessen. Ferner ziehen wir eine die Curve in 3 Punkten schneidende, der X-Achse parallele Gerade, die Ordinaten des 2. und 3. Punktes verlängern wir bis zum Kreise, und die Radien dieser Schnittpunkte mögen mit der X-Achse die Winkel ψ_2, ψ_3 einschliessen. Endlich construiren wir noch über A_2A_3 und A_3X_1 Halbkreise, (X_1 bezeichnet den Abscissenpunkt der 1. Ordinate); im ersten verbinden wir die Schnittpunkte der Ordinaten y_2, y_3 und der Curve A_2 durch Sehnen, welche mit der Achse die Winkel σ_2 und σ_3 bilden. Der Schnittpunkt der Ordinate in A_1 und des 2. Kreises, verbunden mit X_1 durch eine Sehne, bestimmt den 3. Winkel σ, so dass auch hier die Amplituden der Integrale geometrisch bekannt sind. Die Sache verhält sich nun so:

Während das Kugelpendel seine Bewegung vom tiefsten Punkte (β) zum höchsten (α) vollführt, geht in der auf der Ebene darge-



stellten Bewegung der ensprechende Punkt von A_3 nach A_2, gelangt also aus der Lage $\psi_3(\sigma_3)$, wozu die Zeit t_3, in die Lage $\psi_2(\sigma_2)$, wozu die Zeit t_2 erforderlich ist, und es ist, wenn man die der Amplitude σ_1 entsprechende Zeit mit t_1 bezeichnet, für alle der X-Achse parallele Geraden und die dadurch bedingten Amplituden die Relation

100) $$t_1 = t_2 + t_3$$

allgemein gültig.

Wegen $t = c\int\frac{dx}{y}$ hat man $\frac{dx}{dt} = v_x = cy$, so dass die auf die X-Achse projicirte Bewegungsgeschwindigkeit des Curvenpunktes der zugehörigen Ordinate proportional ist.

Unserer Figur gemäss geht wegen der Lage der Ordinatenachse die Bewegung in der untern Halbkugel vor sich, denn α liegt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und 0. Rückt aber diese Achse über A_2 hinaus, so liegt α zwischen π und $\frac{\pi}{2}$, und der höchste Punkt befindet sich auf der obern Halbkugel. Zieht man im Punkte (β) eine Tangente bis zur Achse, so bildet das von der X-Achse abgeschnittene Stück $OC = \frac{r}{\cos\beta}$ ein Kriterium für diese Bewegungsverhältnisse. Ist nämlich die Geschwindigkeitshöhe im tiefsten Punkt der Bahn kleiner oder grösser als diese Strecke, so liegt der höchste Curvenpunkt in der untern beziehungsweise obern Halbkugel.

Es erübrigt noch, die geometrische Bedeutung des Modulus der obigen elliptischen Integrale nachzuweisen.

Zu dem Ende beschreiben wir noch über A_1A_3 einen Halbkreis, errrichten in A_2 die Ordinate und verbinden den Schnittpunkt derselben mit dem Mittelpunkt des Kreises. Der Radius ist

$$\varrho = \frac{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta^2}{\cos\alpha + \cos\beta},$$

die Abscissenache Z des Punktes A_2 in Bezug auf den Mittelpunkt

$$= \frac{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha^2 - \cos\beta^2}{\cos\alpha + \cos\beta},$$

also ist

$$\frac{Z}{\varrho} = \cos\alpha' = \frac{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha^2 - \cos\beta^2}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta^2}.$$

Aus der Figur ergibt sich ferner, wenn wir

$$Z^2 = \frac{A_3 - A_2}{A_3 - A_1}$$

transformiren, dass

101) $$Z = \sin \tfrac{1}{2}\alpha'$$

womit der Ausdruck

$$Z^2 = \frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta^2}$$

geometrisch definirt ist.

§ 10.

Die so eben gegebenen Entwickelungen finden ebenfalls Anwendung auf die Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreise, welcher Fall aus dem vorhergehenden durch die Annahme, dass die Bewegung im tiefsten Punkte der Kugel beginne, oder dass $\beta = 0$ ist, leicht abgeleitet werden kann. Der Punkt geht bis α und kehrt wieder zurück, der Modulus des Integrals für diese schwingende Bewegung ist $Z = \sin\frac{1}{2}\alpha$, der Winkel desselben oder α hat den Spielraum von 0 bis 180^0. Für $Z = 1$ hat man die asymptotische Bewegung als Grenzfall für die Curve 3. Grades. Die Verhältnisse bleiben in diesem speciellen Falle dieselben, wie vorhin für den allgemeinen. Jede der X-Achse parallele, die Curve in 3 reellen Punkten schneidende Gerade bestimmt 3 Amplituden und entsprechende Zeiten, welche durch die Relation $t_1 = t_2 + t_3$ mit einander verknüpft sind. Die Curve wird durch die Gleichung 3. Grades

$$y^2 = -(x - \cos\alpha)(x^2 - 1),$$

oder

102) $$x^3 - \cos\alpha\, x^2 - x + \cos\alpha + y^2 = 0$$

bestimmt.

Ist $\alpha = 90^0$, so ist $Z^2 = \frac{1}{2}$. Die Bewegung des Punktes geschieht in dem Halbkreise und die Integralfunction

$$\int \frac{d\sigma_1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\sigma_1{}^2}} = \int \frac{d\sigma_2}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\sigma_2{}^2}} + \int \frac{d\sigma_3}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\sigma_3{}^2}}$$

in welcher die Amplituden σ als Focalwinkel einer Lemniskate angesehen werden können, geht über in eine Relation $u_1 = u_2 + u_3$ von Lemniskatenbogen. Die Curve hat dann die Gleichung

$$x^3 - x + y^2 = 0,$$

wobei wir daran erinnern, dass dieselbe wie alle übrigen aus 2 zur X-Achse symmetrischen Teilen besteht, von denen aber nur eine gezeichnet ist.

Zum Zwecke einer Verification wählen wir den Fall der asymptotischen Bewegung, welche der Curve (Fig. 7.)

103) $$x^3+x^2-x-1+y^2=0$$

entspricht. Für $y=0$ sind deren Wurzeln $x_3=+1$ und $x_{12}=-1$.

Die Gerade sei eine Tangente, so dass die Gleichung für den Maximalwert von $y=\sqrt{\frac{32}{27}}$, zwei gleiche Wurzeln $x=\frac{1}{3}$ besitzt, die 3. Wurzel $=-\frac{5}{3}$. Die erste Kreisordinate, welche mit der 2. zusammenfällt, hat den Wert $\frac{4}{3}\sqrt{2}$, die Ordinate y' im Punkte A_1 ist $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, woraus die Amplituden $\operatorname{tg}\sigma_2=\operatorname{tg}\sigma_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\sigma_1=\sqrt{3}$, oder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma_1=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ folgen. Da nun das Integral

$$\int\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sin\sigma^2}}=\log\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\sigma}{2}\right)$$

ist, so geht die Integralfunction über in

104) $$\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\sigma_2)^2=\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\sigma_1)$$

welche Gleichung bei Benutzung der berechneten Amplituden leicht bewahrheitet werden kann.

§ 11.

Die Integralfunctionen der Ellipse.

Von besonderer Bedeutung werden die allgemeinen Entwickelungen des § 1. für die Kegelschnitte, indem die aus denselben gewonnenen Theoreme einer Erweiterung fähig sind.

Die Ellipse

105) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

werde von einem Kreise, dessen Centrum die Coordinaten $R(\alpha)$ habe, in 4 Punkten, deren Coordinaten $x=a\sin\varphi$, $y=b\cos\varphi$ etc. geschnitten.

Ist der Radius des Kreises $=s$, so bestehen die Formeln

105) $$\begin{gathered}s^2=R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\alpha),\\ R\cos\psi=a\sin\varphi,\quad R\sin\psi=b\cos\varphi,\\ r^2=a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2.\end{gathered}$$

Die Elimination von φ und r aus der 1. dieser Gleichungen vermittelst der beiden folgenden liefert das Schlussresultat

$$105)\quad \sin\varphi^4 - \frac{4Ra}{c^2}\cos\alpha\sin\varphi^3 + \frac{a^2}{c^4}\left(4R^2\cos\alpha^2 + 4\frac{b^2R^2}{a^2}\sin\alpha^2 + 2\frac{c^2}{a^2}L\right)\sin\varphi^2$$

$$-4\frac{Ra}{c^4}L\cos\alpha\sin\varphi + \frac{L^2 - 4b^2R^2\sin\alpha^2}{c^4} = 0,$$

worin

$$L = R^2 + b^2 - s^2.$$

Führt man $x = a\sin\varphi$ ein, so entsteht

$$106)\quad x^4 - 4R\frac{a^2}{c^2}\cos\alpha . x^3 + \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{4R^2a^2}{c^2}\cos\alpha^2 + 4\frac{b^2R^2}{c^2}\sin\alpha^2 + 2L\right)x^2$$

$$-4R\frac{a^4L}{c^4}\cos\alpha . x + \frac{a^4}{c^4}(L^2 - 4b^2R^2\sin\alpha^2) = 0.$$

Dieser Gleichung steht zur Seite

$$107)\quad y^4 + 4R\frac{b^2}{c^2}\sin\alpha . y^3 + \frac{b^2}{c^2}\left(\frac{4R^2a^2}{c^2}\cos\alpha^2 + 4\frac{b^2R^2}{c^2}\sin\alpha^2 - 2L'\right)y^2$$

$$-4R\frac{b^4}{c^4}L'\sin\alpha . y + \frac{b^4}{c^4}(L'^2 - 4R^2a^2\cos\alpha^2) = 0.$$

$$L' = R^2 + a^2 - s^2.$$

Auf diese Gleichung findet die Formel 13) Anwendung, die Ausführung gibt in geordneter Darstellung das Differential

$$108)\quad \frac{dx}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(x^2-a^2)\left(x^4 - \frac{2a^2}{c^2}(L-2R^2)x^2 + \frac{a^4}{c^4}(L^2 - 4b^2R^2)\right)}}$$

oder transformirt und integrirt

$$109)\quad \Sigma\int\frac{dx}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(x^2-a^2)\left(x^2 + \frac{a^2}{c^2}(b^2-(R+1)^2)\right)\left(x^2 + \frac{a^2}{c^2}(b^2-(R-1)^2)\right)}} = C$$

Dies hyperelliptische Integral kann durch Multiplication mit x auf ein elliptisches zurückgeführt werden, welche Lösung wir nachher in voller Allgemeinheit geben. Hier machen wir die Annahme, dass $s = R \pm b$ sei, dann ist auch $L = \mp 2Rb$. Bei Einführung von $x = a\sin\varphi$ geht das letzte Integral über in

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{4R(R\pm b)}\sin\varphi^2}} = C.$$

Nach einer Untersuchung über die Vorzeichen und die Constante resultirt

$$110)\quad \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}} = \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}} + \int \frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}},$$

und beziehen sich die Indices auf die entsprechenden Quadranten, wobei wir $R(\alpha)$ in 1. annehmen.

Aus der Relation

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=0$$

olgt, wenn die φ absolut genommen werden,

$$\mathrm{am}\,u_1-\mathrm{am}\,u_2-\mathrm{am}\,u_3+\mathrm{am}\,u_4=0.$$

Setzt man im Anschluss an die Ellipse den Modulus $Z^2 = \frac{c^2}{4R(R+b)}$ und die Amplituden φ_2, φ_3, φ_4 als gegeben voraus, so lassen hieraus die auf die Ellipse sich beziehenden Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{R}{b}$, α sich bestimmen. Es besteht nämlich die folgende Relation

$$\frac{a}{b}\cos\alpha.\sin\varphi+\sin\alpha.\cos\varphi-\frac{2R}{b}Z^2\sin\varphi^2 = 2Z^2\sin\varphi^2-1.$$

Es sei

$$\frac{a}{b}\cos\alpha = x,\quad \sin\alpha = y,\quad \frac{2RZ^2}{b} = z,$$

dann hat man die folgenden 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} x\sin\varphi_1+y\cos\varphi_1-z\sin\varphi_1^2 &= 2Z^2\sin\varphi_1^2-1,\\ x\sin\varphi_2+y\cos\varphi_2-z\sin\varphi_2^2 &= 2Z^2\sin\varphi_2^2-1,\\ x\sin\varphi_3+y\cos\varphi_3-z\sin\varphi_3^2 &= 2Z^2\sin\varphi_3^2-1. \end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt

$$\frac{Z^2}{2}\left(\frac{R}{b}+1\right) = -\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_3)\sin\frac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_1)}{\sin\varphi_1^2\sin(\varphi_2-\varphi_3)+\sin\varphi_2^2\sin(\varphi_3-\varphi_1)+\sin\varphi_3^2(\varphi_1-\varphi_2)}$$

u. s. w.

Bemerkenswerter sind die elliptischen Integrale der 2. Art.

Gemäss den in § 1. entwickelten Formeln findet man leicht

$$111)\quad \Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi^2}\,d\varphi = \frac{2b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\,d(\cos\alpha).$$

Nach Feststellung der Vorzeichen ist die Integralfunction

$$112)\quad -\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1{}^2}\,d\varphi_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^2}\,d\varphi_2$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3{}^2}\,d\varphi_3+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^4}\,d\varphi_4=\frac{4bR}{ac}\cos\alpha.$$

$$Z^2=\frac{c^2}{4R(R+b)}.$$

Da nun bekanntlich Ellipsenbogen durch Integrale dieser Art ausgedrückt werden, so liegt der Gedanke nahe, die obigen Integrale durch die dazu erforderliche Bedingung

$$Z^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

mit solchen Bogen unserer Ellipse zu identificiren. Aus der Bedingung

$$113)\qquad \frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{4R(R+b)}\quad \text{und}\quad s=R+b$$

folgen nun die Relationen

$$114)\qquad R=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{2},\quad s=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{2}.$$

wodurch die Integrale in Ellipsenbogen übergehen, wenn die Function noch mit a multiplicirt wird.

Demnach kann man folgenden Satz aussprechen:

Jeder Kreis vom Halbmesser $s=R+b$, dessen Centrum $R(\alpha)$ auf einem mit dem Radius $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{2}$ um den Mittelpunkt einer Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ beschriebenen Kreise liegt, schneidet auf derselben von den entsprechenden Scheitelpunkten der kleinen Achse an gerechnete Bogen S ab, für welche die Relation

$$115)\qquad S_1=S_2+S_3+S_4-4\frac{bR}{c}\cos\alpha$$

besteht.

S_3+S_4 bilden zusammen einen Ellipsenbogen.

Auf die Integralfunction

$$116)\qquad F(\varphi_1)-F(\varphi_2)=F(\varphi_3)+F(\varphi_4)$$

lässt sich das Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Art mit seinen bekannten Gleichungssystemen anwenden. Erwägen wir, dass

durch Transposition aus dem obigen Ausdruck noch die beiden folgenden

$$F(\varphi_1)-F(\varphi_3)=F(\varphi_2)+F(\varphi_4),$$
117)
$$F(\varphi_1)-F(\varphi_4)=F(\varphi_2)+F(\varphi_3),$$

hervorgehen, und führen ein

$$F(\varphi_1)-F(\varphi_2)=F(\sigma),$$
118)
$$F(\varphi_3)+F(\varphi_4)=F(\sigma),$$

welche mit den Formeln

$$\cos\sigma=\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\sigma),$$
119)
$$\cos\sigma=\cos\varphi_3\cos\varphi_4-\sin\varphi_3\sin\varphi_4\Delta(\sigma)$$

verknüpft sind, so hat man folgende symmetrische Function:

120) $$\sin\sigma=\frac{\cos\varphi_1{}^2-\cos\varphi_2{}^2}{-\cos\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\varphi_1)-\cos\varphi_2\sin\varphi_1\Delta(\varphi_2)}$$
$$=\frac{\cos\varphi_3{}^2-\cos\varphi_4{}^2}{\cos\varphi_3\sin\varphi_4\Delta(\varphi_3)-\cos\varphi_4\sin\varphi_3\Delta(\varphi_4)}.$$

und in Verbindung mit andern bekannten Relationen noch eine zahlreiche Menge neuer. Wir geben später unter Benutzung der Jacobischen Construction bezüglich der Addition der elliptischen Integrale eine weitere geometrische Durchführung der bisher entwickelten Functionen in allgemeinster Betrachtung. Man bemerke noch die der Formel 108) analoge Integralfunction

121) $$\int\frac{dy}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(y^2-b^2)\left(y^2-\frac{b^2}{c^2}(a^2-(R-s)^2)\right)\left(y^2-\frac{b^2}{c^2}(a^2-(R-s)^2)\right)}}.$$

Auf diese hyperelliptischen Integrale kommen wir später zurück.

§ 12.

Wenden wir die vorhin gegebenen Functionen auf die Hyperbel

122) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

an und setzen die Bedingung $s=R\pm a$ voraus, so erhalten wir die Function

123) $$\Sigma\int\frac{dy}{\frac{4abR}{c^2}y\sqrt{(y^2+b^2)\left(\frac{4Rsb^2}{c^2}-y^2\right)}}=C.$$



Die Reduction auf die kanonische Form basirt auf

124)
$$Z^2 = \frac{4Rs}{c^2+4Rs},$$
$$y = \frac{2b}{c}\sqrt{Rs}\,\cos\tfrac{1}{2}\vartheta',$$

und es ist

125) $$\Sigma \frac{1}{\frac{4b^2}{c^2}aR\sqrt{1+\frac{4Rs}{c^2}}}\int\frac{d\varphi}{y\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = C,$$

woraus zunächst

126) $$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = 0.$$

Ferner ist nach bekannten Methoden

127) $$\Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}\,d\varphi = \frac{4Ra}{c^2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\frac{4Rs}{c^2}}}.$$

Setzt man $c^2 = 4Rs$, so wird $Z^2 = \frac{1}{2}$, woraus

128) $$R = \frac{\sqrt{a^2+c^2}\mp a}{2},\qquad s = \frac{\sqrt{a^2+c^2}\pm a}{2}.$$

Demnach besteht für $y = b\cos\varphi$ die Integralfunction

129) $$\Sigma\int\frac{dx}{b^4-y^4},$$

welche, wenn y als Radiusvector einer Lemniskate $r^2 = b^2\cos 2\varphi$ aufgefasst wird, Bogen dieser Curve darstellt.

Um auf Hyperbogen zu kommen, multiplicire man in 125) den Nenner mit y und beachte 124), dann wird man

130) $$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\cos\frac{1}{2}\vartheta'^2\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = \frac{4s}{a}\sqrt{1+\frac{4Rs}{c^2}}\,\frac{1}{\sin\alpha}$$

als eine Summe von Hyperbelbogen haben.

Die geometrische Bedeutung von ϑ' geben wir § 16.

Sollen diese Bogen sich auf die vorliegende Hyperbel beziehen, so ist einzuführen

131) $$Z^2 = \frac{4Rs}{c^2+4Rs} = \frac{a^2}{c^2},$$

woraus wegen $s = R+a$

132)
$$R = \frac{-b + \sqrt{b^2 + c^2}}{2} \cdot \frac{a}{b}$$
$$y = a \cos \tfrac{1}{2}\vartheta' = a \cos \frac{\Theta}{2}.$$

Die geometrische Bedeutung von Θ werden wir gleich angeben. Demnach ist

133)
$$\Sigma \int \frac{d\frac{\Theta}{2}}{\cos\frac{\Theta}{2}^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} \sin\frac{\Theta}{2}^2}} = \frac{4cs}{ab} \frac{1}{\sin \alpha}.$$
$$\cos\frac{\Theta}{2} = \frac{y}{a}.$$

Man verbinde einen Hyperbelpunkt durch Brennstrahlen mit den Brennpunkten, und bezeichne den Winkel, welchen ein Brennstrahl mit der Verlängerung des andern einschliesst, mit Θ, dann ist

134)
$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{c^2} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta^2,$$
$$y = \frac{b^2}{c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta.$$

Der Ausdruck für den Bogen

135)
$$s = \int \frac{b^4 + c^2 y^2}{b\sqrt{(b^2 + y^2)(b^4 + c^2 y^2)}}$$

geht in Folge des obigen Wertes für y über in

136)
$$s = \frac{b^2}{c} \int \frac{d\frac{1}{2}\Theta}{\cos\frac{1}{2}\Theta^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} \sin\frac{1}{2}\Theta^2}},$$

wonach dies bekannte Integral bezüglich seiner Amplitude eine klarere Bedeutung gewinnt.

Bezeichnet man in ähnlicher Art mit Θ den Winkel zwischen zwei Brennstrahlen einer Ellipse, so ist der von der grossen Achse an gerechnete Bogen durch das Integral

137)
$$s = \frac{b^2}{c} \int \frac{d\frac{1}{2}\Theta}{\cos\frac{1}{2}\Theta^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} \sin\frac{1}{2}\Theta^2}}$$

ausgedrückt.

Wir haben diese beiden Integrale aus dem Grunde eingeführt, weil wir dieselben nachher bei einer dynamischen Betrachtung nötig haben.

Bezüglich der Ellipse erwähnen wir noch das folgende:

Wird ein Ellipsenpunkt P, dessen Coordinaten $x = a \sin\varphi$, $y = b \cos\varphi$ sind, mit einem Brennpunkt F durch den Vector r verbunden, und schliesst derselbe mit der X-Achse den Winkel ψ ein, so ist folgende Relation leicht zu beweisen:

$$138)\quad \int \sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi^2}\, d\varphi = (1 - Z) \int \frac{d\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{1 - p^2 \sin\frac{1}{2}\psi^2}} + (1 + Z) \int \sqrt{1 - p^2 \sin\frac{1}{2}\psi^2}\, d\tfrac{1}{2}\psi - Z \cos\varphi \sqrt{\frac{1 + Z\sin\varphi}{1 - Z\sin\varphi}}.$$

§ 13.

Geometrische Darstellung allgemeiner Integralfunctionen.

Von einiger Bedeutung für die Geometrie und die Theorie der biquadratischen Gleichungen werden die folgenden unter allgemeinsten Gesichtspunkten betrachteten Integralfunctionen werden, indem dieselben geometrisch und analytisch auf eine grosse Menge bemerkenswerter, durch elliptische Integrale bestimmter Probleme sich anwenden lassen.

Wir fanden bei Betrachtung von Kreis und Kegelschnitt die folgenden Functionen

$$139)\quad \begin{cases} \Sigma \displaystyle\int \frac{dx}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(x^2 - a^2)\left(x^2 + \frac{a^2}{c^2}(b^2 - (R+s)^2)\right)\left(x^2 + \frac{a^2}{c^2}(b^2 - (R-1)^2)\right)}} = C \\ \Sigma \displaystyle\int \frac{dy}{\frac{4abR}{c^2}\sqrt{(y^2 - b^2)\left(y^2 - \frac{b^2}{c^2}(a^2 - (R+s)^2)\right)\left(y^2 - \frac{b^2}{c^2}(a^2 - (R-s)^2)\right)}} = C. \end{cases}$$

Diese, sowie die uns aus ihnen durch Multiplication von $x^{-2}, x^{-1} \ldots x^4$ unter dem Integralzeichen hervorgehenden andern Functionen, sofern sie in den Rahmen dieser Abhandlung gehören, werden wir im folgenden discutiren.

Die Integrale werden wir zunächst vermittelst der Ellipsengleichung

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

woraus

$$y\,dy = -\frac{b^2}{a^2}x\,dx,$$

transformiren. Nach Einführung der gegebenen Substitutionen geht das erste Integral über in

$$\Sigma \int \frac{dx}{\frac{4b^2}{c^2}Ry\sqrt{\left(x^2 - \frac{a^2}{c^2}((R+s)^2 - b^2)\right)\left(\frac{a^2}{c^2}((R-s)^2 - b^2) - x^2\right)}} = 0$$

140) oder

$$\Sigma \int \frac{dx}{\frac{4b^2}{c^2}Ry\sqrt{\left(x^2 + \frac{a^2}{c^2}(b^2 - (R-s)^2)\right)\left(\frac{a^2}{c^2}((R+s)^2 - b^2) - x^2\right)}} = 0.$$

Um dies Integral auf die Normalform elliptischer Integrale zu bringen, führen wir eine neue Transformation ein.

Wir bezeichnen, wie bekannt, die Entfernung der Mittelpunkte von Ellipse und Kreis mit R, deren Neigung zur X-Achse mit α, und mit $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_4$ die 4 Winkel zwischen R und den Kreisradien s nach den Schnittpunkten beider Curven. Man hat also (Fig. 8.)

$$x^2 + y^2 = R^2 + s^2 - 2Rs\cos\vartheta,$$

also auch

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(2Rs\cos\vartheta + a^2 - R^2 - s^2)$$

141)

$$x^2 = \frac{a^2}{c^2}(-2Rs\cos\vartheta - b^2 + R^2 + s^2).$$

Führt man nun diese Ausdrücke in das obige Integral ein, so vereinfacht sich dasselbe ganz bedeutend, und es resultirt schliesslich folgende interessante Integralfunction allgemeinster Art:

142) $$\int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_1}{1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1^2} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_2^2}$$
$$+ \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_3}{1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_3^2} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_4}{1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_4^2} = 0$$

deren Amplituden an folgende leicht abzuleitende Gleichung

$$((R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4-2c^2s(R+s)\sin 2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3$$

143) $$+2((a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)(R^2-s^2)+2s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2$$

$$-2c^2s(R-s)\sin 2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta+(R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2=0$$

geknüpft sind.

Nach früheren Erörterungen folgt hieraus

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4)=\frac{a-c}{s-b+d}=-\operatorname{tg}2\alpha,$$

woraus

144) $$\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\tfrac{1}{2}\vartheta_2+\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\tfrac{1}{2}\vartheta_4=180^0-2\alpha.$$

Führen wir den Modulus Z vermittelst

145) $$Z^2=\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}$$

ein und bestimmen die Vorzeichen der Integrale, so ist die Relation

146) $$F(\tfrac{1}{2}\vartheta_1)=F(\tfrac{1}{2}\vartheta_2)+F(\tfrac{1}{2}\vartheta_3)+F(\tfrac{1}{2}\vartheta_4)$$
$$\operatorname{am}u_1+\operatorname{am}u_2+\operatorname{am}u_3-\operatorname{am}u_4=\pi-2\alpha$$

für den Fall gültig, dass die Gleichung 143) 3 positive $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3$ und 1 negative Wurzel ϑ_4 besitzt. (Siehe Fig. 8.)

Dagegen ist

147) $$F(\tfrac{1}{2}\vartheta_1)=F(\tfrac{1}{2}\vartheta_2)-F(\tfrac{1}{2}\vartheta_3)+F(\tfrac{1}{2}\vartheta_4)$$
$$\operatorname{am}u_1+\operatorname{am}u_2-\operatorname{am}u_3-\operatorname{am}u_4=\pi-2\alpha$$

wenn 2 positive $\vartheta_1\,\vartheta_2$ und 2 negative $\vartheta_3\,\vartheta_4$ Wurzeln existiren.

Endlich ist

148) $$F(\tfrac{1}{2}\vartheta_1)=F(\tfrac{1}{2}\vartheta_2)+F(\tfrac{1}{2}\vartheta_3)-F(\tfrac{1}{2}\vartheta_4)$$
$$\operatorname{am}u_1+\operatorname{am}u_2+\operatorname{am}u_3+\operatorname{am}u_4=\pi-2\alpha$$

wenn alle Wurzeln ϑ positiv sind.

Geometrisch sind diese Modificationen durch verschiedene Lagen des Kreises und der dadurch entstehenden Verschiebung der Schnittpunkte bezüglich der Centrale leicht zu unterscheiden. Wie man sieht, sind zwar die Vorzeichen der Integrale von diesen Lagen der Curven zu einander abhängig, aber sie folgen nicht den Wurzelvorzeichen der Amplitudengleichung, weshalb sie durch eine besondere geometrische Untersuchung erst festgestellt werden müssten.

Die Integrale 2. Art werden auf ähnliche Art gefunden. Indem wir an die Formel 17) d) erinnern, multipliciren wir 140) mit x^3 und transformiren den Ausdruck.

Das Endresultat ist

150) $$\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$
$$=\frac{2b}{c}Z\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha$$

und die Vorzeichen bestimmen sich nach den in 146) — 148) angegebenen.

Wollen wir endlich noch Integrale 3. Art in den Kreis der Betrachtung ziehen, so erinnern wir an 17) f). Demnach hat man im Nenner mit y zu multipliciren und man wird nach einigen leichten Rechnungen folgende Integralfunction finden:

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\left(1-\frac{4Rs}{b^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2\right)\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}}$$
$$=\frac{4bR}{cZ}\sqrt{4Rs(b^2-(R-s)^2)}\int\frac{d\cos\alpha}{(R^2+b^2-s^2)^2-4b^2R^2+4b^2R^2\cos^2\alpha}$$

151) d. i.

$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{(1-h\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2)\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}}$$
$$=\frac{4\sqrt{Rs}}{cZ}\,\frac{(b^2-(R-s)^2)}{\sqrt{(R^2+b^2-s^2)^2-4b^2R^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2bR\cos\alpha}{\sqrt{(R^2+b^2-s^2)^2-4b^2R^2}}.$$

Diese von jeder speciellen Annahme unabhängigen Integralfunctionen können auf verschiedene Weise geometrisch interpretirt oder analytisch transformirt werden, wodurch die Fälle mathematischer oder dynamischer Probleme, in welchen elliptische Integrale vorkommen, mit den obigen Entwickelungen in eine nähere Beziehung treten. Die wichtigeren Verhältnisse dieser Art werden wir durch mehrere Beispiele illustriren.

Der Integralfunction für die Ellipse

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}}=0,\quad Z^2=\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}$$

schliesst sich, wie ohne Weiteres erhellt, die folgende an:

152) $$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}=C,\quad Z^2=\frac{4Rs}{b^2-(R-s)^2}$$

Die Formeln für die Hyperbel sind denen der Ellipse analog:

153) $$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1+\frac{4Rs}{b^2+(R-s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}=C,$$

$$\Sigma\int\frac{4Rs}{\sqrt{1+\frac{4Rs}{(R-s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}=C.$$

Falls man für ϑ seinen Supplementwinkel ϑ' einführt, transformiren sich die Functionen in diejenigen Formen, welche wir später nötig haben.

Indem wir die Winkel, welche die Kreisradien nach den 4 Schnittpunkten des Kreises und der Ellipse mit der verlängerten Centrale OR bilden, mit $\vartheta_1{}'\vartheta_2{}'$ etc. bezeichnen, besteht die Gleichung:

154) $$((R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^4-2c^2s(R-s)\sin2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^3$$
$$+2((a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)(R^2-s^2)+2s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-a^2b^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^2$$
$$-2c^2s(R+s)\sin2\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'+((R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2)=0.$$

Die Integralfunctionen für die Ellipse sind in diesem Falle

155) $$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}=0$$

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=C.$$

Die Integralfunctionen für die Hyperbel dagegen sind

156) $$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2+b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}'^2}}=2K$$

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}}=0$$

In der obigen Amplitudengleichung muss im letztern Falle $-b^2$ statt b^2 gesetzt werden. Die Integrale 2. Art sind den soeben gegebenen 1. Art entsprechend. Wir wollen für diejenigen 3. Art noch folgende Function aufstellen:

157)
$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\left(1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2\right)\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2+b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}}=C$$

und die entsprechend zweite für dieselbe Hyperbel

158)
$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\left(1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2\right)\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}}=C$$

Ebenso hat man für die Ellipse

159)
$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\left(1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2\right)\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}}=C$$

u. s. w.

§ 14.

Die Reihenentwickelungen der elliptischen Functionen können wir auf die obigen Integrale anwenden. Wählen wir von den Formeln 146) — 148) die folgende

$$u_1-u_2+u_3-u_4=0,$$

so ist bei Benutzung von

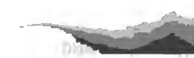
$$\operatorname{am} u=\frac{\pi}{2K}u+2\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K}+\tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K}\ldots\right)$$

zunächst

$$\tfrac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4)$$
$$=2\left(\frac{q}{1+q^2}\left(\sin\frac{\pi u_1}{K}-\sin\frac{\pi u_2}{K}+\sin\frac{\pi u_3}{K}-\sin\frac{\pi u_4}{K}\right)+\text{ etc.}\right)\qquad\text{oder}$$

$$\tfrac{1}{4}(\vartheta_1-\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4)$$
$$=\frac{2q}{1+q^2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\,\frac{u_1-u_2}{K}\cos\frac{\pi}{2}\,\frac{u_1+u_2}{K}+\sin\frac{\pi}{2}\,\frac{u_3-u_4}{K}\cos\pi\,\frac{u_3+u_4}{K}\ldots\right)$$

d. i.



$$-\frac{1}{16}(\vartheta_1-\vartheta_2+\vartheta_3-\vartheta_4)=\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1-u_2}{K}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1+u_3}{K}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_2-u_3}{K}$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi}{2}\frac{u_1-u_2}{K}\sin\frac{2\pi}{2}\frac{u_1-u_3}{K}\sin\frac{2\pi}{2}\frac{u_2-u_3}{K}\ldots$$

Verbinden wir hiermit

$$\vartheta_1+\vartheta_2-\vartheta_3-\vartheta_4=360^0-4\alpha \quad (\vartheta \text{ absolut})$$

so ist

160) $\frac{1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_3)$

$$=\frac{\pi}{2}-\alpha+4\left(\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1-u_2}{K}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_1+u_3}{K}\sin\frac{\pi}{2}\frac{u_2-u_3}{K}\ldots\right)$$

und dieser Formel schliessen sich noch mehrere verwandte an.

Wie schon früher erwähnt, können durch Einführung der Additionstheoreme die obigen Ausdrücke erweitert und in geometrischem Sinne gedeutet werden. Demgemäss bestehen die beiden Relationen

161)
$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_1+F\tfrac{1}{2}\vartheta_2=F\sigma$$
$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_3+F\tfrac{1}{2}\vartheta_4=F\sigma$$

wenn wir die Function etwa in folgender Form

$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_1+F\tfrac{1}{2}\vartheta_2=F\tfrac{1}{2}\vartheta_3+F\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$

zu Grunde legen. Die Vorzeichen sind den entsprechenden Lagen beider Curven gemäss zu bestimmen.

Alle auf die Additionstheoreme bezüglichen Formeln zwischen den Amplituden der Integrale geben auf die Ellipse oder Hyperbel bezogen eben soviele symmetrische Functionen zwischen den Wurzelwerten der Amplitudengleichung.

So erhält man

162)

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta_1\cos\frac{1}{2}\vartheta_2-\sin\frac{1}{2}\vartheta_1\sin\frac{1}{2}\vartheta_2\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1\Delta\frac{1}{2}\vartheta_2}{\cos\frac{1}{2}\vartheta_3\cos\frac{1}{2}\vartheta_4-\sin\frac{1}{2}\vartheta_3\sin\frac{1}{2}\vartheta_4\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3\Delta\frac{1}{2}\vartheta_4}=\frac{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2}{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_3{}^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_4{}^2},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta_1\cos\frac{1}{2}\vartheta_2\Delta\frac{1}{2}\vartheta_2+\sin\frac{1}{2}\vartheta_2\cos\frac{1}{2}\vartheta_1\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1}{\sin\frac{1}{2}\vartheta_3\cos\frac{1}{2}\vartheta_4\Delta\frac{1}{2}\vartheta_4+\sin\frac{1}{2}\vartheta_4\cos\frac{1}{2}\vartheta_3\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3}=\frac{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2}{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_3{}^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_4{}^2},$$

$$\frac{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1\Delta\frac{1}{2}\vartheta_2-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1\cos\frac{1}{2}\vartheta_1\sin\frac{1}{2}\vartheta_2\cos\frac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3\Delta\frac{1}{2}\vartheta_4-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_3\sin\frac{1}{2}\vartheta_3\sin\frac{1}{2}\vartheta_4\cos\frac{1}{2}\vartheta_4}=\frac{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2}{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_3{}^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_4{}^2},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_1\Delta\frac{1}{2}\vartheta_2+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_2\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_3\Delta\frac{1}{2}\vartheta_4+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_4\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_1\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_2\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1\Delta\frac{1}{2}\vartheta_2}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_3\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_4\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3\Delta\frac{1}{2}\vartheta_4}.$$

$$\Delta_1\tfrac{1}{2}\vartheta_1 \pm \Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_2 = \frac{\Delta(\sigma)\pm 1}{\sin\sigma}\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_1\pm\vartheta_2),$$

$$\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_3 \pm \Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_4 = \frac{\Delta(\sigma)\pm 1}{\sin\sigma}\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_3\pm\vartheta_4).$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen führt auf

163)
$$\frac{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1+\Delta\frac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3+\Delta\frac{1}{2}\vartheta_4}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3+\vartheta_4)}$$
$$\frac{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1-\Delta\frac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3-\Delta\frac{1}{2}\vartheta_4}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_4)},$$

welche Formeln eine geometrische Erklärung zulassen.

Führen wir nämlich die folgenden Beziehungen ein

164) $$\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta=\sqrt{1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}$$

und setzen

$$\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2=\sin\varphi^2,$$

woraus

$$\cos\varphi=\frac{cy}{b\sqrt{a^2-(R-s)^2}},$$

so geht 163) über in

165) $$\frac{y_1+y_2}{y_3+y_4}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3+\vartheta_4)},$$

welche Formel sich auf den Fall bezieht, dass die Gleichung 3 positive und 1 negative Wurzel besitzt.

Beachtet man nun, dass durch Vertauschung der Indices noch 2 andere Relationen existiren, so ist die geometrische Erklärung dieser 3 Fälle diese:

Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem 1. und 2. Kreisradius mit $2E=\vartheta_2-\vartheta_1$ und ebenso mit $2E'=\vartheta_3+\vartheta_4$ den Winkel zwischen dem 3. und 4. Radius, so ist (Fig. 8.)

$$\frac{y_1+y_2}{y_3+y_4}=\frac{\sin E}{\sin E'},$$

heissen die entsprechenden Sehnen zu $2E$ und $2E'$ ...
ferner

$$\frac{\sin E}{\sin E'}=\frac{S}{S'},$$

demnach auch

$$\frac{y_1+y_2}{y_3+y_4}=\frac{S}{S'} \quad \text{oder} \quad \frac{y_1+y_2}{S}=\frac{y_3+y_4}{S'},$$

woraus folgt, dass überhaupt die gegenüberstehenden Seiten, sowie die Diagonalen eines Kreisvierecks in einem Kegelschnitt symmetrisch gegen die Achsen stehen.

Das Additionstheorem für elliptische Integrale 2. Art ist bekanntlich

$$E(\varphi)+E(\varphi')=E(\sigma)+Z^2\sin\varphi\sin\varphi'\sin\sigma.$$

Für die Function 150) hat man zunächst

165)
$$E(\tfrac{1}{2}\vartheta_1)+E(\tfrac{1}{2}\vartheta_2)=E(\sigma)+Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\sigma,$$
$$E(\tfrac{1}{2}\vartheta_3)+E(\tfrac{1}{2}\vartheta_4)=E(\sigma)+Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4\sin\sigma,$$

also durch Subtraction, und wenn $\frac{2b}{c}Z\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha=C$ gesetzt wird,

166)
$$C=Z^2\sin\sigma(\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2-\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4),$$

und durch Vertauschung der Zeichen die beiden analogen

167)
$$C=Z^2\sin\sigma'(-\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4)$$
$$C=Z^2\sin\sigma''(-\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4+\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3),$$

worin

$$\sin\sigma=\frac{\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_2+\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_1\Delta\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1{}^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2{}^2} \quad \text{etc.}$$

Die Verbindung der letzten Formeln ergibt einige neue symmetrische Gleichungen für die 4 Wurzeln.

In ähnlicher Weise erhält man solche vermittelst der Integrale 3. Art.

§ 15.

Die folgende geometrische Darstellung der elliptischen Integralfunctionen geht von der von Jacobi gegebenen Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale 1. Art aus.

Dieselbe als bekannt voraussetzend, haben wir nach dem Vorhergehenden

168)
$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_1=F\tfrac{1}{2}\vartheta+F\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$
$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_3=F\tfrac{1}{2}\vartheta-F\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$
$$F\tfrac{1}{2}\vartheta_1=F\tfrac{1}{2}\vartheta_2+F\tfrac{1}{2}\vartheta_3+F\tfrac{1}{2}\vartheta_4.$$



Der grössere Kreis habe den Radius s, der kleinere r, die Centrale sei h, man wird dann haben (Fig. 9.)

$$\frac{s-h}{s+h} = \sqrt{1 - Z^2 \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}, \qquad \frac{r}{s+h} = \cos\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

$$r = (s+h)\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2 + (s-h)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2,$$
$$r = (s+h)\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_3\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_4 - (s-h)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$

woraus, wenn ϑ_4 negativ

$$\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_1\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_2 + \frac{s-h}{s+h}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2 = \cos\tfrac{1}{2}\vartheta_3\cos\tfrac{1}{2}\vartheta_4 + \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4\frac{s-h}{s+h}$$

Diese Formel lässt sich in die folgende überführen

169) $$s\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_1-\vartheta_2)+h\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2) = s\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_3-\vartheta_4)+h\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_3+\vartheta_4),$$

deren geometrische Richtigkeit aus der Figur leicht nachzuweisen ist.

Wir halbiren die Winkel γ_1 und γ_2 durch Gerade, welche bezüglich für das Centrum O zwei Centralen OO' und OO'' bestimmen, wovon die erste h_1, die zweite h_2 heissen möge. Von dem Schnittpunkt A derselben mit dem Kreise um O ziehen wir zum innern Kreise um O' eine Tangente t_1, ebenso eine zweite Tangente t_2 von A aus an den äussern Kreis um O_2, beide Kreise berühren bezüglich die gegenüberstehenden Seiten des Kreisvierecks und man hat zunächst für den innern Kreis

170) $$\frac{4sh_1}{(s+h_1)^2} = Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2, \quad \text{also} \quad 4sh_1 = Z^2 t_1^2.$$

Ferner ist vermöge einer Permutation von 170)

171) $$\frac{4sh_2}{(s+h_2)^2} = Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2, \quad \text{also} \quad 4sh_2 = Z^2 t_2^2.$$

mithin

$$h_1 : h_2 = t_1^2 : t_2^2.$$

Endlich kann man auch für alle 3 Permutationen der Functionen, welche sich auf die Durchschnitte der gegenüberstehenden Seiten und Diagonalen des Kreisvierecks beziehen, allgemein die nachstehende Relation aufstellen:

172) $$Z^2 = \frac{4sh_1}{(s+h_1)^2 - r_1^2} = \frac{4sh_2}{(s+h_2)^2 - r_2^2} = \frac{4sh_3}{(s+h_3)^2 - r_3^2},$$

so dass man hat

173) $$h_1 : h_2 : h_3 = t_1^2 : t_2^2 : t_3^2.$$

Der Centrale kann man beliebige Richtung geben.

Die Halbirungslinien der 3 Winkel $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ sind zu einander parallel, bezüglich senkrecht, demnach ist das Verhältniss z. B. von $\frac{t_1}{t_2}$ für alle Richtungen der Centralen ein constantes, da $\frac{h_1}{h_2}$ constant ist. Demnach resultirt in Beziehung auf 171) folgender Satz:

Ist in einem Kreisviereck der durch 2 gegenüberstehende Seiten gebildete Winkel γ_1 durch eine Gerade M, ebenso der von den andern Seiten gebildete Supplementwinkel γ_2 durch die mit M parallele N halbirt; wird ferner durch den Kreismittelpunkt eine beliebige Gerade AOB gezogen, die jene Geraden in O_1 und O_2 schneidet, und sind letztere Punkte Centra zweier die Seiten des Vierecks entsprechend berührender Kreise; bezeichnet man endlich die Centralen OO' und OO_2 mit h_1 und h_2 und die Tangenten von A nach beiden Kreisen mit t_1 und t_2: so ist das Verhältniss $\frac{h_1}{h_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$ ein constantes für alle durch O gehenden Geraden.

Allgemein ist in Beziehung auf 173) das Verhältniss der drei durch die die Winkel $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ halbirenden parallelen Geraden bestimmten Centralen $h_1 h_2 h_3$ und damit das Verhältniss $t_1 : t_2 : t_3$ der Tangenten an die Kreise für alle Fälle constant.

Wir schreiben die Gleichung in folgender Form:

$$s \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \vartheta_4) \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 + \vartheta_4)$$
$$+ h \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4) \sin \tfrac{1}{4}(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3 - \vartheta_4) = 0$$

174) d. i.

$$s \sin \tfrac{1}{2}\gamma_1 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_2 + h \sin \tfrac{1}{2}\gamma_3 \cos \alpha = 0.$$

Man kann aber folgende Relation leicht ableiten

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma_1 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_3 = \frac{R}{s} \frac{b^2}{c^2} \cos \alpha,$$

so dass in Folge von

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma_1 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma_3 = \frac{h}{s} \cos \alpha \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2$$

die Beziehung

175) $$\sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{R}{p} \frac{b^2}{c^2}$$

ganz allgemein besteht. Es ist darin $p = h \cos \alpha$.

Weil die gegenüberstehenden Seiten des Kreisvierecks gegen die Achsen gleiche Neigung haben, so müssen ihre winkelhalbirenden Geraden überhaupt zu dreien auf der X-Achse senkrecht stehen, während die übrigen derselben parallel sind. Demnach ist $h \cos \alpha = p$ die Projection von h auf die X-Achse d. i. auf die entsprechende winkelhalbirende Gerade. Damit wird die fernere Betrachtung von der Ellipse unabhängig, was auch auf anderm Wege leicht nachzuweisen ist, und wir gelangen zu folgenden neuen Resultaten.

Wir betrachten ein Kreisviereck, dessen Seiten und Diagonalen, wie oben angegeben, die Winkel $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ einschliessen (Fig. 10.). Die Geraden, welche diese Winkel (Nebenwinkel) halbiren, sind zu einander parallel, bezüglich senkrecht. Dem entsprechend ziehen wir durch den Mittelpunkt zwei auf einander senkrecht stehende Gerade, wovon die eine dreien jener Geraden, die andere den übrigen 3 parallel ist.

Nach Feststellung bestimmter Bezeichnungen der Winkel hat man nun

176)
$$\frac{p_1}{s} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma_2 \cos \frac{1}{2}\gamma_3}{\cos \frac{1}{2}\gamma_1}, \quad \frac{p_2}{s} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma_2 \sin \frac{1}{2}\gamma_3}{\sin \frac{1}{2}\gamma_1},$$
$$\frac{p_3}{s} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma_1 \cos \frac{1}{2}\gamma_3}{\cos \frac{1}{2}\gamma_2}, \quad \frac{p_4}{s} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma_1 \sin \frac{1}{2}\gamma_3}{\sin \frac{1}{2}\gamma_2},$$
$$\frac{p_5}{s} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma_1 \cos \frac{1}{2}\gamma_2}{\cos \frac{1}{2}\gamma_3}, \quad \frac{p_6}{s} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma_1 \sin \frac{1}{2}\gamma_2}{\sin \frac{1}{2}\gamma_3}.$$

Die Multiplication dieser Ausdrücke ergibt

177)
$$\frac{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6}{s^6} = \frac{1}{8} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3.$$

Die Division liefert

178)
$$\frac{p_1 p_3 p_5}{p_2 p_4 p_6} = \cot \frac{1}{2}\gamma_1 \cot \frac{1}{2}\gamma_2 \cot \frac{1}{2}\gamma_3.$$

Ferner folgt durch Multiplication zweier entsprechenden Ausdrücke

179)
$$\frac{p_1 p_3}{s^2} = \cos \frac{1}{2}\gamma_3^2, \quad \frac{p_1 p_5}{s^2} = \cos \frac{1}{2}\gamma_2^2, \quad \frac{p_3 p_5}{s^2} = \cos \frac{1}{2}\gamma_1^2,$$
$$\frac{p_2 p_4}{s^2} = \sin \frac{1}{2}\gamma_3^2, \quad \frac{p_2 p_6}{s^3} = \sin \frac{1}{2}\gamma_2^2, \quad \frac{p_4 p_6}{s^2} = \sin \frac{1}{2}\gamma_1^2,$$

Die Addition der unter einander stehenden Formeln ergibt

180)
$$p_1 p_3 + p_2 p_4 = s^2,$$
$$p_1 p_5 + p_2 p_6 = s^2,$$
$$p_3 p_5 + p_4 p_6 = s^2.$$

Wir haben also folgenden Satz:

Halbirt man in einem Kreisviereck die Winkel zwischen den gegenüberstehenden Seiten und den Diagonalen durch Gerade; zieht man ferner durch das Centrum 2 Gerade, welche beziehungsweise zu dreien der erstern parallel sind, und bezeichnet die Entfernungen der Scheitelpunktsprojectionen der 3 Winkel auf diese Geraden von C durch $p_1 p_2$, $p_3 p_4$, $p_5 p_6$, so ist die Summe der Producte entsprechender Projectionen, d. i. $p_1 p_3 + p_2 p_4 = p_1 p_5 + p_2 p_6 = p_3 p_5 + p_4 p_6$ constant gleich dem Quadrate des Halbmessers.

Man kann aus 179) Doppelverhältnisse wie z. B.

$$\frac{p_1(p_3 - p_5)}{p_3(p_5 - p_1)} = \frac{p_4(p_2 - p_6)}{p_2(p_6 - p_4)}$$

bilden, die in speciellen Fällen in harmonische übergehen.

Aus $p_1{}^2 + p_2{}^2 = R_1{}^2$ folgt unter Benutzung von 176)

181) $$\frac{R_1{}^2}{s^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_2{}^2 \sin\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_1{}^2} + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_2{}^2 \cos\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_1{}^2},$$

ferner ist

$$\frac{R_2{}^2}{s^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_1{}^2 \sin\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_2{}^2} + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_1{}^2 \cos\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_2{}^2},$$

$$\frac{R_3{}^2}{s^2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_1{}^2 \sin\frac{1}{2}\gamma_2{}^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_3{}^2} + \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_1{}^2 \cos\frac{1}{2}\gamma_2{}^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}$$

Die letztern Formeln lassen sich aus allgemeinerm Gesichtspunkt wie folgt ableiten.

Auf Seite 169 unserer Abhandlung: Trigonometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen (S. Archiv 70_{II}) haben wir folgende Gleichung aufgestellt:

182) $$\cos\gamma^3 - \frac{2R^2(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) - 2a^2b^2 + (a^2+b^2)s^2}{c^2s^2}\cos\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{4R^2}{c^4s^2}(a^4\sin\varphi^2 + b^4\cos\varphi^2) - 1\right)\cos\gamma$$
$$- \frac{2R^2(a^2+b^2)(a^2\sin\varphi^2 - b^2\cos\varphi^2) + 2a^2b^2c^2 - (a^4-b^4)s^2}{c^4s^2} = 0,$$

wofür wir schreiben

$$\cos\gamma^3 - A\cos\gamma^2 + B\cos\gamma - C = 0.$$

Hieraus lassen sich nachstehende Relationen herstellen

$$\frac{A+C}{1+B} = \frac{a^4\sin\varphi^2 - b^4\cos\varphi^2}{a^4\sin\varphi^2 + b^4\cos\varphi^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{b^4}{a^4}\cot\varphi^2 = \frac{1+B-A-C}{1+B+A+C}.$$

vermittelst dieser letzten Formel kann man aus der ersten φ eliminiren, man findet

$$\frac{1+A+B+C}{a^4}+\frac{1-A+B-C}{b^4}=\frac{8R^2}{c^4s^2}, \quad \text{d. i.}$$

$$\frac{(1+\cos\gamma_1)(1+\cos\gamma_2)(1+\cos\gamma_3)}{a^4}+\frac{(1-\cos\gamma_1)(1-\cos\gamma_2)(1-\cos\gamma_3)}{b^4}=\frac{8R^2}{c^4s^2}$$

oder

182) $$\frac{R^2}{s^2c^4}=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_1{}^2\cos\frac{1}{2}\gamma_2{}^2\cos\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}{a^4}+\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_1{}^2\sin\frac{1}{2}\gamma_2{}^2\sin\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}{b^4}.$$

Diese Formel gilt allgemein für Ellipse und Hyperbel, also auch für die Asymptoten der letztern, wenn wir beachten, dass

$$c^2=a^2+b^2, \quad \text{also}$$

$$\frac{c^4}{a^4}=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^2=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}$$

u. s. w. ist, man findet dann

183) $$\frac{R^2}{s^2}=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma_2{}^2\cos\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma_1{}^2}+\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma_2{}^2\sin\frac{1}{2}\gamma_3{}^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma_1{}^2}$$

wie oben angegeben.

Beide Formen 181) und 183) lassen eine Vergleichung zu.

Nach dieser Abschweifung kehren wir wieder zu unserm Kreise zurück. Wir wollen in den Punkten, wo die Halbirungslinien der Winkel γ_1 und γ_2 den Kreis zunächst treffen, Tangenten bis zum Durchschnitt mit den genannten senkrecht aufeinander stehenden Geraden (Projectionsachsen) ziehen und die Entfernungen der Schnittpunkte vom Centrum mit P_2 bezüglich P_3 bezeichnen, dann ist $p_4P_2=s^2$, also nach 179) $\sin\frac{1}{2}\gamma_3{}^2=\frac{p_2}{P_2}$, ferner ist $p_1P_3=s^2$, oder auch $\cos\frac{1}{2}\gamma_3{}^2=\frac{p_3}{P_3}$, mithin folgt aus

184) $$\frac{p_2}{P_2}+\frac{p_3}{P_3}=1$$

der Satz, dass der dem Centrum gegenüberliegende Eckpunkt des aus p_2 und p_3 gebildeten Rechtecks in der Geraden liegt, welche jene Schnittpunkte der Tangenten und der Achsen mit einander verbindet.

Die Verhältnisse lassen sich geometrisch noch weiter ausdehnen, wenn man die Entfernungen der Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten sowie der Diagonalen einführt. Dieselben seien x, y, z.



Dann ist

$$x^2 = (p_3 - p_5)^2 + (p_4 - p_6)^2$$

185) $$y^2 = (p_1 - p_5)^2 + (p_2 - p_6)^2$$

$$z^2 = (p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2.$$

Vermittelst 180) gehen dieselben über in

$$x^2 = R_2^2 + R_3^2 - 2s^2$$

186) $$y^2 = R_1^2 + R_3^2 - 2s^2$$

$$z^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2s^2.$$

Nimmt man Bezug auf die Formel

$$\frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}{s^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 R_3^2}{s^6} = 2.$$

so resultirt aus den letzten Gleichungen

187) $$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2s^2} = \frac{R_1^2 R_2^2 R_3^2}{s^6} - 1.$$

Für die harmonischen und polarischen Beziehungen des Kreises lassen sich aus dem Vorstehenden noch mancherlei interessante Ergebnisse erzielen.

Verbindet man nämlich die Mitte von z mit dem Centrum durch die Mittellinie t_3, so ist

$$R_1^2 + R_2^2 = 2t_3^2 + \frac{z^2}{2},$$

also auch

$$z^2 = 2t_3^2 - 2s^2 + \frac{z^2}{2},$$ oder

188) $$z^2 = 4(t_3^2 - s^2) = 4T_3^2,$$

wo T_3 die Tangente von der Mitte von z zum Kreis bezeichnet, demnach ist $z = 2T_3$ oder $T_3 = \frac{z}{2}$. Verbindet man endlich den Berührungspunkt mit den Durchschnittspunkten U und V der gegenüberstehenden Seiten durch u_3, v_3, so ist $u_3^2 + v_3^2 = 2T_3^2 + \frac{z^2}{2} = z^2$, demnach bilden $u_3 v_3 z$ ein rechtwinkliges Dreieck, was auch schon ohne Rechnung klar ist.

Für $x^2 = R_2^2 + R_3^2 - 2s^2$ folgt analog $x = 2T$, ebenso $y = 2T_2$, wo T_1 und T_2 Tangenten von den Mitten der x und y an den Kreis bedeuten, und ebenso folgt, wie vorher $u_1^2 + v_1^2 = x^2$, $u_2^2 + v_2^2 = y^2$.

Die Winkel zwischen $R_1 R_2$, $R_1 R_3$, $R_2 R_3$ seien bezüglich δ_1, δ_2, δ_3, es lässt sich leicht nachweisen, dass dann

$$R_1R_2\cos\delta_3 = s^2, \quad R_2R_3\cos\delta_1 = s^2, \quad R_3R_1\cos\delta_2 = s^2$$

ist. Demnach ist auch

189) $$x^2-y^2 = R_2{}^2 - R_3{}^2 \text{ etc.}$$

so dass also die R_1, R_2, R_3 auf x, y, z senkrecht stehen.

Wird die Projection von R_1 auf R_2 mit q_2, die von R_2 auf R_1 mit q_1 bezeichnet, so folgt aus

190) $$R_1 q_1 = s^2, \quad R_2 q_2 = s^2,$$

dass die Tangenten von U und V an den Kreis durch die Schnittpunkte von x und y mit dem Kreise gehen. Im Dreieck xyz liegen also den Seiten xyz die Winkel δ, δ_1, $180^0-\delta_3$ gegenüber.

§ 16.

Die mit Hülfe der Gleichung 143) abgeleiteten Integralfunctionen regen den Gedanken an, zu untersuchen, ob die Gleichung selbst auf ähnliche Integralfunctionen führt, wenn die Formeln des § 1. benutzt werden. Dabei haben wir aber zu beachten, dass die Coefficienten dieser Gleichung nicht wie bisher ganze, sondern gebrochene Functionen sind, die Integralconstante demnach kein vollständiges Integral mehr ist.

In Folge der bekannten Methoden erhält man

191)
$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{(R-s\cos\vartheta)\sqrt{(R^2+s^2-b^2-2Rs\cos\vartheta)(a^2-R^2-s^2+2Rs\cos\vartheta)}} = C.$$

Um auf die Normalform elliptischer Integrale zu kommen, setzen wir

$$R^2 = \frac{a^2+b^2}{4}, \quad R = s$$

und man hat

$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\vartheta^2\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2\cos\vartheta^2}},$$

und ferner

$$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta^2\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2)\cos\vartheta^2}},$$

woraus durch Addition

192) $$\Sigma\int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta^2\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2\cos\vartheta^2}}.$$

Wir führen ein

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{C}{A},\quad\text{woraus}\quad\frac{A-B}{A+B}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2,$$

ferner

$$\frac{C}{A}\sin\psi=\cos\vartheta,$$

und das Integral geht über in

193) $$\Sigma\int\frac{d\psi}{\left(1-\left(\frac{C}{A}\right)^2\sin\psi^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

und bezieht sich auf eine Ellipse mit den Halbachsen A und B.

In derselben haben ϑ und ψ folgende Bedeutung:

Schliesst die Tangente eines Ellipsenpunktes mit einem Brennstrahl den bekannten Winkel ϑ ein, so ist ψ der Winkel zwischen der Normale und der X-Achse, wie man leicht finden wird.

Demnach bezeichnet das letzte Integral nach früherm einen von dem Scheitelpunkt der grossen Achse gerechneten Ellipsenbogen S, und die Summe ΣS der hiernach bestimmten Bogen ist eine constante Grösse und zwar ein Ellipsenbogen.

Wir betrachten noch die Integralfunction 157), um dieselbe für die Hyperbel einzurichten.

Führen wir demgemäss in

$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\left(1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2\right)\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2+b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}=C$$

die Beziehungen

$$\frac{4Rs}{(R+s)^2+b^2}=\frac{c^2}{a^2},\quad\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}=1$$

ein, so hat man die Bedingungen

$$R-s=\pm a,\quad 4Rs=\frac{a^2c^2}{b^2},$$

also erhält man R aus

$$R=\left(\frac{\mp b+\sqrt{b^2+c^2}}{2}\right)\frac{a}{b}$$

und ebenso erhält man aus

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(R^2 + s^2 - a^2 + 2Rs\cos\vartheta')$$

den bekannten Ausdruck

$$y = \frac{2b}{c}\sqrt{Rs}\cos\tfrac{1}{2}\vartheta' \quad \text{(vergleiche 124)).}$$

Die Winkel $\vartheta' = \Theta$ sind demnach identisch und leicht für die Hyperbelbögen zu definiren.

In Bezug auf Ellipsenbögen können die Formeln ebenso leicht combinirt und die entsprechenden Amplituden geometrisch bestimmt werden.

Wir wollen hier noch auf eine Formel aufmerksam machen, welche eine Relation darstellt zwischen den Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 4R\frac{a^2}{c^2}\cos\alpha \, . \, x^3 + \frac{a^2}{c^2}\left(4R\frac{a^2}{c^2}\cos\alpha^2 + 4b^2\frac{R^2}{c^2}\sin\alpha^2 + 2L\right)x^2$$
$$-4R\frac{a^4}{c^4}L\cos\alpha \, . \, x + \frac{a^4}{c^4}(L^2 - 4b^2R^2\sin\alpha^2) = 0$$

und der grossen Halbaxe a.

Schreibt man dieselbe

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

und berechnet die Invarianten $A^3 - 4AB + 8C$ und $A^2D - C^2$, so erhält man durch Vergleichung beider den Ausdruck

$$194) \qquad a^2A(A^3 - 4AB + 8C) = 4(A^2D - C^2).$$

Die Theorie der biquadratischen Gleichungen zeigt, dass derselbe durch

$$a^2(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$$
$$= 4(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)(x_1x_4-x_2x_3)$$

definirt werden kann. Man hat also

$$195) \quad \frac{a}{2} =$$
$$\sqrt{\frac{(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)(x_1x_4-x_2x_3)}{(x_1+x_1+x_3+x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)}}$$

und ebenso

196) $\frac{b}{2} =$

$$\sqrt{\frac{(y_1y_2-y_3y_4)(y_1y_3-y_2y_4)(y_1y_4-y_2y_3)}{(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)}}.$$

Betrachtet man die Grössen $x_1 x_2 x_3 x_4$ und ferner $y_1 y_2 y_3 y_4$ als Seiten eines Kreisvierecks, so ist, gemäss der Gerhard'schen Formel, der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises im ersten Fall gleich der grossen Halbachse a, im zweiten Fall gleich der kleinen Halbachse b.

Für die Hyperbel gelten analoge Formeln.

§. 17.

Anwendung der Functionen auf die elastische Curve.

Einen bemerkenswerten Fall für die Anwendung der elliptischen Integralfunctionen bietet die Gleichung der elastischen Curve. Ein prismatischer Körper, ein gleichförmiger gerader elastischer Draht werde an einem Ende festgehalten und am andern Ende von einer in der Längenaxe wirkenden Kraft angegriffen. Nach der Elastitätslehre besteht dann der Ausdruck

197) $$\varrho y = A^2,$$

worin ϱ der Krümmungshalbmesser im Punkte xy der Curve bedeutet. Die Constante A) hängt von dem Biegungswiderstand und der Spannung der elastischen Feder ab.

Vermittelst der Formel für den Krümmungsradius hat man

$$y = \frac{A^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integration führt auf die Gleichung

198) $$y^2 = C^2 + \frac{2A^2}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Aus derselben erhält man ferner den Bogen

199) a $$S = 2A^2 \int \frac{dy}{\sqrt{(2A^2-C^2-y^2)(2A^2-C^2+y^2)}},$$

und endlich

199) b $$x = \int \frac{(y^2 - C^2)dy}{\sqrt{(2A^2 + C^2 - y^2)(2A^2 - C^2 + y^2)}}.$$

Führen wir in 198)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta$$

ein, so resultirt

200) $$y^2 = C^2 + 2A^2 \cos\vartheta.$$ S. d. Fig. 11., 12., 13.

Diese Integrale können wir ohne Weiteres mit den Integralfunctionen 139) in Beziehung bringen, wenn folgende Bedingungen vorausgesetzt werden

201) $$2A^2 + C^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - (R - s)^2)$$
$$2A^2 - C^2 = \frac{b^2}{c^2}((R + s)^2 - a^2).$$

Demnach folgt aus den Formeln

202) $$A^2 = \frac{b^2}{c^2} Rs,$$
$$C^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - R^2 - s^2),$$

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - R^2 - s^2) + 2\frac{b^2 Rs}{c^2}\cos\vartheta = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - R^2 - s^2 + 2Rs\cos\vartheta),$$

dass die Ellipsenordinaten mit den bezüglichen der elastischen Linie identisch sind, und dass ferner der von uns eingeführte Winkel ϑ kein anderer als der entsprechende Tangentenwinkel der genannten Curve ist. Betrachtet man demnach die beim Durchschnitt eines Kreises und einer Ellipse entstehenden Ordinaten als solche der elastischen Curve, so ist für alle Lage der beiden ersten Curven bei constantem R und s die Summe der entsprechenden Curvenbogen in der letztern, d. i.

203) $$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0,$$

sofern die obigen Bedingungen 202) erfüllt sind.

Im Anschluss hieran lässt sich ferner gemäss der Formel 199)b eine zweite Summe für die Abscissen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

bilden, die leicht zu bestimmen ist.

Wie man sieht ist

$$A^2 = \frac{b^2}{c^2} Rs$$

eine positive Grösse, dagegen kann

$$C^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - R^2 - s^2)$$

positiv, null und negativ werden, und wir bemerken dabei, dass die mannigfachen und interessanten Formen der elastischen Curve an die Bedingungen $2A^2 \gtreqless C^2$ geknüpft sind, welche in unserm Fall von Ellipse und Kreis durch die gleichwertigen $R + s \gtreqless a$ ausgedrückt werden können.

Die erste Ungleichheit $R + s > a$ führt auf symmetrisch gegen die Kraftlinie liegende Curven, während für $R + s < a$ solche auftreten, in welchen sowohl Maximal- als auch Minimalwerte der Ordinaten vorkommen und ϑ unbegrenzt wachsen kann. Die Bedingung $R + s = a$ führt auf ein logarithmisches Integral.

In analoger Weise lassen sich die Integralfunctionen der Hyperbel auf die besprochenen Verhältnisse anwenden.

In Betreff der Curve sehe man nach: Handbuch der theor. Physik von Thomson und Tait, deutsche Uebersetzung IV. S. 134, welchem auch die 3 Figuren entnommen sind.

§ 18.

Anwendung auf die Pendelbewegung.

Wie wir vorhin die statische Bedeutung der Function an der elastischen Curve dargestellt haben, wollen wir jetzt die erstern auf ein dynamisches Problem, die Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreis betreffend, anwenden.

Wie bekannt, führt die analytische Durchführung dieser Aufgabe auf ein Zeitintegral von folgender Art:

103) $$t = C \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{d\,\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{4g\varkappa \,.\, \sin\frac{1}{2}\vartheta^2}{r_0^2 + 4g\varkappa \sin\frac{1}{2}\alpha^2}}},$$

worin C eine Constante.

Die Bewegung geht in einem verticalen Kreise vom Radius s vor sich. Dieselbe beginnt im Elongationswinkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0, und t bezeichnet die Zeit, innerhalb welcher der Punkt aus der Lage α in ϑ gelangt, und es ist

$$t = \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{s d\vartheta}{\sqrt{v_0^2 + 4gs \sin\frac{1}{2}\alpha^2 - 4gs\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}}.$$

In diesem elliptischen Integral hat man die 3 Fälle

204) $$v_0^2 + 4gs \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 \lesseqgtr 4gs$$

zu unterscheiden.

Wir werden nun zeigen, dass unsere Integralfunctionen der Ellipse und Hyperbel auf die eleganteste Art sich auf dieses Zeitintegral anwenden lassen, und dass in geometrischem Sinne die daraus erfolgenden Relationen manches Bemerkenswerte zu Tage fördern.

Die Integralfunction der Elipse ist

205) $$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta^2}} = 0.$$

Indem wir beide Integralformen 203) und 205) identificiren, geht letztere Function über in die folgende

206) $$\Sigma t = 0.$$

Die Bedingungsgleichung ist dafür

207) $$\frac{4gs}{v_0^2 + 4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{4Rs}{a^2 - (R-s)^2} = Z^2.$$

Hieraus folgt zunächst, dass Z unabhängig von b ist und dass ferner

208) $$R^2 + s^2 - 2Rs\cos\alpha = a^2 - \frac{R}{g} v_0^2 \qquad \text{(Fig. 8.)}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat eine einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir sie mit ϱ^2, so ist ϱ die Entfernung des zur Amplitude α gehörigen Kreispunktes vom Ellipsenmittelpunkt. Es ist also

209) $$\varrho^2 = a^2 = \frac{R}{g} v_0^2.$$

Dreht man die Figur in verticaler Ebene so, dass die Strecke R in der Richtung der Schwere liegt, und lässt im Kreise s den Punkt volle Umläufe machen, so ist $Z < 1$ oder $R + s < a$ d. i. $\varrho < a$ und für die Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{v_0^2}{2g}$ geht 209) über in

210) $$\varrho^2 = a^2 - 2Rh$$

und 206) in

211) $$t_1 - t_2 = t_4 - t_3.$$

Der Punkt durchläuft also die Kreisbogen P_1P_2 und P_3P_4 in gleichen Zeiten.

Man hat also folgenden allgemeinen Satz:

Wenn die Geschwindigkeit eines auf einem verticalen Kreise sich bewegenden schweren Punktes an einer Stelle $= v_0$ ist, und man verbindet diesen Punkt mit einem unter dem Centrum auf dem verticalen Durchmesser liegenden Punkte 0, dessen Entfernung vom Centrum mit R bezeichnet sei, durch die Strecke ϱ, so schneiden diejenigen Ellipsen, deren Mittelpunkte in 0 fallen, und deren grosse Halbachsen von gleicher aus der Formel

$$a^2 = \varrho^2 + \frac{R}{g} v_0^2$$

bestimmbarer Länge sind, auf dem Kreise Bogen ab, von welchen 2 entsprechende von dem Punkte in gleichen Zeiten durchlaufen werden. Wie also auch diese Ellipsen in ihrer Ebene um ihren Mittelpunkt gedreht werden mögen, in allen Lagen und bei veränderlichen kleinen Halbachsen innerhalb bestimmter Grenzen sind die Zeiten, welche zum Durchlaufen dieser gegenüberstehenden Bogen erforderlich sind, stets einander gleich.

Da ferner die Geschwindigkeit des Punktes durch $v = -s\frac{d\vartheta}{dt}$, und $\frac{d\vartheta}{dt}$ durch $\frac{2}{Z}\sqrt{\frac{g}{s}}\sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta^2}$ sowie $\Delta \operatorname{am} \frac{1}{2}\vartheta = \sqrt{1 - Z^2 \sin\frac{1}{2}\vartheta^2}$ durch $\frac{y}{b\sqrt{a^2 - (R-s)^2}}$ ausgedrückt werden kann, so sind die Geschwindigkeiten des Punktes an den Schnittpunkten beider Curven in Folge der Formel $v = c\sqrt{\frac{g}{R}} \cdot \frac{y}{b}$ den entsprechenden Ellipsenordinaten proportional.

Vermittelst der bekannten obigen Relationen

$$y^2 \cdot \frac{c^2 Z^2}{4Rsb} = 1 - Z^2 \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2, \quad Z \sin\tfrac{1}{2}\vartheta = \sin\varphi$$

woraus

$$y = b\sqrt{\frac{a^2-(R-s)^2}{c^2}}\cos\varphi_1$$

geht die Integralfunction über in

$$212)\quad \Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2-(R-s)^2}{4Rs}\sin\varphi^2}} = 0,\quad R+s>a$$

und bemerken dabei beiläufig, dass für $s-R=b$ dieselbe auf schon früher behandelte zurückgeführt wird, indem $y=b\cos\varphi$ ist.

Für das letzte Integral gilt die Bedingung, dass die Geschwindigkeitshöhe des Punktes in der tiefsten Lage kleiner als $2s$ ist. Die Bewegung ist also die des gemeinen Pendels und man kann dieselbe in dem Punkte beginnen lassen, wo $v_0=0$, also $\varrho=a$ ist. Der betreffende Punkt wird also durch einen der Schnittpunkte des Kreises mit dem die Ellipse umschliessenden Kreis bestimmt.

Immerhin aber ist die Zeitdauer der Bewegung in den entsprechenden durch die Ellipsen begrenzten Kreisbogen dieselbe.

Im Falle $R+s=a$ oder $v^2+4gs\sin\frac{1}{2}\alpha^2=4gs$ ist, wird die Geschwindigkeitshöhe $=2s$, das Zeitintegral wird logarithmisch

$$213)\qquad t=\sqrt{\frac{s}{g}}\log\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\vartheta}{4}\right)$$

und der Punkt nähert sich der höchsten Stelle asymptotisch, ohne sie je zu erreichen. Auch in diesem Falle gilt noch immer das oben angegebene Gesetz der Bogen gleicher Zeitdauer.

Wie im statischen Problem der elastischen Curve, so treten also ebenfalls in dem verwandten der Pendelbewegung die unterscheidenden Merkmale in Verbindung mit den Bedingungen $R+s \gtreqless a$ auf.

Führt man in 210) $\varrho=s-R$ ein, so sind die Wurzeln der für R quadratischen Gleichung

$$R=s-h\pm\sqrt{(s-h)^2-s^2+a^2}.$$

§ 19.

Die bisher entwickelten Resultate lassen sich erweitern, wenn einige Transformationen eingeführt werden. Man wird dann finden, dass auch die übrigen Ellipsenbogen, was aus der vorigen Darstellung nicht zu ersehen war, einer Deutung fähig sind.

Wir gehen zunächst von der Hyperbel aus, kürzen aber die Betrachtungen ab.

Den Winkel ϑ ersetzen wir im Folgenden durch seinen Nebenwinkel ϑ'.

Die erste Integralfunction der Hyperbel ist

214) $$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2-a^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = 0$$

$$R-s > a \quad \text{oder} \quad s-R > a.$$

Die Formel, welche diese Function mit der Pendelbewegung verknüpft, ist

215) $$\varrho^2 - a^2 = \frac{R}{g} v^2 = 2Rh,$$

und mit dieser Bedingungsgleichung steht die folgende

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_4$$

in Verbindung, welche ausdrückt, dass die Hyperbel vom Kreise 2 Bogen gleicher Zeitdauer abschneidet. Ebenso sind, wie bei der Ellipse, die Geschwindigkeiten in den Schnittpunkten beider Curven den Ordinaten derselben proportional.

In ähnlicher Art folgt aus der zweiten Integralfunction der Hyperbel

216) $$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R-s)^2+b^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta'^2}} = 2K, \quad Z < 1$$

die Formel

217) $$\varrho^2 + b^2 = \frac{R}{g} v^2 = 2Rh,$$

und damit die Relation

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2t,$$

wo $2t$ die volle Umlaufszeit bezeichnet.

Da man letztere Formel auch so schreiben kann

$$t_1 + t_4 = 2t - (t_2 + t_3),$$

so folgt nach richtiger Deutung dieses Ausdrucks, dass für diese durch 217) bestimmte Bewegung die beiden Kreisbogen, welche durch getrennte Hyperbeläste begrenzt werden, in denselben Zeiten von dem Punkte zurückgelegt werden.

Die Geschwindigkeiten in den Schnittpunkten beider Curven sind jetzt den bezüglichen Abscissen proportional. In welche Lagen also auch die Hyperbeln bei festem Mittelpunkt gebracht werden, immer begrenzen sie Lagen gleicher Zeitdauer.

Man bemerke, dass der Modulus der ersten Function kein b, der der zweiten kein a enthält, dass ferner die vorgetragenen Sätze noch für die Annahme $a = b = 0$, also für die Asymptoten Gültigkeit haben, und dass der Modulus im letztern Falle in $Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$ übergeht. Die beiden Integralfunctionen fallen demnach in eine zusammen, und es hängt die resultirende

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1 - \frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}} = C$$

mit der Relation

$$\varrho^2 = \frac{R}{g} v^2 \text{ woraus } v = \varrho\sqrt{\frac{g}{R}}$$

zusammen.

Demnach kommen wir auf die schon früher betrachteten Integralfunctionen des Kreises zurück, welche also nur specielle Fälle sind, weil die dort durch die harmonischen Punkte des Kreises gezogenen Geraden durch Kegelschnittslinien ersetzt werden können. Eine weitere Betrachtung für diese Asymptoten ist also unnötig.

Wie wir sehen, schlossen die oben angestellten Betrachtungen für die Hyperbel ihre Asymptoten mit ein; es liegt demnach die Frage nahe, ob für die Ellipse ähnliches zu finden sei.

Wir werden im Folgenden sehen, dass zweien sich schneidenden Geraden der Hyperbel 2 parallele Geraden der Ellipse zur Seite stehen.

Wir betrachten die folgende Integralfunction der Ellipse

$$\Sigma \int \frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1 - \frac{4Rs}{(R+s)^2 - b^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}} = 0,$$

wofür

$$\varrho^2 - b^2 = \frac{R}{g} v^2 = 2Rh \qquad \text{und}$$

$$\Sigma t = 0.$$

Diese Gleichungen gelten für alle Ellipsen mit constanter kleiner Achse b und unveränderlicher grosser a, da letztere in den Formeln

nicht vorkommt. Mithin gelten sie auch noch für eine Ellipse, deren grosse Achse unendlich ist. Die Curve wird demnach zu 2 parallelen Geraden degeneriren.

Die in § 18. besprochenen Ellipsenverhältnisse finden jetzt ihre Erweiterung, indem für die vorliegende Function auch die übrigen Ellipsenbogen vermittelst der Formel

$$t_1 + t_4 = t_3 - t_2$$

ihre dynamische Bedeutung erhalten. Im Uebrigen bleiben die Erörterungen wie früher.

Die analoge Function der Ellipse

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1 - \frac{(R+s)^2 - a^2}{4Rs} \sin \frac{1}{2}\vartheta'^2}}$$

führt auf entsprechende Verhältnisse.

Hier interessirt uns besonders das Folgende:

Der Modulus der Function 216) enthält b, lässt man diese Grösse in Null übergehen, so gehen, $a = \infty$ vorausgesetzt, die Fnnctionen und die betreffenden Zeiten in den Fall der Integralfunction des Kreises über, da ja $Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$ wird. Von den speciellen Fällen ist also der für die unendlich lange Ellipse der allgemeinere. Dabei haben wir 2 Fälle zu unterscheiden. Da der Mittelpunkt dieser lang gestreckten Ellipsen in einen beliebigen Punkt der grossen Achse gelegt werden kann, so wird $s - R$ entweder grösser oder kleiner als b sein. Im ersten Fall umschliesst der Kreis vom Radius s den von b, und es ist die Formel

$$t_1 + t_4 = t_3 - t_2$$

hierfür die entsprechende (Fig. 14.). Demnach werden die durch die parallelen Geraden getrennten äussern Kreisbogen in denselben Zeiten beschrieben. Für $b = 0$ fallen die Geraden und damit unsere Betrachtungen mit den über die Integralfunctionen des Kreises angestellten zusammen. (Innerer harmonischer Punkt.)

Im zweiten Fall $R - s > b$ liegen die genannten Kreise auseinander, und die letzte Formel geht über in

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2t.$$

Wird auch hier $b = 0$, so ist $t_1 = t_2$, und $t_3 = t_4$, und es ist

$$t_1 + t_2 = t.$$

Der Ellipsenmittelpunkt wird dann zum äussern harmonischen Punkt für die Integralfunction des Kreises.

Die Formel für die betrachteten beiden Fälle ist

$$\varrho^2 - b^2 = 2hR = p^2,$$

in welcher p als Potenz aufgefasst werden kann; sie lässt noch eine einfache geometrische Construction zu. Für $\varrho = R + s$ erhält man aus $(R+s)^2 - b^2 = 2hR$ die beiden Strecken

$$R = h - s \pm \sqrt{(h-s)^2 - s^2 + b^2}.$$

Für bestimmte Geschwindigkeitshöhen h in einem Kreise von bekanntem Radius s und für constante Halbachsen b einer Ellipse von beliebiger grosser Achse a bestehen demnach zwei Ausdrücke für die Centrale R beider Curven, welchen 2 Zeitrelationen entsprechen. Schreiben wir dafür die Integralfunctionen

$$\Sigma \int \frac{d\,\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta'^2}} = 0, \quad \Sigma \int \frac{d\,\tfrac{1}{2}\vartheta'}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta'^2}} = 2K,$$

$$Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2 - b^2}.$$

so bemerkt man sofort, dass die obige Ableitung mit der bekannten Jacobi'schen Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale in Verbindung steht. Dabei ist es wichtig zu bemerken, dass statt der beiden durch den Abstand $2b$ bestimmten Parallelen die Ellipse eingeführt werden kann. Dreht man also diese Ellipse in ihrer Ebene so, dass ein ϑ, etwa ϑ_1, verschwindet, so erhält man für den innern Kreis

$$\int \frac{d\,\tfrac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_3'}} = \int \frac{d\,\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_2'^2}} + \int \frac{d\,\tfrac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_4'^2}},$$

für den äusseren

$$\int \frac{d\,\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_2'^2}} + \int \frac{d\,\tfrac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_3'^2}}$$
$$+ \int \frac{d\,\tfrac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_4'^2}} = 2K.$$

Das Absolutglied der Gleichung 154) wird demnach 0, oder es ist

$$(R+s)^2 \left(\sin \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2} \cos \alpha^2\right) = b^2$$

welche Formel für $a = \infty$ in die bekannte Relation

$$(R+s)\cos(90^0-\alpha)=b$$

übergeht und die genannte Gleichung wird zu

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^3+\left(1-\frac{s}{R}\right)\cot\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'^2+\left(1+\frac{s}{R}-\frac{s}{R}\cot\alpha^2\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta'$$
$$+\left(1+\frac{s}{R}\right)\cot\alpha=0$$ woraus

$$\Sigma\tfrac{1}{2}\vartheta=\Sigma\,\mathrm{am}\,u=2a$$

und noch andere Formeln sich ergeben.

Wir gehen jetzt über zu dem Additionstheorem der elliptischen Integrale 2. Art.

In § 13. haben wir eine Function dieser Art aufgestellt, welche noch für den jetzigen Fall einer kleinen Transformation bedarf. Man findet nach Ausführung der Rechnungen

218) $$\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3{}^3}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\int\sqrt{1-Z^2\sin d\tfrac{1}{2}\vartheta_4}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$
$$=\frac{2a}{c}Z\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha$$

$$Z^2=\frac{4Rs}{(R+s)^2-b^2}$$

Diese allgemeine Formel vereinfacht sich, wenn $\vartheta_1=0$ gesetzt wird. Wie vorhin, kann man anstatt der Ellipse wieder jene Parallelen substituiren, und die nun bestehende Function

$$\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_3=\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta'^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_4-2+\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha$$

bezieht sich auf das Additionstheorem der 2. Art.

Dies Resultat lässt sich vermittelst der Amplitudengleichung und des Additionstheorems für die Integrale 2. Art bewahrheiten.

Das letztere ist in unserer Bezeichnung

$$E\tfrac{1}{2}\vartheta_3=E\tfrac{1}{2}\vartheta_2+E\tfrac{1}{2}\vartheta_4-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4.$$

Aus der genannten Gleichung lässt sich leicht das Product $\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4=\frac{b}{s}\cos\alpha$ berechnen, und es ist

$$Z^2 \frac{b}{s} \cos \alpha = 2Z \sqrt{\frac{R}{s}} \sin \alpha.$$

Demnach ist

$$E \tfrac{1}{2}\vartheta_3 = E \tfrac{1}{2}\vartheta_2 + E \tfrac{1}{2}\vartheta_4 - \frac{4R}{R+s} \operatorname{tg} \alpha$$

Zu der genannten geometrischen Construction lassen sich die Winkel $\alpha = 90^0 - \frac{\vartheta_4}{2}$, ϑ_2 und ϑ_3 leicht feststellen.

§ 20.

Eine Anwendung der vorhin entwickelten Formeln auf den Kreis erhält man dadurch, dass der Modulus der elliptischen Integrale gleich 1 gesetzt wird, wodurch aus den elliptischen Beziehungen cyklometrische werden.

Lassen wir also in der Integralfunction 1. Art

$$\int \frac{d \tfrac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_1{}^2}} + \int \frac{d \tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1 - Z_2{}^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_2{}^2}} - \int \frac{d \tfrac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_3{}^2}} + \int \frac{d \tfrac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1 - Z^2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_4{}^2}} = 0$$

welche vermöge des von der Halbachse a unabhängigen Modulus

$$Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2 - b^2}$$

sowohl für jede Ellipse mit beliebiger Achse a als auch für 2 Parallele im Grenzfall $a = \infty$ gültig ist, Z in 1 übergehen, so wird $b = R - s$ oder $b = s - R$. Im ersten Fall berühren sich die beiden Kreise, deren Radien bezüglich s und b sind, von aussen, im zweiten von innen.

Betrachten wir den zweiten Fall zunächst, so geht die obige Formel über in

$$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\vartheta_1}{4}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\vartheta_2}{4}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\vartheta_3}{4}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\vartheta_4}{4}\right) = 1,$$

welche einfacher wird, wenn für ϑ sein Supplement eingeführt wird.

Die Integralfunction der 2. Art gibt für $Z = 1$

$$\sin \tfrac{1}{2}\vartheta_1 + \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_2 - \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_3 + \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_4 = 2 \sqrt{\frac{R}{s}} \sin \alpha,$$

woran man folgende Betrachtung knüpfen kann. (Fig. 14.)

Man multiplicire die Formel mit $2s$ und beachte, dass $2s\sin\frac{1}{2}\vartheta$ die Sehne bezeichnet, welche einen Schnittpunkt des Kreises und der Geraden mit dem Kreispunkt verbindet, welcher auf der verlängerten Centrale OR liegt.

Also ist für die innere Berührung

$$s_1 + s_2 - s_3 + s_4 = 4\sqrt{Rs}\sin\alpha,$$

für die äussere

$$s_1 + s_2 + s_3 - s_4 = 4\sqrt{R's}\sin\alpha'.$$

Zweiter Teil.

§. 21.

Analytische Darstellung elliptischer Integralfunctionen 1. und 2. Art.

In den bisher entwickelten Integralfunctionen waren die Amplituden der elliptischen Integrale durch die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung definirt, und die Moduli ergeben sich aus den Parametern derselben. Ihre Bestimmung aber war gewissen Beschränkungen unterworfen, infolge dessen die Theorie einer Ergänzung bedarf. Demnach wäre die Frage zu beantworten, ob es möglich sei, aus den Constanten der Gleichung

1) $$\operatorname{tg}\varphi^4 - A\operatorname{tg}\varphi^3 + B\operatorname{tg}\varphi^2 - C\operatorname{tg}\varphi + D = 0$$

den Modulus Z der Integralfunction

2) $$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1{}^2}} + \int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^2}} + \int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3{}^2}} + \int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4{}^2}} = C,$$

deren Amplituden Wurzeln der obigen Gleichung sind, zu bestimmen, und es wäre ferner nachzusehen, ob noch andere solcher Functionen existirten.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Gleichung 1), welche wir im Anschluss an 143) so schreiben

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4 - A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3 + B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 - C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta + D = 0$$

und ihre Integralfunction 1. Art

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}}} = 0.$$

Die obigen Constanten der Gleichung haben nun folgende Bedeutung

$$A = \frac{2c^2 s(R+s)\sin 2\alpha}{(R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}$$

$$B = 2\frac{(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)(R^2-s^2)+2s^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2)-a^2b^2}{(R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}$$

3)

$$C = \frac{2c^2 s(a-s)\sin 2\alpha}{(R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}$$

$$D = \frac{(R-s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}{(R+s)^2(a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2)-a^2b^2}$$

Die Aufgabe bestünde nun darin, die Grössen a, b, R, s, $\sin\alpha$ vermittelst $ABCD$ auszudrücken und daraus den Modulus

4) $$Z^2 = \frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}$$

herzustellen.

Der Vergleich von A und C ergibt sofort die Relation

$$\frac{A}{C} = \frac{R+s}{R-s} \quad . \qquad \text{woraus}$$

$$\frac{R}{s} = \frac{A+C}{A-C}$$

und eingesetzt in 4) ergibt sich

5) $$Z^2 = \frac{4(A^2-C^2)}{\frac{a^2}{s^2}(A-C)^2-4C^2}.$$

Die eigentliche Untersuchung beruht also lediglich auf der Ermittelung des Verhältnisses $\frac{a}{s}$, das allerdings noch einiger Zwischenrechnung bedarf.

Aus der Formel für D erhält man

$$a^2\sin\alpha^2+b^2\cos\alpha^2 = b^2.\frac{a^2}{s^2}\frac{(A-C)^2(D-1)}{4(A^2D-C^2)} = b\frac{a^2}{s^2}P, \qquad \text{wo}$$

$$P = \frac{(A-C)^2(D-1)}{4(A^2D-C^2)}$$

Hieraus folgt

$$\sin\alpha^2 = \frac{b^2}{c^2}\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right),$$

oder auch

$$a^2+b^2-c^2\cos 2\alpha = 2\frac{a^2b^2}{s^2}P,$$

$$2+\frac{c^2}{b^2}-\frac{c^2}{b^2}\cos^2\alpha = 2P\cdot\frac{a_1^2}{s^2}.$$

Aus der Formel A) folgt ferner

$$\frac{a^2}{s^2}\frac{b^2}{c^2} = \frac{4\sin 2\alpha}{\left(\frac{4A^2P}{(A-C)^2}-1\right)(A-C)} = \frac{\sin 2\alpha}{Q}$$ wo

$$Q = -\frac{(A-C)^2(A+C)}{4(A^2D-C^2)},$$

Die Elimination von $\sin 2\alpha$ in den letzten Formeln ergibt

$$\left(2+\frac{c^2}{b^2}-2P\frac{a^2}{s^2}\right)^2 = \frac{c^4}{b^4}-Q^2\cdot\frac{a^4}{s^4},$$ woraus

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{\left(1-P\frac{a^2}{s^2}\right)^2+\frac{Q^2}{4}\frac{a^4}{s^4}}{P\frac{a^2}{s^2}-1}.$$

Beachten wir nun, dass die Formel für B) übergeht in

$$\frac{B}{2} = \frac{P\left(\frac{R^2}{s^2}-3\right)+2\frac{\left(\frac{c^2}{b^2}+2\right)}{\frac{a^2}{s^2}}}{\left(\frac{R}{s}-1\right)^2P-1}-1$$

so folgt bei Einführung von

$$M = \frac{B}{2}\left(\left(\frac{R}{s}+1\right)^2P-1\right)-P\left(\frac{R^2}{s^2}-3\right)+1$$

die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{a^2}{s^2}\right)^2(4P^2-2PM+Q^2)+2M\left(\frac{a^2}{s^2}\right)-4=0,$$

deren Wurzeln

$$\frac{a^2}{s^2}(4P^2-2PM+Q^2 = -M\pm\sqrt{(M-4P)^2+4Q^2}$$

sind.



Der Ausdruck $M-4P$ kann aber durch

$$\frac{(A^2-C^2)(1-B+D)}{2(A^2D-C^2)}$$

ersetzt werden, und das vorläufige Schlussresultat ist demnach

$$\frac{a^2}{s^2}\frac{(A-C)^2}{4(A^2D-C^2)}\times$$

$$(-(D-1)^2(A-C)^2-(D-1)(1-B+D)(A^2-C^2)+\tfrac{1}{4}(A^2-C^2)^2)$$

$$=\pm\frac{(A^2-C^2)}{2(A^2D-C^2)}\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}$$

$$-\frac{(1-B+D)(A^2-C^2)+2(D-1)(A-C)^2}{2(A^2D-C^2)}.$$

Da hiernach $\frac{a}{s}$ bekannt ist, so ergibt die Substitution desselben in 5) den Modulus

$$6)\quad Z^2=\frac{2(A^2-C^2)}{(A^2D-C^2)\pm\{(A+C)\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}$$

$$\frac{+(1-B+D)(A+C)+2(D-1)(A-C)\}}{(D-1)(2(AD+C)-B(A+C))-\frac{(A+C)^2(A-C)}{4}}-2C^2$$

welchen Ausdruck wir transformiren in

$$7)\quad Z^2=\frac{1}{\{(A^2D-C^2)(\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}+3-B-D)}$$

$$\frac{+2A(AB-2C)(D-1)+\frac{A^2}{2}(A^2-C^2)\}}{2(A-C)\left((D-1)(2(AD+C)-B(A+C))-\frac{(A+C)^2(A-C)}{4}\right)}+1.$$

Da für Z zwei Werte bestehen, so existiren demnach für jede biquadratische Gleichung 2 Integralfunctionen, wie dies ja schon früher geometrisch für Ellipse und Hyperbel nachgewiesen ist.

Der etwas complicirte Bau der letzten Formel lässt eine vereinfachte Form wünschen, um dieselbe für gegebene Fälle in brauchbarer Gestalt benutzen zu können.

In der Formel $\sin\alpha^2$ ersetzen wir $\frac{b^2}{c^2}$ durch den oben gefundenen Wert, man wird dann haben



$$\cos\alpha^2 = \frac{\frac{Q^2}{4}\frac{a^4}{s^4}}{\left(1-P\frac{a^2}{s^2}\right)^2+\frac{Q^2}{4}\frac{a^2}{s^4}},$$ woraus

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)}{Q\frac{a^2}{s^2}}.$$

Ferner findet man

$$\frac{b}{c}\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}Q\frac{a^2}{s^2}\sqrt{\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)}}{\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)^2+\frac{1}{4}Q^2\frac{a^4}{s^4}}.$$

Ebenso folgt aus

$$\sin 2\alpha = \frac{b^2}{c^2}Q\frac{a^2}{s^2},\quad \cos 2\alpha = \frac{b^2}{c^2}\left(\frac{c^2}{b^2}-2\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)\right)$$

die Formel

$$\cot 2\alpha = \frac{\frac{c^2}{b^2}-2\left(P\frac{a^2}{s^2}-1\right)}{Q\frac{a^2}{s^2}}$$

Führt man nun in

$$\operatorname{tg}\alpha = -\cot 2\alpha + \sqrt{1+\cot 2\alpha^2}$$

den obigen Ausdruck für $\cot 2\alpha$ ein, so erhält man schliesslich die reducirte Formel

$$8)\quad Z^2 = \frac{D-1+\frac{1}{2}\frac{A+C}{A-C}\left(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}\right)}{D-\frac{C^2}{2(A-C)^2}\left(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}\right)}$$

Die eleganteste Formel dagegen gewinnen wir bei Benutzung der goniometrischen Function

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Die hieraus hervorgehende Relation für $Z'^2 = 1 - Z^2$ ist

$$9)\quad Z'^2 = \frac{A^2+2(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}.$$

Wir erhalten also folgenden allgemeinen Satz:



Mit jeder biquadratischen Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi^4 - A\operatorname{tg}\varphi^3 + B\operatorname{tg}\varphi^2 - C\operatorname{tg}\varphi + D = 0$$

sind zwei Integralfunctionen 1. Art

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}}+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}}+\int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}}$$
$$+\int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}}=C$$

verknüpft, deren Amplituden Wurzeln der Gleichung und deren Moduli durch die Formel 9) bestimmt sind. Die Constante C ist entweder $= 2K$ oder Null.

Vermöge dieser Darstellung kann man jede Gleichung von dem geometrischem Charakter der obigen in Beziehung bringen mit elliptischen Integralen, wodurch, wenn letztere wieder geometrisch oder dynamisch interpretirt werden, bemerkenswerte Relationen zwischen beiden hervorgehen.

In diesem Sinne werden wir unter andern die gegebenen Entwickelungen benutzen.

Setzt man

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi^2}}=u,\quad \varphi=\operatorname{am}u$$

und beachtet die Formel

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)=\frac{A-C}{1-B+D}$$

so gewinnt man noch die Amplitudenfunction

10) $$\operatorname{am}u_1+\operatorname{am}u_2+\operatorname{am}u_3+\operatorname{am}u_4=\operatorname{arctg}\frac{A-C}{1-B+D}$$

Wir geben jetzt die Integralfunctionen für elliptische Integrale der 2. Art und haben demnach die Constante der Function

$$\Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta}=2\frac{b}{c}Z\sqrt{\frac{R}{\varkappa}}\cos\alpha+2E$$

zu transformiren.

Man findet:

$$\frac{c^2}{b^3}=\frac{(A+C)}{(A-C)}\frac{1}{Z^2}\frac{(A-C)^2+(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})^2}{(C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

$$\frac{a^2}{s^2}=4\frac{A^2-C^2Z'^2}{Z^2(A-C)^2},$$

$$Q\frac{a^2}{s^2}=-\frac{(A+C)(A^2-C^2Z'^2)}{Z^2(A^2D-C^2)},$$

$$P\frac{a^2}{s^2}=\frac{(A^2-C^2Z'^2)(D-1)}{Z^2(A^2D-C^2)},$$

$$P\frac{a^2}{s^2}-1=\frac{(A^2-C^2)(Z'^2D-1)}{Z^2(A^2D-C^2)},$$

$$Z'^2D-1=\frac{A^2D-C^2}{C^2+2D(1+B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}},$$

$$A^2-C^2Z'^2=\frac{2(A^2D-C^2)(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D))^2}}.$$

Die obige Integralconstante ist also

$$2Z\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha=Z^2\frac{\frac{(A^2-C^2Z'^2)}{DZ'^2-1}\sqrt{\frac{A^2D-C^2}{DZ'^2-1}}}{(A-C)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{A^2-C^2Z'^2}{DZ'^2-1}\right)^2}$$

$$=Z^2\sqrt{\frac{A^2D-C^2}{(Z'^2D-1)((A-C)^2+(1-B+D)^2)}},$$

$$=Z^2\sqrt{\frac{C^2+2D(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}.$$

Also haben wir folgenden Satz:

Liegt vor die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi^4-A\operatorname{tg}\varphi^3+B\operatorname{tg}\varphi^2-C\operatorname{tg}\varphi+D=0,$$

so besteht mit ihr die Integralfunction 2. Art

$$10)\quad \int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1{}^2}d\varphi+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^2}d\varphi_2+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3{}^2}d\varphi_3$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4{}^2}d\varphi_4$$
$$=2E+Z^2\sqrt{\frac{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}{(A-C)^2+(1-B+D)^2}},$$

worin Z vermittelst 9) bekannt und E das vollständige elliptische Integral 2. Art ist. In geometrischen Anwendungen gaben diese

Integralfunctionen neue Sätze über diejenigen Verhältnisse, welche die Rectification der Ellipse berühren, wie wir dies gleich nachweisen werden.

Wir führen hier noch an, dass die obigen Ableitungen sich sehr vereinfachen, wenn für die biquadratischen Gleichungen die Reducente $A^2D - C^2 = 0$ besteht. Es ist dann $Z^2 = 1 - \frac{A^2}{C^2}$ oder $Z' = \frac{A}{C}$.

Die Bedingung wird für die Wurzeln durch

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_4 = \sqrt{D} = \frac{1}{\sqrt{Z'}}$$

ausgedrückt und das Additionstheorem gibt

$$E\varphi_1 + E\varphi_2 = E + Z^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$
$$E\varphi_3 + E\varphi_4 = E + Z^2 \sin\varphi_3 \sin\varphi_4,$$

also ist auch

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_4$$
$$= \sqrt{\frac{C^2 + 2D(1 - B + D + \sqrt{(A-C)^2 + (1-B+D)^2})}{(A-C)^2 + (1-B+D)^2}}$$

u. s w.

Für die Integralfunctionen 3. Art sind bezüglich der Gleichung 151) leicht analoge Formeln aufzustellen, und man findet, wenn speciell $R + s = b$ gesetzt wird für die entsprechende Integralfunction

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2 \sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi^2}} = C,$$

die Bedingung

$$\frac{2(A-C)^2}{A^2} = 1 - B + D + \sqrt{(A-C)^2 + (1-B+D)^2}$$

Wie wir schon früher nachgewiesen, existiren zugleich mit den abgeleiteten Integralfunctionen zahlreiche Formeln symmetrischen Charakters zwischen den Wurzeln der Gleichungen, unter welchen manche, wie

$$\frac{\Delta\varphi_1 \pm \Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_3 \pm \Delta\varphi_4} = \frac{\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 \pm \varphi_4)} \text{ etc.}$$

eine geometrische Erklärung zulassen.

Eine Erweiterung der Functionen lässt sich noch auf folgendem Wege anbahnen.

Mit der in § 1. gegebenen Gleichung



$$\left(\frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}\right)^4 + \frac{B}{D}\left(\frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}\right)^2 - \frac{A}{D}\left(\frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}\right) + \frac{1}{D} = 0$$

ist die daraus leicht abzuleitende kubische Resolvente

$$Z^3 + 8\frac{B}{D}Z^2 + 16\frac{(B^2 - 4D)}{D}Z - 64\frac{A^2}{D_2} = 0$$

verknüpft. Ihre Wurzeln stehen mit denen der Hauptgleichung in folgendem Zusammenhang

$$\frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_4}} = 0,$$

$$\frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}} + \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{d x_2}} - \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_3}} - \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_4}} = \sqrt{Z_1}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}} - \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}} + \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_3}} - \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_4}} = \sqrt{Z_3}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}} - \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}} - \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_3}} + \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial x_4}} = \sqrt{Z_3}.$$

Mit der ersten treten demnach in Folge von $\frac{\partial \Delta}{\partial x}\partial x + \frac{\partial \Delta}{\partial y}dy = 0$ noch 3 andere Functionen

$$\Sigma\int\frac{dx}{f(x)} = \int z_1\,dy,\quad \Sigma\int\frac{dx}{f(x)} = \int z_2\,dy,\quad \Sigma\int\frac{dx}{f(x)} = \int z_3 dy$$

auf. Gelingt es nun, z als Function von y zu bestimmen, so würde die noch zu erfolgende Integration dieser und der übrigen Ordnungen die allgemeine Auflösung des Problems zur Folge haben.

§ 22.

Wir geben hier eine Zusammenstellung der wichtigeren Resultate:

Liegt die Gleichung

11) $$\operatorname{tg}\varphi^4 - A\operatorname{tg}\varphi^3 + B\operatorname{tg}\varphi^2 - C\operatorname{tg}\varphi + D = 0$$

vor, so hat man

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}}+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}}+\int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}}$$

12)
$$+\int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}},$$

$$Z'^2=\frac{A^2+2(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

Ferner ist mit der Gleichung

$$\cot\varphi^4-A\cot\varphi^3+B\cot\varphi^2-B\cot\varphi+D=0$$

die Function

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_1^2}}+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_2^2}}+\int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_3^2}}$$

$$+\int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_4^2}}=C$$

verknüpft, und es ist

13)
$$\lambda'^2=\frac{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{A^2+2(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

Aus den Moduli folgen die Relationen

$$Z'^2\lambda'^2=1,$$

$$\lambda^2=1-\frac{1}{Z'^2}=\frac{Z^2}{Z^2-1}$$

Für die kubische Gleichung

14)
$$\operatorname{tg}\varphi^3-A\operatorname{tg}\varphi^2+B\operatorname{tg}\varphi-C=0$$

gelten die Formeln

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}}+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}}+\int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}}=2K,$$

15)
$$Z'^2=\frac{A^2+2(1-B\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B)^2})}{C^2}.$$

Bemerkung. Wird in 14) $A=0$ gesetzt, so besteht für die reducirte Gleichung $\operatorname{tg}\varphi^3-B\operatorname{tg}\varphi-C=0$ bei Benutzung von $\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{C}{1+B}$ der Ausdruck $Z'^2=\frac{2}{C}\cot\frac{1}{2}\varepsilon$.

Ferner ist



$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin\varphi_3^2}} = K$$

16) $$\lambda'^2 = \frac{1}{B^2 + 2C(C-A) \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2}}.$$

Legen wir endlich die Gleichung

$$\cot\varphi^3 - A\cot\varphi^2 + B\cot\varphi - C = 0$$

zu Grunde, so gilt zunächst die Function

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\mu^2 \sin\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\mu^2 \sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\mu^2 \sin\varphi_3^2}} = 2K$$

17) $$\mu'^2 = B^2 + 2C(C - A \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2})$$

und noch

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\nu^2 \sin\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\nu^2 \sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\nu^2 \sin\varphi_3^2}} = K$$

18) $$\nu'^2 = \frac{C^2}{A^2 + 2(1 - B \pm \sqrt{(A-C)^2 + 1 - B)^2})}.$$

Man kann in den obigen Gleichungen $\operatorname{tg}\varphi = k \operatorname{tg}\psi$ setzen und in den Ausdrücken für Z^2 etc. für geeignete Werte von k die Moduli vereinfachen. Auf Gleichungen 2. Grades kommen wir nachher bei Betrachtung der Schliessungscurven zurück.

Man bemerke noch, dass die Aufgabe, für 4 gegebene Amplituden φ den Modulus derart zu bestimmen, dass die Integralfunction 12) hierfür erfüllt ist, durch das Vorstehende ihre Lösung gefunden hat.

§ 23.

Die gegebene Ableitung des Wertes für den Modulus Z aus den Constanten der Gleichungen können wir noch in anderer Hinsicht verwerten und damit die Bedeutung der Functionen erweitern. Wie das Beispiel der Kegelschnitte zeigt, steht mit den Amplituden $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ die vierte φ_4 durch die Function

$$F_1 + F_2 + F_3 = F_4$$

in Verbindung.

Man kann nun diese Function allgemeiner fassen und alle Werte von φ_4 zu bestimmen suchen, welche den folgenden Relationen entsprechen:



$$F_1 + F_2 + F_3 = F\psi,$$
$$F_1 + F_2 - F_3 = F\psi_2,$$
$$F_1 - F_2 + F_3 = F\psi_3,$$
$$-F_1 + F_2 + F_3 = F\psi_4.$$

Die Aufgabe würde sich also zu einem Additionstheorem gestalten mit der Forderung, zu drei gegebenen Amplituden φ der elliptischen Integrale 1. Art die ψ Amplituden ihrer algebraischen Summe anzugeben.

Die Constanten in der Formel

$$Z'^2 = \frac{A^2 + 2(1 - B + D + \sqrt{(A-C)^2 + (1 - B + D)^2})}{C^2 + 2D(1 - B + D + \sqrt{(A-C)^2 + (1 - B + D)^2})}.$$

haben die folgende Bedeutung, wenn $\operatorname{tg}\varphi_4 = \operatorname{tg}\psi = Z$ gesetzt wird,

$$A = \operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 + Z,$$
$$B = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_1 + Z(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3),$$
$$C = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 + Z(\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_1),$$
$$D = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 Z.$$

Da $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ bekannt sind, so schreiben wir

$$\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 = a,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_3 \operatorname{tg}\varphi_1 = b,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3 = c$$

und daher ist

$$A = a + z,$$
$$B = b + az,$$
$$C = c + bz,$$
$$D = cz.$$

Substituiren wir diese Werte in Z'^2 und schaffen durch Quadriren die auftretenden Wurzeln fort, so resultirt nach einigen Entwickelungen die folgende für ψ biquadratische Bedingungsgleichung

$$19)\quad \mathrm{tg}\psi^4((\tfrac{1}{2}(1-b^2Z'^2)+(a-c)(cZ'^2)^2-Z'^4c^2((a-c)^2(1-b)^2))$$
$$+\mathrm{tg}\psi^3\times$$
$$\left(\begin{array}{l}(a-bcZ'^2)(1-b^2Z'^2)-2(a-c)(1-b)Z'^4\gamma^2+2(1-b)^2Z'^2\gamma\\-(1-\beta)(1-\beta^2Z'^2)Z'^2\gamma+2(a-c)Z'^2\gamma(a-bcZ'^2)-(a-c)(1-b^2Z'^2)\end{array}\right)$$
$$+\mathrm{tg}\psi^2\times$$
$$\left(\begin{array}{l}(a-bcZ'^2)^2+\tfrac{1}{2}(a^2-c^2Z'^2)(1-b^2Z'^2)-(a-c)^2Z'^4\gamma^2-(1-b)^2\\+4(a-c)(1-b)Z'^2c-2(1-b)Z'^2c(a-bcZ'^2)+(1-b)(1-b^2Z'^2)\\+(a-c)Z'^2c(a^2-Z^{2\prime}c^2)-2(a-c)(a-bcZ'^2)\end{array}\right)$$
$$+\mathrm{tg}\psi\times$$
$$\left(\begin{array}{l}(a-bcZ'^2)(a^2-c^2Z'^2)+2(a-c)^2Z'^2c-2(a-c)(1-b)\\-(1-b)Z'^2c(a^2-Z'^2c^2)+2(1-b)(a-bcZ'^2)-(a-c)(a^2-c^2Z'^2)\end{array}\right)$$
$$+(\tfrac{1}{2}(a^2-c^2Z'^2)+1-\beta)^2-((a-c)^2+(1-b)^2)=0.$$

Um diese Formel auf das bekannte Additionstheorem 1. Art mit 2 Amplituden anzuwenden, haben wir $\varphi_3=0$, also $c=0$ zu setzen und die Gleichung 19) wird zu

$$\mathrm{tg}\psi^4(1-b^2Z'^2)^2-2\mathrm{tg}\psi^2(a^2(1+b^2Z'^2)-2b(1-b)(1-bZ'^2))+a^2(a^2-4b)=0,$$

worin

$$a=\mathrm{tg}\,\varphi_1+\mathrm{tg}\,\varphi_2,\quad b=\mathrm{tg}\,\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2.$$

Aus dieser Gleichung oder

$$\mathrm{tg}\,\psi^4(1-Z'^2\mathrm{tg}\varphi_1{}^2\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)^2-2\mathrm{tg}\psi^2((\mathrm{tg}\varphi_1{}^2+\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)(1+Z'^2\mathrm{tg}\varphi_1{}^2\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)$$
$$+2(1+Z'^2)\mathrm{tg}\varphi_1{}^2\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)+(\mathrm{tg}\varphi_1{}^2-\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)^2=0$$

erhalten wir

$$\mathrm{tg}\psi_1{}^2+\mathrm{tg}\psi_2{}^2=2\left(\frac{(\mathrm{tg}\varphi_1{}^2+\mathrm{tg}\varphi_2)(1+Z'^2\mathrm{tg}\varphi_1{}^2\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)+2(1+Z'^2)\mathrm{tg}\varphi'^2\mathrm{tg}\varphi_2}{(1-Z'^2\mathrm{tg}\varphi^{12}\mathrm{tg}\varphi_2{}^2)^2}\right)$$

$$\mathrm{tg}\,\psi_1\,\mathrm{tg}\,\psi_2=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi_1{}^2-\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2}{1-Z'^2\mathrm{tg}\,\varphi_1{}^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2},$$

woraus nach einigen Rechnungen und Umwandlungen

$$\mathrm{tg}\,\psi_1+\mathrm{tg}\,\psi_2=2\mathrm{tg}\,\varphi_1\frac{\sqrt{1+(1+Z'^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2+Z'^2\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^4}}{1-Z'^2\mathrm{tg}\,\varphi'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2},$$

$$\mathrm{tg}\,\psi_1-\mathrm{tg}\,\psi_2=2\mathrm{tg}\,\varphi_2\frac{\sqrt{1+(1+Z'^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi_1{}^2+Z'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_1{}^4}}{1-Z'^2\mathrm{tg}\,\varphi'^2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2{}^2},$$

welche auch so geschrieben werden können

$$\mathrm{tg}\,\psi_1+\mathrm{tg}\,\psi_2=\frac{\sin 2\varphi_1\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2{}^2}}{\cos\varphi_1{}^2\cos\varphi_2{}^2-Z'^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2}.$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 - \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{\sin 2\varphi_2\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1{}^2}}{\cos\varphi_1{}^2\cos\varphi_2{}^2 - Z^2\sin\varphi_1{}^2\sin\varphi_2{}^2} + .$$

Hieraus lässt sich noch ableiten

$$\operatorname{tg}(\psi_1+\psi_2) = \frac{2\operatorname{tg}\varphi_1\Delta\varphi_2}{1-\operatorname{tg}\varphi_1{}^2(\Delta\varphi_2)^2}.$$

$$\operatorname{tg}(\psi_1-\psi_2) = \frac{2\operatorname{tg}\varphi_2\Delta\varphi_1}{1-\operatorname{tg}\varphi_2{}^2(\Delta\varphi_1)^2}.$$

Führen wir ein

$$\operatorname{tg}\varphi_1\Delta\varphi_2 = \operatorname{tg}\sigma_1,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_2\Delta\varphi_1 = \operatorname{tg}\sigma_2,$$

so folgt aus

$$\psi_1+\psi_2 = 2\sigma_1,$$
$$\psi_1-\psi_2 = 2\sigma_2,$$

schliesslich

$$\psi_1 = \sigma_1+\sigma_2,$$
$$\psi_2 = \sigma_1-\sigma_2.$$

Auf diesem Wege sind wir also zu bekannten Resultaten gelangt.

§ 24.

Ableitung einer 2. Integralfunction.

Wir werden uns jetzt mit der Frage beschäftigen, ob es ausser den vorhin gefundenen noch andere Integralfunctionen gibt, welche den elliptischen Integralen 1. und 2. Art entsprechen.

Wie man im vorigen § gesehen hat, hängt die Existenz derselben davon ab, durch eine analytische Betrachtung einer geeigneten biquadratischen Gleichung von geometrischer Bedeutung zunächst eine elliptische Integralfunction zu erhalten und ferner den aus den Parametern der Gleichung zusammen gesetzten Modulus durch die Constanten der für sie substituirten Gleichung 4. Grades zu bestimmen. Von den wichtigeren Gleichungssystemen dieser Art wählen wir hier noch die folgende Function aus, welche sich den vorigen ungezwungen anschliesst.

Wir greifen nochmals auf die Gleichung 143) zurück, um dieselbe für unsern Zweck einer Transformation zu unterwerfen.

In der Function

$$\Sigma\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1-\dfrac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}}$$

führen wir folgende Substitutionen ein

$$Z^2 = \frac{4Rs}{a^2-(R-s)^2}, \quad Z^2 \sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2 = \sin\varphi^2,$$

$$\cos\varphi = \frac{c.y}{b\sqrt{a^2-(R-s)^2}} = \frac{cZy}{b\sqrt{4Rs}}.$$

In Folge dieser Relationen geht die Gleichung 107) in die folgende über:

$$\cos\varphi^4 + 2\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}Z\sin\alpha.\cos\varphi^3 + Z^2\frac{R}{s}\left(\frac{b^2}{c^2}\sin\alpha^2 - \frac{(R^2+a^2-s^2)}{2R^2} + \frac{a^2}{c^2}\cos\alpha^2\right)\cos\varphi^2$$

20)

$$-\frac{a^2+R^2-s^2}{2Rs}\frac{b}{c}Z^3\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha.\cos\varphi + \frac{(a^2+R^2-s^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2}{16R^2s^2}Z^4 = 0,$$

und auch hier ist zu entscheiden, ob durch Vergleich dieser mit der ihr identischen Gleichung

$$\cos\varphi^4 - A\cos\varphi^3 + B\cos\varphi^2 - C\cos\varphi + D = 0$$

sich die Relationen $\frac{R}{s}$, $\sin\alpha$ etc. der ersten Gleichung durch die Constanten der zweiten und damit der Modulus der Function

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2-(R-s)^2}{4Rs}\sin\varphi^2}} = \Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi^2}}$$

bestimmen lassen.

Zu diesem Ende setzen wir

$$A = -2Z\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha,$$

$$B = Z^2\frac{R}{s}\left(\frac{a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2}{c^2} - \frac{(R^2+a^2-s^2)}{2R^2}\right).$$

$$C = \frac{a^2+R^2-s^2}{2Rs}\frac{b}{c}Z^3\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha,$$

$$D = \frac{(a^2+R^2-s^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2}{16R^2s^2}Z^4.$$

Die Division von $\frac{C}{A}$ ergibt zunächst

21) $$\frac{4C}{A} = -\frac{(a^2+R^2-s^2)Z^2}{Rs}.$$

Ferner ist

22) $$\frac{A^3-4AB+8C}{A}=+\frac{4a^2}{c^2}\frac{R}{s}\cos\alpha^2.\,Z^2 \text{ und } A^2=\frac{4b^2}{c^2}\frac{R}{s}\sin\alpha^2 Z^2,$$

23) $$\frac{C^2-A^2D}{A^2}=\frac{1}{4}\frac{a^2}{s^2}\cos\alpha^2 Z^4.$$

Aus

$$a^2+R^2-s^2=a^2-(R-s)^2+2R^2-2Rs$$ folgt

24) $$\frac{a^2+R^2-s^2}{4Rs}=\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{s}-1\right).$$

also ist auch

$$-\frac{C}{A}=1+\frac{Z^2}{2}\left(\frac{R}{s}-1\right),$$

woraus

$$\frac{2}{Z^2}=2\lambda^2=\frac{1-\frac{R}{s}}{1+\frac{C}{A}}.$$

Aus 21) folgt

$$-\frac{4R}{Z^2s}\cdot\frac{C}{A}=\frac{a^2}{s^2}+\frac{R^2}{s^2}-1,$$

wir setzen hierin aus 23) den Ausdruck für $\frac{a^2}{s^2}$ ein, man erhätt

26) $$\frac{4(A^2D-C^2)}{Z^4A^2}=\left(\frac{R^2}{s^2}+\frac{4}{Z^2}\frac{C}{A}\frac{R}{s}-1\right)\cos\alpha^2.$$

Aus der letzten Formel in Verbindung mit 25) resultirt

27) $$\cos\alpha^2=-\frac{AD-C^2}{(A+C)^2}\frac{1-\frac{R}{s}}{1+\frac{R}{s}\frac{A-C}{A+C}}$$

Dividirt man die erste der Gleichungen 22) durch $\cos\alpha^2$, die zweite durch $\sin\alpha^2$ und subtrahirt, so resultirt bei Benutzung von 25)

28) $$-8\frac{R}{s}\frac{(A+C)}{1-\frac{R}{s}}=\frac{A^3-4AB+8C}{\cos\alpha^2}+\frac{A^3}{\sin\alpha^2}.$$

Es sei

$$\frac{R}{s}=1-\frac{2}{Z^2}\frac{A+C}{A}=1-z$$ also

$$z=\frac{2}{Z^2}\frac{A+C}{A}.$$

Aus 27) folgt aber

$$\cos\alpha^2 = \frac{A^2D - C^2}{A^2Z'^2 - C^2}, \quad \sin\alpha^2 = \frac{A^2(Z'^2 - D)}{A^2Z'^2 - C^2}, \quad \cot\alpha^2 = \frac{A^2D - C^2}{A^2(Z'^2 - D)}.$$

In Folge dieser Werte geht die Gleichung 28) nach einigen Reductionen über in

$$8(1-z) = \frac{A^3-4AB+8C}{A^2D-C^2}(2A-(A-C)z) - \frac{A^2z(2A-(A-C)z)}{2(A+C)-A(1-D)z}.$$

Entwickelt man nach Potenzen von z, so erhält man die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
&Az^2\left(8(1-D)-A(A-C)-(1-D)(A-C)\frac{A^3-4AB+8C}{A^2D-C^2}\right)\\
&+2z\left(-4A(1-D)-8(A+C)+A^3+(2A^2-C^2-A^2D)\frac{A^3-4AB+8C}{A^2D-C^2}\right)\\
29)\quad&\\
&+4(A+C)\left(4-\frac{A(A^3-4AB+8C)}{A^2D-C^2}\right)=0.
\end{aligned}$$

Da $z = \frac{2}{Z^2}\frac{A+C}{A}$ und $\frac{1}{Z^2} = \lambda^2$ ist, so ergibt die Auflösung folgendes Resultat.

30) $$\lambda^2 = \frac{1}{Z^2} =$$

$$\frac{-A(A^3-4AB+8C)+A(AC^2-4ABD+8CD) +2(A^2D-C^2)(3+B-D\pm(\sqrt{(1+B+D)^2-(A+C)^2})}{(A+C)(-(A^3-4AB+8C)+8AD+A^2C-4BC +8CD+AC^2-4ABD+4BCD-8AD^2-C^3)}$$

Demgemäss haben wir den Satz:

Mit jeder biquadratischen Gleichung von der Form

31) $$\cos\varphi^4 - A\cos\varphi^3 + B\cos\varphi^2 - C\cos\varphi + D = 0$$

ist die Integralfunction

32) $$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_1^2}} + \int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_2^2}} + \int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_3^2}} + \int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi_4^2}} = 2K$$

verknüpft, deren Amplituden durch die Wurzeln der Gleichung, und deren Modulus durch den Ausdruck in 30) bestimmt sind.

Letzterer kann auch aus der Formel für $Z'^2 = 1 - Z^2$, nämlich aus

$$\frac{A(A^3 - 4AB + 8C)}{A^2D - C^2}\left(Z'^2 - \frac{C^2}{A^2}\right) + \frac{A^2Z'^2 - C^2}{Z'^2 - D} = 4\left(1 + Z'^2 + \frac{2C}{A}\right)$$

berechnet werden.

Ferner steht mit

$$\sin\varphi^4 - A\sin\varphi^3 + B\sin\varphi^2 - C\sin\varphi + D = 0$$

die Integralfunction

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - u^2\sin\varphi_1^2}} + \int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - u^2\sin\varphi_2^2}} + \int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - u^2\sin\varphi_3^2}} + \int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1 - u^2\sin\varphi_4^2}} = 2K$$

in Verbindung, deren Modulus u aus dem für λ gegebenen Ausdruck vermittelst $u'^2\lambda'^2 = 1$, worin $u'^2 = 1 - u^2$ und $\lambda'^2 = 1 - \lambda^2$ berechnet werden kann.

Für Gleichungen dritten Grades ist zu beachten, dass aus $\cos\varphi_4 = 0$, $\varphi_4 = 90^0$ folgt, das entsprechende Integral also zum vollständigen Integral K wird.

Um die elliptischen Integralfunctionen 2. Art aufzustellen, haben wir die Constante der Function

$$\Sigma\int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi^2} = 2\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\cos\alpha$$

zu transformiren.

Dieselbe wird vermöge $A = -2Z\frac{b}{c}\sqrt{\frac{R}{s}}\sin\alpha$ durch $-\frac{A}{Z}\cot\alpha$ ausgedrückt, und wenn wir noch $\cot\alpha$ einführen, so erhält man schliesslich

$$33)\quad \int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi_1^2}\,d\varphi_1{}^2 + \int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi_2^2}\,d\varphi_2 + \int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi_3^2}\,d\varphi_3 + \int\sqrt{1 - \lambda^2\sin\varphi_4^2}\,d\varphi_4 = \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{A^2D - C^2}{Z'^2 - D}}$$

Vermittelst der Kegelschnitte sind wir also durch das Vorstehende in den Besitz zweier Integralfunctionen gelangt, welche auf

einzelne Teile der Geometrie neues Licht zu werfen im Stande sind. In den folgenden §§ geben wir eine Anwendung derselben in geometrischer und dynamischer Betrachtung, um die entwickelten Functionen so viel als möglich zu verwerten. Ob noch andere als die gegebenen möglich sind, werden wir später entscheiden.

§. 25.

Geometrische Anwendungen.

Ein Kreis vom Halbmester s schneide eine Ellipse in 4 Punkten. Wir ziehen senkrecht zur X-Achse durch dieselben Gerade bis zu dem die Ellipse umschliessenden Kreis und bezeichnen die Winkel zwischen den entsprechenden Radien a und der kleinen Achse mit φ. Dieselben werden durch die Wurzeln der folgenden Gleichung, in welcher $R(\alpha)$ die Polarcoordinaten des Kreismittelpunktes darstellen, gefunden:

$$\begin{aligned} 34)\quad & \operatorname{tg}\varphi^4((R^2-s^2+a^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2)-4ab\,R^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi^3 \\ & +(2(R^2-s^2+a^2)(R^2-s^2+b^2)-4R^2(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2))\operatorname{tg}\varphi^2 \\ & -4abR^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi+(R^2-s^2+b^2)^2-4R^2b^2\sin\alpha^2=0. \end{aligned}$$

Wenden wir hierauf die erste Integralfunction an, so erhält man als Modulus

$$35)\quad Z'^2=\frac{4a^2b^2R^4\sin 2\alpha^2+c^4((R^2-s^2+a^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2)}{4a^2b^2R^4\sin 2\alpha^2+c^4((R^2-s^2+b^2)^2-4R^2b^2\sin\alpha^2)}$$

und die Function ist

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi^1}}=2K.$$

Bemerkenswerter ist die Integralfunction der 2. Art, wenn dieselbe auf die vorliegende Ellipse bezogen wird. Man hat nur $Z'=\frac{b}{a}$ zu setzen, und die Bedingungsgleichung hierfür ist

$$36)\quad \frac{4a^2b^2}{c^4}R^4\sin 2\alpha^2-4\frac{R^2}{c^2}(a^4\cos\alpha^2-b^4\sin\alpha^2)+(R^2-s^2+a^2+b^2)^2=a^2b^2$$

weshalb nach 33) resultirt

$$\begin{aligned} 37)\quad & E\varphi_1+E\varphi_2+E\varphi_3+E\varphi_4 \\ & =2E+\frac{2}{a}\sqrt{\frac{4R^2}{c^2}(a^2\cos\alpha^2-b^2\sin\alpha^2)-2(R^2-s^2)-a^2-b^2}. \end{aligned}$$

oder wenn wir die Ellipsenbogen $aE\varphi_n = S_n$ einführen und die Constante durch Elimination von s transformiren

$$38)\quad S_1+S_2+S_3+S_4 = 2S+2\sqrt{a^2-\frac{4b^2}{c^2}R^2\sin\alpha^2}-2\sqrt{b^2+\frac{4a^2}{c^2}R^2\cos\alpha^2}$$

Setzt man

$$39)\quad \sqrt{a^2-\frac{4b^2}{c^2}R^2\sin\alpha^2}-\sqrt{b^2+\frac{4a^2}{c^2}R^2\cos\alpha^2} = d,$$

so erhält man die Curvengleichung 4. Grades:

$$40)\quad \begin{aligned}(a^2x^2+b^2y^2)^2-a^2c^2(c^2+d^2)x^2-\frac{b^2c^2}{2}(c^2-d^2)y^2\\ =+\frac{c^4}{16}(a+b+d)(a+b-d)(a-b+d)(-a+b+d)\end{aligned}$$

Die algebraische Summe der Ellipsenbogen bleibt für den Fall, dass $R(\alpha)$ auf dieser Curve bleibt und s durch 36) bestimmt wird, constant.

Für Gleichungen 3. Grades wählen wir den Fall der Normalen einer Parabel. Der Schnittpunkt der Normalen habe die Coordinaten $R(\alpha)$ in Bezug auf den Brennpunkt. Der Polarwinkel eines Normalenfusspunktes sei ϑ, vom Scheitel an gerechnet. Die bezügliche Gleichung ist dann

$$41)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3+\left(1+\frac{R}{q}\cos\alpha\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta-\frac{R}{q}\sin\alpha = 0.$$

Der Modulus der entsprechenden Integralfunction

$$\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\vartheta_3{}^2}} = 2K$$

ist sehr einfach, da $Z'^2 = \frac{r}{R}$ ist, also ist $Z^2 = \frac{R-r}{R}$, $s = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$.

Führen wir $\vartheta' = 180^0-\vartheta$ ein, so erhält man

$$42)\quad \cot\vartheta'^3+\left(1+\frac{R}{q}\cos\alpha\right)\cot\tfrac{1}{2}\vartheta'-\frac{R}{q}\sin\alpha = 0.$$

Der Modulus wird wegen $\nu'^2 = \frac{R}{r}$, $\nu^2 = \frac{r-R}{r}$, und die Function ist

$$\int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_1'}{\sqrt{1-\frac{r-R}{r}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1'^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2'}{\sqrt{1-\frac{r-R}{r}\sin\frac{1}{2}\vartheta'_2{}^2}} + \int \frac{d\frac{1}{2}\vartheta_3'}{\sqrt{1-\frac{r-R}{r}\sin\frac{1}{2}\vartheta_3'^2}} = K$$

Will man diese Gleichungen auf die Pendelbewegung anwenden, so ist für die vorliegende Function $\frac{r-R}{r} = \frac{2s}{h}$ einzuführen, wo h die Geschwindigkeitshöhe im tiefsten Punkt des Kreises vom Halbmesser s ist. Für $r = h$ ist $s - R = 2s$ und es ist $t_1 + t_2 + t_3 = t$. Man sieht, dass das Verhältniss $\frac{s}{h}$ nur von $\frac{R}{r}$ abhängt.

Setzen wir demnach in $\frac{2s}{h} = 1 - \frac{R}{r}$ das Verhältniss $\frac{R}{r} = f$ fest, so erhalten wir wegen $r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$ auch $f = \frac{R}{q}\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{R}{p}(1+\cos\alpha)$.

Aus dieser Gleichung erhalten wir, wenn die x-Achse nach der positiven Richtung der Parabel genommen wird, als Gleichung für den geometrischen Ort constanten Verhältnisses $\frac{s}{h}$ die Parabel

$$y^2 = 2pf\left(x + \frac{pf}{2}\right),$$

welche mit der gegebenen confocal ist. Hierbei kann der Kreis und die Geschwindigkeitshöhe des in ihm sich bewegenden Punktes beliebig gewählt werden, ihr Verhältniss muss aber constant bleiben.

Dieser innern Parabel entspricht eine polare äussere confocale Parabel

$$y^2 = \frac{2p}{f}\left(x + \frac{pf}{2}\right)$$

als geometrischer Ort der Schnittpunkte dreier entsprechenden Normalen der gegebenen Parabel, deren bezügliche Zeiten t der Bewegung durch die Relation $t_1 + t_2 + t_3 = 2t$ verknüpft sind. Da f und damit der Modulus $Z < 1$ ist, so entspricht bekanntlich die Bewegung dem Falle der vollen Umkreisung. Die derselben Amplitude ϑ entsprechenden 3 Parabelradien $R\, r\, R'$ haben wir schon erwähnt, die Relation $r^2 = RR'$.

§ 26.

Die Gleichung 34) im vorigen § nimmt für die Unbekannte $\cos\varphi$ folgende Gestalt an:

$$\cos\varphi^4 + \frac{4Rb}{c^2}\sin\alpha.\cos\varphi^3 + \left(\frac{4R^2(a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2)}{c^4} - \frac{(a^2 + R^2 - s^2)}{c^2}\right)\cos\varphi^2$$

42)

$$-\frac{4Rb}{c^2}\sin\alpha.\frac{a^2+R^2-s^2}{c^2}\cos\varphi + \frac{(a^2+R^2-s^2)^2}{c^4} - \frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2 = 0.$$

Auf diese Gleichung lässt sich die in § 24. entwickelte Cosinusfunction anwenden, deren Modulus $\lambda^2 = \frac{1}{Z^2} = \frac{1}{1-Z'^2}$ aus der dort entwickelten Form oder auch aus

$$\frac{A^3 - 4AB + 8C}{A(A^2D - C^2)} + \frac{1}{Z'^2 - D} = \frac{4\left(1 + Z'^2 + \frac{2C}{A}\right)}{A^2Z'^2 - C^2}$$

berechnet werden kann.

Es ist

$$A^3 - 4AB + 8C = 64\frac{R^3a^2b}{c^6}\sin\alpha\cos\alpha^2,$$

$$A^2D - C^2 = -64\frac{R^4a^2b^2}{c^8}\sin\alpha^2\cos\alpha^2.$$

Wir setzen auch hier $\lambda^2 = \frac{c^2}{a^2}$ also $Z'^2 = -\frac{b^2}{c^2}$ fest, bezeichnen

$$\frac{a^2 + R^2 - s^2}{c^2} = y$$

und erhalten schliesslich

$$(1-y)^2 = \frac{\left(\frac{b^2}{c^2} + y^2\right)\frac{4R^2b^2}{c^4}\sin\alpha^2}{\frac{b^2}{c^2} + y^2 - \frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2},$$

und y wird bestimmt durch eine Gleichung 4. Grades

43) $$y^4 - 2y^3 + \left(\frac{a^2}{c^2} - \frac{4R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2)\right)y^2 - 2\left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2\right)y$$

$$+\frac{b^2}{c^2} - \frac{4R^2a^2}{c^4}\cos\alpha^2 - \frac{4R^2b^2}{c^6}\sin\alpha^2 = 0.$$

Die Bedeutung derselben ist die, dass zu jedem Punkte $R(\alpha)$ in der Ebene einer Ellipse 4 durch die Wurzeln dieser Gleichung bestimmte, und aus $s^2 = a^2 + R^2 - c^2 y$ vier Radien berechnet werden können, deren entsprechende Kreise auf der Ellipse Bogen begrenzen, welche durch die Formel

$$44) \qquad \Sigma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin\varphi^2} = \frac{4R}{c} \cos\alpha \frac{1-y}{\sqrt{\frac{b^2}{c^2} + y^2}}$$

in Verbindung stehen.

Als 2. Beispiel wählen wir die Gleichung der Normalen der Ellipse und zwar in der leicht abzuleitenden Form

$$\cos\varphi^4 + \frac{2bR}{c^2} \sin\alpha . \cos\varphi^3 + \frac{R^2}{c^4}\left(a^2 - \frac{c^4}{R^2} - c^2 \sin\alpha^2\right) \cos\varphi^2$$
$$- \frac{2bR}{c^2} \sin\alpha . \cos\varphi - \frac{b^2 R^2}{c^4} \sin\alpha^2 = 0.$$

Die Anwendung der bezüglichen Integralfunction auf diese Gleichung würde demnach eine Relation zwischen den 4 durch die Normalenfusspunkte bestimmten Ellipsenbogen ergeben, wenn wir wieder $\lambda^2 = \frac{c^2}{a^2}$ setzen.

Die aus dieser Annahme hervorgehende Bedingungsgleichung wird sehr einfach

$$46) \qquad \frac{R^2}{c^2} = \frac{1}{\sin\alpha^2} - \frac{1}{\cos\alpha^2},$$

oder in Cartesischen Coordinaten

$$47) \qquad x^2 y^2 = c^2 (x^2 - y^2),$$

und hierfür ist zunächst

$$\Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin\varphi^2}} = 2K,$$

und ferner

$$48) \quad \Sigma \int \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \sin\varphi^2}\, d\varphi = \frac{2R}{a} \sin\alpha \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 R^2}{c^4} \sin\alpha^2}{1 - \frac{R^2}{c^2} \sin\alpha^2}} + 2E,$$

oder die algebraische Summe der Ellipsenbogen ist, im Fall $R(\alpha)$ auf der obigen Curve liegt, durch

49) $$\Sigma S = \frac{2R}{c}\sqrt{a^2\cos\alpha^2 - b^2\sin\alpha^2} + 2S$$

ausgedrückt.

Bemerkt man aber, dass diese Curve $x^2y^2 = c^2(x^2-y^2)$ als einzigen Parameter die Excentricität der Ellipse besitzt, so gewinnt man das allgemeinere Resultat:

Mit sämmtlichen confocalen Ellipsen von der Excentricität c ist eine eigentümliche durch die Gleichung

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{c^2}$$

charakterisirte Curve verknüpft, welche die Eigenschaft besitzt, dass die von jedem ihrer Punkte $R(\alpha)$ zu jeder Ellipse gezogenen 4 Normalen entsprechende Ellipsenbogen bestimmen, deren Summe

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2S + \frac{2R}{c}\sqrt{a^2\cos\alpha^2 - b^2\sin\alpha^2}$$

in Bezug auf den entsprechenden doppelten Ellipsenquadranten $2S$ um eine algebraische Grösse differirt.

Wir wollen noch an dieser Stelle erwähnen, dass die in I § 1. benutzte Curve 4. Grades $y = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$, aus welcher die Resultante $\operatorname{tg}\tau^4 - A\operatorname{tg}\tau^3 + B\operatorname{tg}\tau^2 + D$ hervorging in Folge der letztern auf die Integralfunction

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - Z^2\sin\tau^2}} = 2K$$

führt, worin Z vermittelst 9) bestimmt werden kann. Da in den Constanten B und D die Grösse d durch $d-y$ ersetzt werden muss, so erhält man für alle der X-Achse parallele die Curve in 4 Punkten schneidenden Geraden die entsprechenden obigen Functionen, in welchen die Amplituden τ die Winkel sind, welche die Tangenten der bezüglichen Punkte mit der X-Achse einschliessen. Da ferner die Resultante von $x^3 - ax^2 + bx - c - y = 0$ und $3x^2 - 2ax + b - \operatorname{tg}\tau = 0$

$$\operatorname{tg}\tau^3 - (a^2 - 3b)\operatorname{tg}\tau^2 - (4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2)$$
$$- 2(2a^3 - 9ab + 27c)y - 27y^2 = 0$$

ist, so folgt hieraus nach I 14) die Function

$$\Sigma\int\frac{d\,\mathrm{tg}\,\tau}{(3\,\mathrm{tg}\,\tau-2(a^2-3b))\sqrt{3\,\mathrm{tg}\,\tau+a^2-3b}}\qquad\text{und}$$

$$\int\frac{d\,\mathrm{tg}\,\tau}{\sqrt{\mathrm{tg}\,\tau+\frac{1}{3}(a^2-3b)}}=0.$$

§ 27.

Die angeführten Beispiele lassen erkennen, dass man mittelst der entwickelten Integralfunctionen zu neuen Eigenschaften der Curven gelangen kann. Auch die folgenden auf die Kegelschnitte sich beziehenden Erörterungen werden noch einige bemerkenswerte Resultate und Sätze zu Tage fördern, die wir in dynamischem und geometrischem Sinn verwerten können.

Lassen wir die Bezeichnungen wie früher und führen als Unbekannte die Brennstrahlen von einem Brennpunkt nach den Schnittpunkten von Kreis und Kegelschnitt ein, so ist die betreffende Gleichung

$$\text{50)}\quad r^4+4a\left(\frac{R}{c}\cos\alpha-1\right)r^3$$

$$+\left(6a^2-12a^2\frac{R}{c}\cos\alpha+\frac{4R^2}{e^2}\cos\alpha^2+4\frac{b^2}{c^2}R^2\sin\alpha^2+2y\right)r^2$$

$$+\left(-4a^3+12\frac{a^3}{c}R\cos\alpha-\frac{2a}{e^2}\left(4R^2\cos\alpha^2+4b^2\frac{R^2}{a^2}\sin\alpha^2+2\frac{c^2}{a^2}y\right)+\frac{4R}{c}y\cos\alpha\right)r$$

$$+a^4-4a^4\frac{R}{c}\cos\alpha+\frac{a^2}{c^2}\left(4R^2\cos\alpha^2+4b^2\frac{R^2}{a^2}\sin\alpha^2+\frac{2c^2}{a^2}\cdot y\right)$$

$$-4R\frac{a}{e}y\mathrm{eos}\alpha+y^2-4b^2R^2\sin\alpha^2=0,$$

worin $y=R^2+b^2-s^2$ variabel angenommen ist.

Nach einigen Rechnungen und Transformationen erhalten wir durch Anwendung der Formeln I 13) auf obige Gleichung den Ausdruck

$$\text{51)}\qquad\Sigma\int\frac{dr}{\frac{4bR}{c}\sin\alpha\sqrt{r^2+2ar-(1-e^2)a^2}}=1$$

in welchem Integral die Constante $=1$ sein muss.

Dasselbe steht mit einem andern in der Centralbewegung vorkommenden Integral in eigentümlichem Zusammenhang, was wir zeigen wollen.

Die Theorie der Planetenbewegung hat bekanntlich die Bewegungsgleichungen

52)
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{xu}{r^3}=0,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{yu}{r^3}=0,$$

$$u=k^2(1+m),\quad r^2=x^2+y^2,\quad r\,dr=x\,dx+y\,dy.$$

Aus den ersten beiden erhalten wir durch Multiplication mit $2x$, bez. $2y$

$$\frac{d(dx^2+dy^2)}{dt^2}=-\frac{2u}{r^2}dr$$

woraus

53)
$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2u}{r}+h=0.$$

Das 2. Kepler'sche Gesetz gibt

$$x\,dy-y\,dx=c\,dt,$$

woraus durch Quadriren und Transformiren der Ausdruck

$$(x^2+y^2)\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{dt^2}=c^2,$$ oder

$$r^2\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=c^2$$

und hieraus erhalten wir das bekannte Zeitintegral

54)
$$t=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{h}\sqrt{-r^2+2\frac{u}{h}r-\frac{c^2}{h}}}$$

der planetarischen Bewegung, in welchem

$$\frac{u}{h}=a,\quad \frac{c^2}{h}=a^2(1-e^2)$$

ist. Der Vergleich dieses mit dem noch mit r multiplicirten Integral 51) lässt die Identität beider erkennen.

Aus der Integralfunction geht also zunächst die Relation

$$\Sigma\int\frac{r\,dr}{\sqrt{h}\sqrt{-r^2+2\frac{u}{h}r-\frac{c^2}{h}}}=4\frac{bR}{ck}\frac{\sqrt{a}\sin\alpha}{\sqrt{1+m}}+2t$$

d. i. die Formel



$$55)\qquad t_1+t_2+t_3+t_4 = 2t+4\sqrt{\frac{p}{1+m}}\,\frac{R\sin\alpha}{ke}$$

hervor, in welcher t die Umlaufszeit in der Ellipse bedeutet.

In der Centralbewegung nach dem Newton'schen Gesetz $\frac{k^2}{r^2}$ ist die Summe der 4 vom Perihel an gerechneten Zeiten bis zu den 4 Durchschnitten des Kreises und der Ellipse für alle concentrischen Kreise eine constante Grösse, welche auch dann noch unverändert bleibt, wenn die Centra der Kreise auf einer mit der grossen Achse parallelen Geraden fortrücken. Hiernach ist bei 2 concentrischen Kreisen, welche 4 Ellipsenbogen begrenzen, die Summe der Zeiten für die Zurücklegung dieser Strecken im 1. und 3. Quadranten gleich der im 2. und 4.

Dies gilt allgemein für Parabel und Hyperbel.

Führt man $\tau_1 = t - t_3$ und $\tau_2 = t - t_4$ ein, so ist $(t_1+t_2) - (\tau_3+\tau_4) = C$, wonach die τ ebenfalls vom Perihel an genommen sind.

In diesem Sinne bildet der Ausdruck t_1+t_2 als Summe der Zeiten vom Perihel bis zu den entsprechenden beiden Schnittpunkten von Kreis und Kegelschnitt mit dem analogen $\tau_1+\tau_2$ von demselben Anfangspunkt an gerechnet zu den andern Schnittpunkten beider Curven eine constante Differenz, wenn der geometrische Ort der concentrischen Kreise eine zur X-Achse parallele Gerade ist.

Diese Relationen können auch noch auf anderm Wege gefunden werden, und zwar für die Ellipse des Kepler'schen Problems.

§ 28.

Die folgende Untersuchung basirt auf der Untersuchung der Gleichung I 107) oder

$$y^4+4\frac{b^2}{c^2}R\sin\alpha.y^3+\frac{b^4}{c^4}\left(\frac{4R^2a^2}{b^2}-\frac{2c^2}{b^2}(a^2+R^2-s^2)-\frac{4c^2}{b^2}R^2\sin\alpha^2\right)y^2$$

56)

$$-4\frac{b^4}{c^4}R\sin\alpha(a^2+R^2-s^2)y+\frac{b^4}{c^4}((a^2+R^2-s^2)^2-4R^2a^2+4R^2a^2\sin\alpha^2) = 0$$

in welcher wir s^2 oder auch $a^2+R^2-s^2$ variabel betrachten.

Die bekannten Methoden führen auf das einfache Integral

$$\Sigma \int \frac{dy}{x} = C$$

sowie auf

$$\Sigma \int \frac{y\,dy}{x} = C, \quad \Sigma \int \frac{y^2\,dy}{x} = C \text{ etc.}$$

Führen wir den excentrischen Winkel

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi$$

ein, so erhalten wir vermöge $y\,dy + x\,dx = 0$ aus dem letzten Integral, welches wir hier nur betrachten wollen, das Flächenintegral

57) $$\Sigma \int y\,dx = C$$ oder

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = C.$$

Hieraus gewinnen wir das Resultat:

Die durch die letzte Formel charakterisirte algebraische Summe der vier von den Durchschnitten eines Kreises und eines Kegelschnitts bestimmten Flächenstücke des Letztern ist für alle concentrischen Kreise constant.

Um diese Constante zu bestimmen, bemerke man die folgende Darstellung:

$$\Sigma \int y\,dx = ab\Sigma \int \cos\varphi^2 d\varphi = \frac{ab}{4} \Sigma \int (1 + \cos 2\varphi)\, d\,2\varphi$$

$$= \frac{ab}{4}(\Sigma\, 2\varphi + \Sigma \sin 2\varphi).$$

Da aber $\Sigma\varphi = 0$ und $\Sigma \sin^2\varphi = 16 \frac{ab\,R^2}{c^4} \sin^2\alpha$ ist, so erhält man für die Ellipse bei Benutzung von $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{b}{a}$

58) $$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = \frac{a^2b^2}{c^4} R^2 \sin 2\alpha \,.\, \operatorname{tg} 2\varepsilon^2$$

für die Hyperbel dagegen

59) $$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = \frac{a^2b^2}{c^4} R^2 \sin 2\alpha = R^2 \sin 2\alpha \,.\, \sin 2\varepsilon^2.$$

Hieraus folgt also allgemein:

Schneidet ein Kreis einen Kegelschnitt in 4 Punkten, und werden die durch diese Schnittpunkte bestimmten Flächenstücke $\int y\,dx$ des Kegelschnitts mit y bezeichnet, so is' die Summe $y_1 - y_2 + y_3 - y_4$

für alle concentrischen Kreise und überhaupt constant, wenn der geometrische Ort der Centra derselben eine gleichseitige Hyperbel $R^2 \sin 2\alpha = 2xy = A^2$ ist.

Da dieser Satz alle Kegelschnitte umfasst, so gilt er auch noch für die Asymptoten der Hyperbel, woraus der neue Satz sich ergibt:

Werden 2 den Winkel 2ε einschliessende Geraden von einem Kreise geschnitten, dessen Centrum vom Schnittpunkte der Geraden die Entfernung R hat, und ist der Winkel, welchen R mit der den Winkel 2ε halbirenden Geraden als X-Achse einschliesst, $= \alpha$, werden ferner die 4 Schnittpunkte auf diese Achse projicirt, so ist die Summe der Dreiecke

60) $$J_1 - J_2 + J_3 - J_4 = R^2 \sin 2\alpha \sin 2\varepsilon^2$$

für alle concentrischen Kreise und überhaupt eine constante Grösse, wenn dies mit

$$R^2 \sin 2\alpha \sin 2\varepsilon^2$$

der Fall ist.

Wir führen noch beiläufig an, dass aus

$$\Sigma_x \frac{1}{\frac{\partial \Delta}{\partial y}} + \frac{1}{d} = 0$$

die Beziehungen

$$\int \frac{dy}{xy} = \frac{1}{a} \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

also auch nach Feststellung der Constanten

61) $$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_1}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_2}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_3}{2}\right) \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi_4}{2}\right) = \frac{2Ra\cos\alpha + a^2 + R^2 - s^2}{2Ra\cos\alpha - a^2 - R^2 + s^2}$$

erhalten werden können. Die Constante kann durch Transformation auf einen sehr einfachen Ausdruck von Tangenten gebracht werden.

Bemerkung.

Die 4 Radien des Kreises nach den Schnittpunkten des Kegelschnitts mögen mit den Tangenten dieser Punkte die Winkel δ etc. bilden, ebenso schliessen diese Radien mit $R(\alpha)$ die bekannten Winkel ϑ ein, für einen dem ersten unendlich nahen concentrischen Kreis vom Radius $s + ds$ haben wir

$$s\,d\vartheta = ds \operatorname{tg}\delta.$$

Summiren wir und beachten, dass $\Sigma d\vartheta = 0$ ist, so folgt

$$\Sigma \operatorname{tg} \delta = 0.$$

Führen wir ferner in 45) als Unbekannte die Tangente desselben excentrischen Winkels, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ein, so wird man für die Ellipse die folgende Gleichung

62) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^4(s^2-R^2-b^2-2Rb\sin\alpha)+4Ra\cos\alpha.\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^3+(2(s^2-R^2)$
$-4a^2+2b^2)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2+4Ra\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi+(s^2-R^2-b^2+2Rb\sin\alpha)=0$

aufstellen können. Der Modulus der Integralfunction

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{\varphi^2}{2}}}=2K$$

folgt aus

63) $$Z'^2=\frac{R^2a^2\cos\alpha^2+c^2(s^2-R^2-b^2-2Rb\sin\alpha)}{R^2a^2\cos\alpha^2+c^2(s^2-R^2-b^2+2Rb\sin\alpha)}$$

Für die Function 2. Art setzen wir, um die Integrale durch Ellipsenbogen auszudrücken $Z'=\frac{b}{a}$ und das Resultat ist

$$\Sigma a\int\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}\,d\tfrac{1}{2}\varphi = 2Ea+2\sqrt{Rb\sin\alpha}$$

Jedes Integral dieser Function drückt den zur halben excentrischen Anomalie gehörigen Ellipsenbogen aus. Bezeichnet man diese Bogen durch S_1 etc., den Ellipsenquadranten durch S, so ist

64) $$S_1+S_2+S_3+S_4=2S+2\sqrt{Rb\sin\alpha}$$

in welchem Ausdruck die Constante wie in einem früheren Beispiel von $R\sin\alpha$ abhängig ist. Die Winkel φ gehen von 0 bis π.

Die Bedingungsgleichung, welche den geometrischen Ort der Kreiscentra für die Existenz der letzten Function bestimmt, führt auf die Hyperbel

65) $$\frac{\left(y+\frac{a^2+b^2}{c^2}b\right)^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=\frac{4a^2b^2}{c^4}+\frac{s^2}{b^2}.$$

Ableitung der 3. Integralfunction.

§ 29.

Anstatt der biquadratischen Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$ kann man auch die schon früher eingeführte Form

66) $$a+b\sin\varphi+c\cos\varphi+d\sin 2\varphi+e\cos 2\varphi=0$$

benutzen. Der entsprechende Modulus derselben ist hiernach

67) $$Z'^2=\frac{(b-2d)^2+4(a-c+e)(e\pm\sqrt{d^2+e^2})}{(b+2d)^2+4(a+c+e)(e\pm\sqrt{d^2+e^2})}$$

und also

$$\Sigma\int\frac{d\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1-Z^2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}}=2K.$$

Es sei der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius s um die Strecke R von einem Brennpunkt eines Kegelschnittes entfernt. Der Winkel, den dieselbe mit der X-Achse einschliesst, sei α. Die Schnittpunkte der beiden Curven verbinde man mit dem Mittelpunkt des Kreises durch Kreisradien, welche mit der verlängerten Strecke R die Winkel ϑ_1 etc. einschliessen mögen. (Fig. 15).

Die Elimination von φ aus den Gleichungen

68) $$R\sin\alpha+s\sin(\vartheta+\alpha)=\frac{p\sin\varphi}{1-e\cos\varphi}$$
$$R\cos\alpha+s\cos(\vartheta+\alpha)=\frac{p\cos\varphi}{1-e\cos\varphi}$$

führt auf die obige Form, in welcher

69) $$\begin{aligned}
a&=R^2+s^2-p^2-e^2R^2\cos\alpha^2-2peR\cos\alpha-\frac{e^2s^2}{2}.\\
b&=2Rse^2\sin\alpha\cos\alpha+2pse\sin\alpha,\\
c&=-2Rse^2\cos\alpha^2-2pse\cos\alpha+2Rs,\\
d&=\frac{e^2s^2}{2}\sin 2\alpha,\\
e&=-\frac{e^2s^2}{2}\cos 2\alpha.
\end{aligned}$$

Die Berechnung des Modulus vermittelst dieser Bestimmungen führt auf einen sehr einfachen Ausdruck, und zwar ist der eine Wurzelwert

$$Z' = \frac{R-s}{R+s}$$

70) also

$$Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$$

und die Integralfunctionen sind demnach

$$\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_2{}^2}}$$

$$+\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_3}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_3{}^2}}+\int\frac{d\frac{1}{2}\vartheta_4}{\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)^2}\sin\frac{1}{2}\vartheta_4{}^3}} = 2K$$

17)

$$\int\sqrt{1-\frac{4Es}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\int\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s)}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2$$

$$+\int\sqrt{1-\frac{4Qs}{(R+s)^2}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_3{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_3+\int\sqrt{1-\frac{4Rs}{(R+s^2)}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_4{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_4$$

$$=\frac{4R}{e(R+s)}\sin\alpha.$$

Eigentümlich ist, dass in unserm jetzigen Falle der Modulus von keinem Parameter des Kegelschnittes abhängt. Allen Gattungen derselben, also Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, sofern sie nur in einem Brennpunkt confocal sind, genügt die 1. Integralfunction. Hat demnach der feste Kreis constanten Abstand von diesem Brennpunkt so können die Kegelschnitte alle möglichen Lagen in der Kreisebene und alle möglichen Grössenverhältnisse annehmen. Sie müssen nur in einem ihrer Brennpunkte zusammenfallen.

Man wird bemerken, dass die Landen'sche Substitution eine gute Anwendung auf diesen Fall gibt. Danach ist

$$\sin(\vartheta-\tau) = p\sin\tau, \quad \text{wo} \quad p = \frac{R}{s}$$

und die Function geht über in

$$\int\frac{d\tau_1}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_1{}^2}}+\int\frac{d\tau_2}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_2{}^2}}+\int\frac{d\tau_3}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_3{}^2}}$$

$$+\int\frac{d\tau_4}{\sqrt{1-p^2\sin\tau_4{}^2}} = 2K$$

in welcher die neuen Amplituden τ_1 etc. die Winkel sind, welche die Strecke R mit den nach den 4 Schnittpunkten gezogenen Brennstrahlen des Kegelschnitts bezüglich einschliessen.

Will man dagegen die Winkel σ einführen, welche die Brennstrahlen mit den Radien s bilden, so ist

$$\sin(\vartheta - \sigma) = p \sin\sigma, \qquad \text{wo } p = \frac{s}{R},$$

und man erhält die analoge Function.

Der andere Wert des Modulus ist, wie nach einigen Rechnungen erhellt,

72) $$Z^2 = \frac{4(R\cos\alpha - c)s\cos\alpha}{((R+s)\cos\alpha - c)^2 - a^2},$$

wobei man eine Untersuchung über die Verhältnisse anstellen kann, welche aus der Gleichsetzung der beiden Moduln hervorgehen.

Interessant werden die Verhältnisse in dem Fall, dass der Kreis durch den genannten Brennpunkt hindurchgeht. Die Function 2. Art geht dann in einen geometrisch leicht definirbaren Ausdruck über, wenn wir für $\sin\frac{1}{2}\vartheta$ den entsprechenden Wert $\frac{s_1}{2z}$, worin $s_1 s_2 s_3 s_4$ die bezüglichen Sehnen von dem, dem Brennpunkt gegenüberliegenden Kreispunkte nach den Schnittpunkten von Kreis und Kegelschnitt einführen. Nach Feststellung der Vorzeichen finden wir bei der Ellipse und Parabel

73) $$s_1 + s_3 + s_3 - s_4 = \frac{4s}{e}\sin\alpha,$$

und bei der Hyperbel einen analogen Ausdruck.

Von den mannigfachen Formen, welche die elliptischen Integrale zur Verfügung stellen, wählen wir

$$\frac{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_1 + \Delta\frac{1}{2}\vartheta_2}{\Delta\frac{1}{2}\vartheta_3 + \Delta\frac{1}{2}\vartheta_4} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3 + \vartheta_4)}$$

und bemerken, dass in dieser und den ihr analogen andern Formen $\Delta\frac{1}{2}\vartheta$ durch Brennstrahlen ersetzt werden kann. Demnach hat man

74) $$\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_3 + \varrho_4} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3 + \vartheta_4)}$$
$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_4} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\vartheta_3 - \vartheta_4)}.$$

Die Formeln lassen beim Uebergang der Hyperbel in ihre Asymptoten eine Anwendung auf die Geometrie des Kreises zu.

Wir setzen demnach $a = b = c = 0$ und führen ausserdem die

in der Figur 16.) angegebenen Winkel ε ein. Man wird leicht die folgenden Relationen bewahrheiten können

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\cos\varepsilon_3}{\cos\varepsilon_4}, \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = \frac{\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon_2}$$

75)
$$\frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_4 - \varrho_2} = \frac{\cos\varepsilon_5}{\cos\varepsilon_6}$$

$$\frac{\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_3 - \cos\varepsilon_2\cos\varepsilon_4}{\cos\varepsilon_3\cos\varepsilon_4 - \cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2} = \frac{\cos\varepsilon_5}{\cos\varepsilon_6}.$$

Diesen schliessen sich, wie man leicht finden wird, noch eine zahlreiche Menge anderer an.

Will man noch die Bewegung eines schweren Punktes im Kreise mit den gegebenen Entwickelungen vergleichsweise in Betracht ziehen, so geben dieselben den Fall der vollständigen Umkreisung, da $Z < 1$ ist. Die Geschwindigkeitshöhe im tiefsten Punkte des Kreises sei h dann ist $\frac{4Rs}{(R+s)^2} = \frac{2s}{h}$, woraus bei gegebenem s und h R sich berechnen lässt. Die erste Integralfunction kann also durch die zu den Amplituden ϑ etc. gehörigen Zeiten t etc. ersetzt werden und man hat

76)
$$t_1 + t_1 + t_3 + t_4 = 2t,$$

worin t die volle Umlaufszeit bezeichnet.

Es schneidet aber der Brennstrahl ϱ_1 vom Kreise zwei durch die Amplituden ϑ_1 und ϑ_1' bestimmte Bogen ab, für welche nach früherem

$$t_1 + t_1' = t$$

ist. Dasselbe gilt vom Brennstrahl ϱ_2, den bezüglichen Amplituden ϑ_2 und ϑ_2' entspricht die Relation

$$t_2 + t_2' = t$$

Ziehen wir nun die Summe beider oder

$$t_1 + t_2 + t_1' + t_2' = 2t$$

von der obigen 76) ab, so resultirt

77)
$$t_2' - t_3 = t_4 - t_1'.$$

Wie man sofort aus der Figur sieht, entspricht die Zeit $\tau = t_2' - t_3$ einem Bogen, der Kreis zwischen ϑ_3 und ϑ_2' und die Zeit $\tau' = t_4 - t_1'$ entspricht dem Bogen zwischen ϑ_1' und ϑ_4. Sie sind also Bogen gleicher Zeitdauer. Analoge Bogen lassen sich bei weiterer Betrachtung leicht auffinden.

Lässt man die Ellipse und Hyperbel bezüglich in eine Gerade oder 2 sich schneidende Geraden übergehen, so erhält man die bekannten Integralfunctionen des Kreises, deren Sätze durch das Vorstehende wiederum eine Verallgemeinerung erfahren haben.

§. 30.

Die im vorigen § angestellte biquadratische Gleichung gibt in Folge des einfachen Ausdrucks des Modulus ihrer Integralfunction Veranlassung zur Aufstellung einer neuen Function, die wie folgt, gebildet werden kann.

Der genannte Modulus $Z^2 = \frac{4Rs}{(R+s)^2}$ hängt einzig vom Verhältniss $\frac{R}{s} = x$ ab. Gelingt es demnach, aus den Formeln 69) oder

78)
$$\begin{aligned}
\frac{a}{s^2} &= x^2 + 1 - \frac{p^2}{s^2} - e^2 . x^2 \cos\alpha^2 - \frac{2pe}{s} x \cos\alpha - \frac{e^2}{s^2} \\
\frac{b}{s^2} &= 2xe^2 \sin\alpha\cos\alpha + \frac{2pe}{s}\sin\alpha \\
\frac{c}{s^2} &= -2xe^2\cos\alpha^2 - \frac{2pe}{s}\cos\alpha + 2x \\
d &= \frac{e^2s^2}{2}\sin 2\alpha, \quad e = -\frac{e^2s^2}{2}\cos 2\alpha
\end{aligned}$$

dies Verhältniss x aus den Constanten der Gleichung

79) $$a + b\sin\vartheta + b\cos\vartheta + d\sin 2\vartheta + e\cos 2\vartheta = 0$$

zu entwickeln, so erhalten wir die gesuchte neue Integralfunction.

Man findet leicht

$$b\cos\alpha + c\sin\alpha = 2x\sin\alpha . s^2$$
$$e^2(b\cos\alpha + c\sin\alpha) = 4x\sin\alpha . \sqrt{d^2 + e^2}$$

worin $$\sqrt{d^2 + e^2} = \frac{e^2s^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{d}{e}.$$

Die erste Relation für a geht nun über in

$$\frac{a}{s^2} = x^2 + 1 - \frac{\left(\frac{b}{s^2} - xe^2\sin 2\alpha\right)^2}{4e^2\sin\alpha^2} - e^2x^2\cos\alpha^2 - 2ex\cos\alpha\frac{\left(\frac{b^2}{s^2} - xe^2\sin 2\alpha\right)}{2e\sin\alpha} - \frac{e^2}{2}$$

Dieselbe geht bei Benutzung von

$$\cot\alpha = \cot 2\alpha + \sqrt{1 + \cot 2\alpha^2}$$

$$\cot\alpha = -\frac{e + \sqrt{d^2 + e^2}}{d}$$

$$\sin\alpha^2 = \frac{d^2}{2(d^2 + e^2 - 2e\sqrt{d^2 + e^2})}$$

schliesslich über in die Gleichung

$$x^2 - 2d\frac{\left(a\sqrt{d^2+e^2} + \frac{b^2}{4}\frac{(d^2+e^2-2e\sqrt{d^2+e^2})}{d^2} + d^2+e^2\right)}{\sqrt{d^2+e^2}\,(cd-be+b\sqrt{d^2+e^2})}x + 1 = 0$$

wofür wir setzen

$$x^2 - 2nx + 1 = 0 \qquad \text{woraus}$$

$$x = n + \sqrt{n^2-1} = \frac{R}{s}.$$

Da aber

$$Z' = \frac{\frac{R}{s} - 1}{\frac{R}{s} + 1}$$

ist, so folgt auch

$$Z' = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \qquad \text{oder}$$

$$Z'^2 = \frac{n-1}{n+1}.$$

Demnach geht der letzte Ausdruck bei Einführung des Wertes für n nach einigen Transformationen über in

$$80)\quad Z'^2 = \frac{(4a-c)\,d^2 - 2be(b-2d) + (b-2d)^2\sqrt{d^2+e^2}}{4(a+c)\,d^2 - 2be(b+2d) + (b+2d)^2\sqrt{c^2+e^2}}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Zieht man indessen vor, den Modulus $Z^2 = 1 - Z'^2$ durch die Constanten der aus 79) hervorgehenden Gleichung

$$81)\quad (a-c+e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4 + 2(b-2d)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3 + 2(a-3e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 + 2(b+2d)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta + a + c + e = 0$$

oder aus

$$82)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^4 - A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^3 + B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 - C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta + D = 0$$

zu bestimmen, so findet man

$$83)\quad Z'^2 = \frac{(A-C)^2(7+B-D)-4A(A+C)(1-B+D)+4A^2\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}{(A-C)^2(-1+B+7D)-4C(A+C)(1-B+D)+4C^2\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}}$$

und es ist hierfür

$$\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1{}^2}}+\int\frac{d\tfrac{1}{2}\vartheta_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2{}^2}}+\text{ etc.} = 2K \quad\text{oder}\quad K.$$

Zur Entwickelung der Integralfunction 2. Art gehen wir auf

$$\Sigma\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{4R}{e(R+s)}\sin\alpha$$

zurück, worin noch die Constante zu bestimmen ist. Man findet bei Benutzung der obigen Relationen

$$84)\quad \int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_2{}^2}\,d\tfrac{1}{2}\vartheta_2+\text{ etc.}$$
$$= Z\sqrt{\frac{d}{2\sqrt{d^2+e^2}}\cdot\frac{cd-bc+b\sqrt{d^2+e^2}}{d^2+e^2-2e\sqrt{d^2+e^2}}}.$$

Man erhält z. B. für

$$\operatorname{tg}\varphi^4-25\operatorname{tg}\varphi^2+60\operatorname{tg}\varphi-36=0$$

$$Z'^2=\frac{9}{20\sqrt{46}-119}$$

und es ist

$$F_1+F_2+F_3-F_4=K.$$

Auch die neue Integralfunctionen kann erfolgreich auf Beispiele wie in den früheren §§ angewandt werden. Man wird manches Uebereinstimmende finden.

§ 31.

Anwendung der Integralfunctionen auf die Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen.

Wir bemerken vorab, dass die Formeln in § 21. und analog die im letzten Abschnitt aufgestellten eine Auflösung dieser Gleichungen durch geometrische Construction enthalten, da ja die Ausdrücke $\frac{R}{s}$, $\frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}2\alpha$ etc. durch die Constanten der Gleichungen bestimmbar sind, wodurch die Unbekannten durch die Winkel ϑ ihre geometrische Deutung und durch Construction eines Kegelschnitts und Kreises ihre definitive Lösung erhalten.

Man kann dabei einige Modificationen der Curven eintreten lassen, um die Formeln zu vereinfachen. In der Abhandlung: Geometrische Untersuchungen etc. haben wir eine geometrische Auflösung der reducirten Gleichungen dieser Art gegeben, welche in bestimmten leicht angebbaren Fällen beispielsweise auf eine gleichseitige Hyperbel führt, welche besonders für die kubische Gleichung $x^3+3x+29=0$ eine elegante Anwendung gestattet.

Eine Untersuchung, ob diese Curve überhaupt für den 3. und 4. Grad einer Gleichung brauchbar ist, würde sich demnach mit der Gleichung

$$\frac{c^2}{b^2}=(A+C)\frac{(A-C)^2+(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})^2}{Z^2(A-C)(C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2}))}$$

zu beschäftigen haben.

Die Substitution $\operatorname{tg}\varphi=y\operatorname{tg}\psi$ führt bei der Annahme einer gleichseitigen Hyperbel, worin $\frac{c^2}{b^2}=-2$ ist, auf die Bedingungsgleichung

$$(A+C)(1-B+D)+2(A-C)(D-1)=0,$$

das ist auch

$$Ay^6+(AB-3C)y^4+(BC-3AD)y^2+CD=0,$$

deren Betrachtung hier indes zuweit führen würde.

In analoger Art kann, wie schon früher erwähnt, die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi^4-A\operatorname{tg}\varphi^3$ etc, deren Modulus aus

$$Z'^2=\frac{A^2+2(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

bekannt ist, durch Einführung von $\operatorname{tg}\varphi=y\operatorname{tg}\varphi$ so modificirt werden, dass hierfür ein bestimmtes Z hervorgeht.

Man erhält dann aus der letzten Formel

$$\begin{aligned}&A(A^3-4AB+8C)y^8+4(1+Z'^2)(A^2D-C^2)y^6\\&+2Z'^2(2A^2BD-A^2C^2+2BC^2-8ACD)y^4\\&-4Z'^2(1+Z'^2)(A^2D-C^2)D.y^2+Z'^4C(C^3-4BCD+AD^2)=0,\end{aligned}$$

woraus man ersieht, dass y durch eine Gleichung 4. Grades bestimmt werden muss.

Setzt man z. B. $Z'^2=\frac{1}{4}$ und eine reducirte Gleichung 4. Grades voraus, so würde die Bedingungsgleichung

$$y^6 - \frac{1}{2}By^4 - \frac{D}{2}y^2 + \frac{4BD - C^2}{24} = 0$$

auf die Lemniskatenbogen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2K$$

führen.

Die Annahme $Z = 0$ oder $Z = 1$ führt auf analoge Gleichungen.

Die Integralfunctionen lassen sich nun in folgender Art zur Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen verwenden.

Wir wollen indes hier reducirte mit reellen Wurzeln voraussetzen, um auf dieselben die genannten Functionen und ihre Reihenentwickelungen mit grösserer Einfachheit anwenden zu können.

Wie wir nachgewiesen, ist für die vollständige kubische Gleichung

85) $$\operatorname{tg}\varphi^3 - A\operatorname{tg}\varphi^2 + B\operatorname{tg}\varphi - C = 0$$

der Modulus der hierauf bezüglichen Integralfunction

$$\int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - Z^2 \sin^2\varphi_1^2}} + \int \frac{d\varphi_2}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_2^2}} + \int \frac{d\varphi_3}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi_3^2}} = K$$

durch

$$Z'^2 = \frac{1}{B^2 + 2C(-A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2})} = 1 - Z^2$$

ausgedrückt.

So ist z. B. für $\operatorname{tg}\varphi^3 - \frac{3}{2}\operatorname{tg}\varphi^2 + \frac{1}{2} = 0$. $Z^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$, für $\operatorname{tg}\varphi^3 - 3\operatorname{tg}\varphi + 2 = 0$, $Z^2 = \frac{16+8\sqrt{5}}{17+8\sqrt{4}}$.

Aus 85) folgt aber

86) $$((A-C)^2 + (1-B)^2)\sin 2\varphi^3 - (2A(1+B) + 2C(-3+B))\sin 2\varphi^2 + 4(AC+B)\sin 2\varphi + 8c = 0$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun die bekannten Ausdrücke der symmetrischen Formeln für die Wurzelpotenzen d. i.

$$\Sigma\sin 2\varphi = a, \quad \Sigma\sin 2\varphi^3 = a^3 - 3ab + 3c \quad \text{etc.}$$

leicht finden.

Beachtet man nun, dass in der Reihenentwicklung des unvollständigen elliptischen Integrals 1. Art

87) $$F(Z,\varphi) = a_0\varphi - \frac{1}{2}a_2\sin 2\varphi + \frac{1}{4}a_4\sin 4\varphi - \frac{1}{6}a_6\sin 6\varphi \ldots$$

der Wert von $\sin 2n\varphi$ durch eine nach ungeraden Potenzen von $\sin 2\varphi$ fortschreitende Reihe dargestellt werden kann, so geht die obige Relation über in

$$88)\quad F\varphi = a_0\varphi + \tfrac{1}{2}(-a_2 + a_4 - a_6 \ldots)\sin 2\varphi + \left(-\frac{a_4}{4} + \tfrac{3}{3}a_6 - \tfrac{5}{4}a_8 \ldots\right)\sin 2\varphi^6 +$$

Da für die 3 Wurzeln drei solcher Formeln existiren, so gibt die Summation derselben bei Berücksichtigung der Relation der Winkelsumme, d. i. von

$$\Sigma\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A-C}{1-B}$$

die Gleichung

$$89)\quad F\varphi_1 + F\varphi_2 - F\varphi_3 = a_0 \operatorname{arctg}\frac{A-C}{1-B} - \tfrac{1}{2}(a_2 - a_4 + a_6)\Sigma\sin 2\varphi$$
$$- \left(\frac{a_4}{4} - \tfrac{3}{3}a_6 + \tfrac{5}{4}a_8 \ldots\right)\Sigma\sin 2\varphi^3 \ldots$$

worin wir der Unterscheidung wegen bei der Annahme von 2 positiven und einer negativen Wurzel der reducirten Gleichung die Integrale dementsprechend absolut gewählt haben.

Nun ist aber auch

$$F\varphi_1 + F\varphi_2 + F\varphi_3 = K.$$

Die Subtraction beider Ausdrücke führt demnach auf das folgende Resultat

$$90)\quad u = F(\varphi_3) = \tfrac{1}{2}K - \tfrac{1}{2}a_2 \operatorname{arctg}\frac{A-C}{1-B} + \tfrac{1}{4}(a_2 - a_4 + a_6)P_1$$
$$+ \left(\frac{a_4}{4} - \tfrac{3}{3}a_6 + \tfrac{5}{4}a_8 \ldots\right)P_3 \ldots$$

in Folge dessen das elliptische Integral linker Hand durch bekannte Relationen desselben und durch die Constanten der Gleichung berechnet werden kann.

Die Amplitude folgt dann auf bekannte Weise aus einer Formel der elliptischen Functionen, d. i. aus

$$91)\quad \sqrt{1 - Z^2\sin\varphi_3{}^2} = \sqrt{Z'}\,\frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi\pi}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - \ldots}.$$

Aus der Amplitude folgt dann von selbst der Wert der entsprechenden Wurzel. Damit ist wenigstens theoretisch die Möglichkeit der Bestimmung derselben vermittelst der Integralfunctionen nach-

gewiesen, wenn auch praktisch in Folge gewisser Convergenzbedingungen die Methode keine Anwendung finden sollte.

Es ist nicht gerade notwendig, dass die Gleichungen zuerst reducirt werden müssen, es genügt, durch eine Transformation eine negative und zwei positive Wurzeln zu erhalten. In Bezug auf den oben angegebenen Ausdruck für den Modulus kann derselbe auch nötigenfalls durch einen andern ersetzt werden.

So besitzt z. B. die Gleichung

$$\mathrm{tg}\,\varphi^3 - 2\,\mathrm{tg}\,\varphi^2 - 5\,\mathrm{tg}\,\varphi + 6 = 0$$

2 positive und 1 negative Wurzel.

Legt man die Formel

$$Z'^2 = \frac{A^2 + 2(1 - B \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2})}{C^2}, \quad \Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi^2}} = 2K$$

zu Grunde, so resultirt

$$Z' = 1 \quad \text{also} \quad Z = 0.$$

Benutzt man dagegen die Formel

$$\nu'^2 = \frac{1}{B^2 + 2C(-A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + (1-B)^2})}, \quad \Sigma \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - Z^2 \sin\varphi^2}} = K$$

so kommt

$$\nu'^2 = \frac{1}{241} \quad \text{also} \quad \nu^2 = \frac{240}{241}.$$

Für den ersten als einfachern Fall besteht demnach die Relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 180^0$$

und da

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{A - C}{1 - B} = \mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{4}{3} \quad (\varphi \text{ absolut})$$

so erhält man sofort eine Wurzel aus

$$2\varphi_3 = 180^0 - \mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{4}{3}$$

nämlich

$$\mathrm{tg}\,\varphi_3 = \mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{4}{3} = 2, \quad \text{d. i.} = -2,$$

wie man leicht findet.

Um nach der entwickelten Methode die biquadratische Gleichung

92) $$\mathrm{tg}\varphi^4 - A\,\mathrm{tg}\,\varphi^3 + B\,\mathrm{tg}\,\varphi^2 - C\,\mathrm{tg}\,\varphi + D = 0$$

aufzulösen, transformire man dieselbe mittelst einer linearen Variation

in eine andere, in welcher 2 positive und 2 negative Wurzeln vorkommen. Aus der Formel

$$93)\quad Z'^2 = \frac{A^2+2(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})},$$

erhält man dann den Modulus der Integralfunctionen

$$\int\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}}+\int\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}}+\int\frac{d\varphi_3}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}}$$
$$+\int\frac{d\varphi_4}{\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}} = 2K$$

$$94)\quad \int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_1^2}\,d\varphi_1+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_2^2}\,d\varphi_2+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_3^2}\,d\varphi_3$$
$$+\int\sqrt{1-Z^2\sin\varphi_4^2}\,d\varphi_4$$
$$= 2E+Z^2\sqrt{\frac{C^2+2D(1-B+D+\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{(A+C)^2+(1-B+D)^2}}$$

Nach den gegebenen Formeln hat man nun zunächst

$$95)\quad F\varphi_1 = a_0\varphi_1+\tfrac{1}{2}(-a_2+a_4\ldots)\sin 2\varphi_1+\left(-\frac{a_4}{4}+\tfrac{3}{8}a_6\ldots\right)\sin 2\varphi_1^3$$

addirt man zu dieser die ihr entsprechenden 3 andern, so resultirt wenn F und φ absolut genommen wird

$$96)\quad F\varphi_1+F\varphi_2-F\varphi_3-F\varphi_4 = a_0\Sigma\varphi+\tfrac{1}{2}(-a\ldots)\Sigma\sin 2\varphi_1$$
$$+\left(-\frac{a_4}{4}\ldots\right)\Sigma\sin 2\varphi_3^3 = 2L$$

und da

$$F\varphi_1+F\varphi_2+F\varphi_3+F\varphi_4 = 2K,$$

so erhält man durch Addition oder Subtraction die Beziehungen

$$97)\quad \begin{aligned} F\varphi_1+F\varphi_2 &= K+L \\ F\varphi_3+F\varphi_4 &= K-L \end{aligned}$$

und da $K \pm L$ bekannt ist, indem $\Sigma\sin 2\varphi$ etc. $\Sigma\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{A-C}{1-B+D}$ aus der Gleichung 92) berechnet werden können, so ist in

$$F\varphi_1+F\varphi_2 = F\sigma = u$$

die Amplitude σ gemäss 91) bekannt, welche bekanntlich mit der Fundamentalformel

$$98)\quad \cos\sigma = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Delta(\sigma)$$

zusammenhängt.

Wegen

99) $E(\varphi) = b_0\varphi + \frac{1}{2} b_2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4}\varphi b_4 \sin 4\varphi \ldots$

ist demnach auch

100)

$$E\varphi_1 + E\varphi_2 - E\varphi_3 - E\varphi_4 = b_0 \Sigma\varphi + \tfrac{1}{2}(b_2 - b_4 \ldots)\Sigma \sin 2\varphi_1 + \tfrac{1}{12}(3b_4 - b_8 b_6 \ldots)\Sigma \sin 2\varphi^3 \ldots = 2M$$

$$E\varphi_1 + E\varphi_2 + E\varphi_3 + E\varphi_4 = 2E + \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{AD - C^2}{Z'^2 - D}}$$

woraus

101)

$$v = E\varphi_1 + E\varphi_2 = E + M + \frac{1}{2Z}\sqrt{\frac{A^2D - C^2}{Z'^2 - D}} = E\sigma + Z^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\sigma$$

$$E\varphi_3 + E\varphi_4 = E - M + \frac{1}{2Z}\sqrt{\frac{A^2D - C^2}{Z'^2 - D}}.$$

Hieraus folgt

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{v - E\sigma}{Z^2 \sin\sigma},$$

und demnach aus 98)

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \cos\sigma + \frac{v - E\sigma}{Z^2 \sin\sigma}\Delta(\sigma).$$

Die Wurzeln $\varphi_1\, \varphi_2$ gehen daher aus den beiden folgenden Gleichungen

102)

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\sigma + \frac{v - E\sigma}{Z^2 \sin\sigma}(\Delta\sigma + 1),$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\sigma + \frac{v - E\sigma}{Z^2 \sin\sigma}(\Delta\sigma - 1),$$

hervor, und analog finden sich $\varphi_3\, \varphi_4$.

Auch die in § 30) angegebenen Integralfunctionen geben gute Hülfsmittel zur Bestimmung der Wurzeln.

Will man die Potenzreihe

103) $\sin\varphi \cos\varphi = u - \frac{4 + Z^2}{1.2.3} u^3 + \frac{16 + 44Z^2 + Z^4}{1.2.3.4.5} u^3 \ldots$

für kubische Gleichungen benutzen, so folgt durch Umkehrung

104) $u = \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{4 + Z^2}{48}\sin 2\tau^3 + \frac{144 + 36Z^2 + 9k^4}{3840}\sin 2\varphi^5 \ldots$

Aus

$$\operatorname{tg}\varphi^3 - a\operatorname{tg}\varphi^2 + b\operatorname{tg}\varphi - c = 0$$

folgt aber

$$\sin 2\varphi^3((a-c)^2 + (1-b)^2) - \sin 2\varphi^2(2ab + 2a - 6c + 2bc) + \sin 2\varphi(4b + 4ac) - 8c = 0.$$

Unter Voraussetzung der Convergenz der obigen Reihe hat man

$$105)\quad u_1 + u_2 - u_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma\sin 2\varphi + \frac{4+Z^2}{48}\Sigma\sin 2\varphi^3 + \frac{144+36Z^2+9Z^4}{3840}\Sigma\sin 2\varphi^5 \ldots$$

worin die $\Sigma\sin 2\varphi^n$ aus der Sinusgleichung bestimmt werden können.

In Verbindung mit der Relation $u_1 + u_2 + u_3 = K$ erhält man also u_3 und damit die Amplitude φ. Diese Ableitung ist aber wegen der schwachen Convergenz dieser Reihen nur formell interessant, gleichwol besitzt sie und die vorhin gegebene immer noch einen theoretischen Wert. Wenn die Reihenentwickelungen der elliptischen Integrale eine stärkere Convergenz besässen, so würde dies auch mit den oben abgeleiteten der Fall sein.

Litterarischer Bericht.

I.

Methode und Principien.

Unsere Naturerkenntniss, Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. Von Dr. K. Kroman, Docenten der Philosophie a. d. Universität zu Kopenhagen. Von der Kön. Dän. Akademie der Wissenschaften mit der goldnen Medaille gekrönte Preisschrift. Ins Deutsche übersetzt unter Mitwirkung des Verfassers von Dr. R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen 1883. Andr. Fred. Höst u. Sohn. 458 S.

Das Buch zeigt zwei wertvolle Eigenschaften: es gibt Zeugniss von der vortrefflichen Gabe des Verfassers zu exemplificiren und von dem ernsten Willen unparteiliche Kritik zu üben. Es ist seine mit Glück und Geschick angewandte Methode, an einem Beispiel die Entstehung des Triebes, die Forderungen und Elemente der Erkenntniss aufzuweisen und zu entfalten und demgemäss auch immer ein Beispiel zu wählen, in dem sich alles repräsentirt findet, welche ihm soviel Beistimmung und das Lob erworben hat, dass man bei ihm stets deutlich sehe, was er wolle. Und die Kritik betreffend ist anzuerkennen, dass sie seine höchste Autorität, Kant, nicht schont, seine Lehren in Zweifel zieht und sich nie auf solche beruft. Doch ist er weit entfernt unabhängig von seiner Autorität zu beobachten und zu denken: Kant's Schwächen sind auch die seinen, und ein Fortschritt in der Auffassung wird nicht gewonnen. Wir sind daher in dem Falle, indem wir gegen den Verfasser sprechen, im Grunde nur Kant zu treffen.

Wir beginnen mit den Worten auf dem Titel: „Theorie der Mathematik und Physik". Was kann damit gemeint sein? Bedarf die Mathematik, die selbst Theorie ist, und die Physik, die sich ihre Theorie ausbildet, noch einer Theorie ausser sich? Das hiesse doch, ein Futteral um ein Futteral, ein Gehäuse um ein Schneckenhaus. Wir würden es niemandem verdenken, wenn er dabei an eine bequeme Handhabe für Unkundige dächte, wodurch man auch ohne Studium der Gegenstände über die Wissenschaften urteilen könnte. Doch lässt sich auch eine mehr auf Wahrheit gerichtete Bestimmung denken, wenn man annimmt, dass nur die Bezeichnung verfehlt ist. Was die Theorie zu untersuchen übrig lässt, ist die psychische Genesis des Erkennens, welches zur Theorie führt. Beide Auslegungen sind auch in Anbetracht der Ausführung nicht ganz ohne Grund.

Als Resultat einer einleitenden Betrachtung wird der, auch im Folgenden beibehaltene, nie verbesserte Satz aufgestellt, das Ziel des Erkenntnisstriebes sei, ein alles umfassendes System von einleuchtend richtigen und allgemeinen Behauptungen oder Urteilen zu bilden. In der Tat mögen Manche, insbesondere Nichtmathematiker bei oberflächlicher Beobachtung dessen, was die Mathematiker treiben, auf die Chimäre fallen, wie sie hier dem Verfasser als Ziel des Erkennens erscheint. Doch könnten wir wol durch den Gang der Wissenschaften hinreichend belehrt sein, dass das Urteil den Erkenntnisstrieb nie zu befriedigen vermag, vielmehr nur eine Stufe auf dem Wege der Erkenntniss ist, die sich der Geist befestigt, sowol um auf derselben momentan zu erkennen, als auch um von ihr aus weiter zu forschen. Schon im gemeinen Leben begegnet man häufig Urteilen, die vollkommen einleuchtend und allgemein, und doch trivial und ohne belehrenden Inhalt sind. Im grossen aber bietet uns die synthetische Geometrie Gelegenheit das Analoge zu beobachten. Sie eröffnet uns ein nach unendlich vielen Richtungen ins unendliche ausgedehntes Feld, auf dem wir beliebig viele exacte, evidente und allgemeine Urteile bilden und in ein System bringen können, ohne in der Erkenntniss einen wesentlichen Schritt weiter zu kommen. Wäre dann ein solches System über alle Gegenstände der Erfahrung und des Denkens ausgedehnt, so würden wir schliesslich so unwissend sein wie zuvor. Die Geometrie zeigt dies mehr als irgend eine andre Wissenschaft, weil wir hier in gleich exacter Form die von den Zielen der Naturwissenschaft geleitete Forschung neben der ziellosen Production an Sätzen zur Vergleichung haben. Welche notwendige Bestimmung der obigen Definition, die augenscheinlich nicht zutrifft, fehlt, hätte der Verfasser an seinem eigenen höchst instructiven Beispiele, aus welchem er die Erkenntnisselemente entwickelt, entdecken müssen, wenn nicht das Kant'sche Gedankengleis seinen Blick be-

schränkt hätte. Er sieht am Wiederbau eines herabgestürzten Altans arbeiten und fragt nach der Sicherheit anderer und zukünftiger Altane gegen das Herabstürzen, nach den Bedingungen der Erscheinung und geht die zu ihrer Untersuchung erforderlichen und aus dieser sich ergebenden Begriffe durch, mit Verweilen beim Causalbegriff. Alle diese Acte weisen, nach eigener Darstellung des Verfassers, auf das gemeinsame Ziel hin, Herr der Tatsache zu werden, die er anfangs leidend erlebte. Er brauchte nur seinem Gedankengang treu zu bleiben, um zu definiren: Das Ziel des Erkenntnisstriebes ist, über die passiv erlebten Tatsachen der Sinnesempfindung Herr zu werden. Das Urteil ist dann das Mittel, welches trotzdem, dass es einleuchtend richtig, allgemein und (wenn wir der Verwirklichung vorauseilen) allumfassend ist, das Ziel verfehlen kann, wo letzteres nicht im Auge behalten wird. Hiervon ist das Folgende ein sehr sprechendes Zeugniss. Der Mangel in der Definition ist nämlich kein bloss formeller, sondern er drückt wirklich den Mangel in der Auffassung des Problems der Philosophie aus, er ist der dauernde Mangel des ganzen Werkes, ein beständiges Hinderniss für den Fortschritt der einzelnen so vortrefflich begonnenen Untersuchungen.

Gehen wir die Einleitung durch, deren 3 Abschnitte sind: das Ziel, die Mittel, die Grundbedingung und Wege des Erkennens — so ist der Hauptgedanke des ersten bereits genannt und sein Resultat für unrichtig erklärt. Von den Mitteln werden aufgewiesen: Wahrnehmung, Gedächtniss, Phantasie und Vernunft. Sie werden für angeborene Vermögen erklärt, wenn sie gleich bei der Geburt in sehr primitiver Form vorhanden sein möchten, auch ihre Scheidung keine definitiv massgebende sei. Der Verfasser würde aber wol weiter einräumen, dass die Aussage: die Vermögen sind angeboren — für die Untersuchung gleichbedeutend ist mit der: ich weiss nicht, wie sie entstanden sind — so dass, wenn jemand zeigte, wie sie entstanden sein können, erstere Behauptung seiner Ansicht nichts entgegen stellt. Nun hätte es aber den Zweck der gegenwärtigen Arbeit bedeutend gefördert, wenn der Verfasser aus jenem Nichtwissen herausgetreten wäre und versucht hätte der Bildung des Vermögens der Wahrnehmung, obwol bloss rational, wo die Beobachtung fehlte, nachzuspüren. Es genügt ihm zu sagen, die Keime der Wahrnehmung müssten im Neugeborenen vorhanden sein, denn es würde durch Licht u. s. w. verschieden erregt. Dies ist an sich ein unberechtigter Analogieschluss. Der Blumenstengel, der sich nach der Sonne kehrt, das Wachs, das in der Wärme erweicht, zeigen auch unterschiedliche Erregung, ohne dass wir ihnen darum auch nur Sinnesempfindung zuschreiben. Doch abgesehen von der Ungewissheit, ob letztere von Anfang existirt, so ist Sinnesempfindung noch kein Vermögen, sondern

ein seelischer Zustand. Erst durch Fixirung der Sinne geht aus dem unterschiedlich erlebten ein eigenes Unterscheiden hervor. Dann wieder ist die Unterscheidung von Sinnesempfindungen noch keine Wahrnehmung. Dazwischen liegt eine Reihe von Transformationen der Vorstellung, die nötig sind um Wahrnehmung von Objecten zu erzeugen, und mit welchen die Entstehung von Ideen — Identität, Raum u. s. w. — verbunden ist, die als Bedingung aller Wahrnehmung vorausgehen. Diese unentbehrlichen Elemente der Logik werden hier unerklärt, ihr Inhalt im Dunkeln gelassen, bloss weil der Verfasser die Frage, ob das Wahrnehmungsvermögen angeboren sei, recht bald mit einem Urteil abschliessen will und dies Urteil für die ganze Leistung hält. Anders verfährt er mit der Causalitätsidee. Obgleich auch hier die ganze Leistung in ein Urteil, den Causalitätssatz: Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen — gelegt wird, so wird im 3. Abschnitt die Entstehung der Idee ausführlich behandelt. Die Gültigkeit des Satzes ist Grundbedingung des Erkennens, muss daher vom Menschen ohne Garantie für die Zukunft angenommen werden. Hier ist einmal die Naturnotwendigkeit richtig aufgefasst, als eine, die dem erkennenden Menschen, nicht der Sache auferlegt ist. Dürfte man nun die ganze Einleitung für eine Orientirungsarbeit ohne den Zweck eines definitiven Urteils ansehen, so würde sie in allen den Punkten, auf welche sich die Orientirung erstreckt, eine vortreffliche Angriffs- und Lehrmethode darbieten; nur würde die notwendige Orientirung noch lange nicht beendet sein. Gerade diese Unvollständigkeit zeigt aber, dass die genetische Betrachtung nur zur Erhärtung einiger Sätze dienen sollte.

Nach der Einleitung beginnt die Schrift unter dem Titel: „Die apriorische Erkenntniss: Die formalen Wissenschaften" — mit einer Kritik der Begriffe Apriori, analytische und synthetische Urteile; ersteres ist vorher erwähnt im Gegensatz von apriorischer und empirischer Wissenschaft, fast nur kenntlich gemacht durch Hinweis auf Mathematik und Physik und wird auch hier nicht näher untersucht, sondern bei Verbindung mit den beiden andern als gültiger Begriff vorausgesetzt. Diese Kritik zeigt durch die unnötigen Schwierigkeiten, mit denen sie sich zu tun macht, den Mangel an Orientirung in ihrer Aufgabe, indem sie sogleich einen definitiven Satz anstrebt. Die erste Frage musste sein: Wo und in welchem Sinne kommen jene Begriffe in Wissenschaften mit Zweck und Erfolg in Anwendung? Was dann nicht zum Zweck gehörte, war so gleichgültig als die Krümmungen der Linien, welche zu einem Beweise ein Dreieck vorstellen sollen. Apriori heisst in exacten Wissenschaften stets, was im Erkennen einer Erfahrung vorhergeht, relativ zu dieser, die es bestätigt. Der Verfasser aber meint ein absolutes Apriori, welches

in jenen nicht vorkommt, und dessen Behauptung nichts bedeutet als Unkenntniss der Erfahrungen, aus denen die Wissenschaft hervorgegangen ist. Diese Discrepanz überspringt er, indem er sich auf die Mathematik beruft. Die Kritik wendet sich gleich anfangs auf die Definition des Gegensatzes zwischen analytischen und synthetischen Urteilen, mit dem Resultate dass jedes Urteil beides ist, und dass jedes Vernunft und Anschauung zugleich bedarf. Hätte sie zuerst nach Zweck und Erfolg dieser Scheidung gefragt, so würde ohne die lange Untersuchung klar geworden sein, dass dieselbe an dieser Stelle überflüssig ist; denn sie hat bei Kant nur zur Formulirung bestreitbarer Urteile, dem Fortschritt der Mathematik überhaupt zu nichts gedient. Glücklicherweise war der Umweg keine Verleitung zum Abweg; denn nun stellt der Verfasser die näher liegende Frage: Wie wird die Mathematik, wie sie factisch vorliegt (statt synthetische Erkenntniss apriori) möglich? Zuerst zeigt er, dass sie weit entfernt ist durch reinen „Syllogismus" zustande zu kommen. Sofern hiermit nur eine verbreitete Meinung widerlegt werden soll, kann man gegen die unfruchtbare Vorführung der syllogistischen Formen nichts einwenden. Nur möchte man doch den gelegentlich in specieller Beziehung getanen Ausspruch: Der Naturforscher wird in dieser Form kaum seinen Gedankengang wiedererkennen; denn das Selbstverständliche wird breit hervorgehoben, und die eigentliche Operation beinahe wie etwas selbstverständliches übergangen — von der ganzen Syllogismenlehre gesagt sein lassen. Indes geht der Verfasser auch im folgenden Abschnitt, der von den Axiomen der Geometrie handelt, nicht über die Satzungen der formellen Logik, die er nun einmal für die einzigen Wege des Erkennens hält, hinaus. „Unmittelbare Beurteilungen" und „Inductionsschlüsse" sind das Einzige, was er zur Erklärung der Axiome aufbringt, worüber er sich aber mit vielen Worten ohne klares Ergebniss und mit vielen Abschweifen auslässt. Dass erstere nichts sind als Behauptungen ohne Bewusstsein des Grundes, daher auch ohne Controle, wird nicht an den Tag gelegt. In letztern wird der Induction eine unrechte Bestimmung zuerteilt. Der Verfasser hat keine Ahnung davon, dass die Gewissheit durch das theoretische Gelingen bedingt ist, mit der Ausdehnung der Theorie wächst und unumstösslich wird, sobald die vollendete Tatsache geistiger und materieller Früchte, welche den Aufwand an Anstrengungen tausendfach überstiegen haben, so wie andrerseits die Aussichtslosigkeit ein gleich brauchbares System zu schaffen, dem Zweifel allen Boden entzogen haben. Daher hat auch der Begriff der Hypothese bei ihm keine Stelle und wird bei Erklärung der Axiome gar nicht genannt. Er kennt nur die Sicherung durch den Unterbau, die natürlich immer precärer wird, je höher man baut, da immer mehr fehlbare Elemente hinzukommen.

Mit so ungenügender Auffassung des Zieles und der Mittel der empirischen Erkenntniss wird nun der folgende Abschnitt unter dem Titel der letztern angegriffen und in der Tat bei Besprechung der zwei ersten Themata, welche ziemlich im alten Gleise verläuft, nichts nennenswertes zutage gefördert. Das dritte Thema, Gebiet des Causalgesetzes, erregt gute Erwartungen. Es handelt sich um die Frage, ob das Causalgesetz Beschränkungen habe. Ohne vorher sich darum zu kümmern, welche Beschränkungen der wissenschaftliche Gebrauch des Causalbegriffs schon an sich enthält, dass z. B. nicht der Ortsänderung, sondern der Geschwindigkeitsänderung Ursache zugeschrieben wird, bespricht der Verfasser zwei Punkte, in welchen er fremde Ansichten zu widerlegen sucht, nämlich erstens die, dass die Causalität keine „objective" Gültigkeit habe, zweitens die, dass sie auf die anorganische Natur beschränkt sei. Er tritt Kant und Mill entgegen, aber nur mit neu erdachten Auskünften, während er die Befangenheit in der Auffassung mit ihnen teilt. Die Objectivität bleibt für ihn immer ein Jenseit; nur meint er dem Glauben an ein solches dadurch zu entgehen, dass er es als Hypothese einführt, die zur Erklärung der Idee notwendig wäre. Zur Erklärung der ideellen Causalität also will er eine problematische gleiche Idee anwenden. Das heisst doch, den Spuk eines mythischen Kobolds durch Fiction eines wirklichen Kobolds erklären! In solche Confusion und Verwirrung kann ein aufrichtig forschender Geist geraten, wenn er es verschmäht, die Dinge, über die er urteilen will, speciell anzusehen, und sich damit begnügt, sie unter die Kritik vorgefasster, uncontrolirter Begriffe (sogen. reiner Vernunft) zu bringen. Hätte der Verfasser, ehe er an eine Frage über Objectivität gieng, sich die Bedingungen der Idee der Objectivität klar gemacht, so würde sich der fatale Dualismus des Gedachten und Seienden in den blossen Unterschied des zeitweilig Unvollkommenen und des angestrebten Vollkommenen aufgelöst haben. Gleich unvorbereitet tritt er an die zweite Frage, ob der Mensch freien Willen, d. h. die Fähigkeit neue Causalketten anzufangen habe. Die entgegengesetzte Ansicht, dass nämlich alle Vorgänge, einschliesslich menschliche Handlungen determinirt seien, betrachtet er ohne alle Untersuchung und Charakterisirung als eine einheitliche. Er fragt nicht danach, w a s die Causalität eigentlich verbindet, und was sie undeterminirt lässt. Es entgeht ihm also, dass die Causalverbindung allein das Succedirende berührt, mithin die gesamte gleichzeitige Welt, bei aller Zurückführung auf vorausgehende Zustände, nicht verbinden kann, und dass es gerade dieses grosse Bereich ihr gegenüber zufällig neben einander gehender Teile ist, in welchem der Mensch frei combinirend eine Zweckverbindung herstellt, die mit der Causalität nicht concurrirt, sondern stets ihrer Hülfe bedarf, sofern der Zweck auf die Zukunft

gerichtet ist. Das stärkste Argument für die Willensfreiheit scheint dem Verfasser die Verantwortlichkeit zu sein. Er glaubt auch dieses entkräftet zu haben, mit wie vielfacher intellectueller Einbusse lassen wir dahingestellt. Es gibt stärkere und der exacten Betrachtung näher liegende Argumente. Wie will der Verfasser die Entstehung eines Artefacts, z. B. einer Uhr, durch blosse Kräfte ohne freie Combination erklären? wie den Widerspruch heben, den eine Wette darbietet, in der bei vollkommener Determination die Parteien sich gegenseitig besiegen müssten? Allgemein gefasst liegt das Hauptargument für die Willensfreiheit in der Ueberlegenheit, die das Wissen dem Subject über das Object verleiht; diese kann logischerweise nicht gegenseitig, also der Wissende nicht determinirt sein. Hierbei tritt es recht deutlich hervor, wie unzureichend die umfängliche Definition des Erkenntnisszieles ist; über einander urteilen können Gegner ohne logischen Widerspruch. Daher konnte der Verfasser bei seiner Auffassung die in Rede stehende Frage nicht zur Entscheidung bringen. Was in der gesamten Betrachtung des vorliegenden Abschnitts noch am meisten auf das Wesen der Sache gerichtet ist, ist die Auseinandersetzung, welche zeigt, wie das Gebiet möglicher Willensacte sich mehr und mehr beschränken lässt; nur hätte sie weiter geführt werden müssen, um die Erklärungen zu erreichen, die bereits von andern Autoren gegeben worden sind.

Es folgen noch die Abschnitte: der Causalzusammenhang, die physischen Grundsätze, die physischen Lehrsätze, die physischen Grungbegriffe, Zeit und Raum. Sie würden nur zur Wiederholung des Gesagten veranlassen. Hoppe.

Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. Von Wilhelm Wundt. Zwei Bände. Zweiter Band. Methodenlehre. Stuttgart 1883. Ferdinand Enke. 620 S.

Diese Methodenlehre hat es nur mit vorgefundenem Stoff zu tun. Die Behandlungsweise ist fast ausschliesslich beschreibend; die einzigen dabei geübten logischen Tätigkeiten sind Scheidung und Ordnung. Der Name „Untersuchung" für das Werk ist gänzlich unzutreffend. Es wird weder die psychische Genesis der Methoden untersucht, noch von irgend einem Standpunkte die Notwendigkeit der Fortentwickelung in ihrer actuellen Gestalt ans Licht gestellt. Ein gewisses Eingehen auf Gegenstand und Inhalt der einzelnen Wissenschaften war unvermeidlich um über den Sinn der Methoden Rechenschaft zu geben. Ein tieferes Eingehen würde erforderlich gewesen sein, wenn die vorkommenden Urteile hinreichend motivirt erscheinen

sollten. Der Grund, warum der Verfasser, dem augenscheinlich nicht der Sinn für reifere und mehr einheitliche Auffassung abgieng, es bei dieser indifferenten Behandlungsweise bewenden liess, liegt wol in der überwältigenden Arbeit, welche die hier zum Abschluss gebrachten Vorstudien für künftige definitive Gestaltung ihm auferlegten. Es ist anerkennenswert, dass hier der Logik die Beobachtung der actuellen Geisteswerke zugrunde gelegt wird, während meistens eine aprioristische, d. h. auf eingewurzelten, nie controlirten Grundsätzen beruhende Kritik ohne genaue Kenntniss des Wesens der Methoden über dieselben abspricht. Die Abschnitte des Buches sind: Allgemeine Methodenlehre, insbesondere die Methoden der Untersuchung, die Formen der systematischen Darstellung; von der Logik der Mathematik, die arithmetischen, die geometrischen Methoden, der Functionsbegriff und die Infinitesimalmethode; von der Logik der Naturwissenschaften, insbesondere die allgemeinen Grundlagen der Naturforschung, die Logik der Physik, der Chemie, der Biologie; von der Logik der Geisteswissenschaften, insbesondere die allgemeinen Grundlagen der Geisteswissenschaften, die Logik der Geschichtswissenschaften, die Logik der Gesellschaftswissenschaften, die Methoden der Philosophie. Hoppe.

Kritische Bemerkungen zur Einführung in die Anfangsgründe der géométrie descriptive. Von Franz Tilšer, Professor an der k. k. böhm. technischen Hochschule in Prag, Reichsraths-Abgeordneter etc. Erstes Heft. Mit einer lithographirten Tafel. Wien 1883. Alfred Hölder. 96 S.

Aus einem 44 Seiten langem Vorwort, welches sich in lauter Allgemeinheiten ohne Charakterisirung mit beständigen Wiederholungen ergeht, ist, abgesehen von einigen Angaben über österreichische Schulen, wenig mehr zu entnehmen, als dass der Unterricht in der „géométrie descriptive“ sehr wichtig sei. Das Vorwort betrachtet Monge's géométrie descriptive und die darstellende Geometrie als zwei verschiedene Doctrinen und preist erstere als Grundlage aller menschlichen Cultur an. Was den Unterschied machen soll, erfährt der Leser nicht. Auch die Schrift selbst verweilt erst lange bei selbstverständlichen Dingen, bis sie endlich bei Einteilung der Doctrin sich etwas näher auf Besprechung des Inhalts einlässt. Die géom. descr. hat zuerst die Aufgabe die Kenntniss der darzustellenden Gegenstände, welche der Darstellung vorausgehen muss, ohne Bezugnahme auf die Darstellung zuwege zu bringen, dann deren Darstellung, dann ihre Erkennung aus der Darstellung zu lehren; und zwar teilt sich die zweite Aufgabe wieder in die zwei, wirkliche und projectirte Gebilde darzustellen. Von den 3 Aufgaben wird hinsichtlich der De-

sideraten nur die erste, die Morphologie, besprochen. Diese allein ist es also, welche nach Ansicht des Verfassers im heutigen Schulunterricht vernachlässigt wird. Vom actuellen Lehrverfahren ist indes nirgends die Rede, daher der Ausdruck, kritische Bemerkungen, auf dem Titel ganz gegenstandslos. Auch scheint die Voraussetzung obzuwalten, als ob die Schüler der descriptiven Geometrie dieselbe ohne alle Kenntniss der Elementargeometrie begönnen. Denn diese gibt doch ziemlich alles Nötige über die einfachern Raumgebilde. Darüber fehlt indes jede Aeusserung, indem sie einzeln durchgegangen und Zeichen dafür gesetzt werden. Von der ganzen Schrift gilt nur: Parturiunt montes etc. Hoppe.

Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik. Von Dr. Hermann Cohen, ordentlichem Professor der Philosophie an der Universität Marburg. Berlin 1883. Ferd. Dümmler. 162 S.

Der Verfasser spricht über 111 philosophische, insbesondere Logik und Mathematik, sowie Geschichte derselben betreffende Themata, indem er über jedes, ohne Bezugnahme auf die übrigen, sein unmotivirtes Urteil abgibt. Die grossenteils sehr bestreitbaren Urteile sind, da aller Nachweis fehlt, gegen Angriff allein geschützt durch Dunkelheit des Ausdrucks, welche es nicht als lohnend erscheinen lässt, auf eine Wiederlegung einzugehen. Letzteres möchte eher der Fall sein, wenn irgendwo gesagt wäre, was unter dem auf dem Titel genannten „Princip" verstanden werden soll; denn aus den Urteilen über die Methoden lässt sich dies nicht entnehmen. Da nirgends ein Fortschritt oder systematische Ordnung zu entdecken ist, so möchte auch ein Verzeichniss der Themata zwecklos sein. Hoppe.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Untersuchungen im Gebiete linearer Differential-Gleichungen. Von Simon Spitzer. Erstes Heft., Wien 1884. Carl Gerold's S. 60 S.

Das Heft besteht aus 4 Abschnitten. Im ersten wird die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hergeleitet, deren Speciallösungen die Wurzeln einer gegebenen kubischen Gleichung sind. Die Methode wird an einem Specialfalle gezeigt, dann auf die allgemeine reducirte Gleichung in Anwendung gebracht und die Bedingung aufgestellt, unter der die Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Nach

Hermite kann man aus dem Integral einer homogenen linearen Gleichung 2. Ordnung diejenige Gleichung 2. Ordnung finden, deren Speciallösungen Potenzen der Speciallösungen der Urgleichung sind. Hieraus ergibt sich eine Erweiterung der obigen Resultate. Der 2. Abschnitt enthält Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen mit linearen Coefficienten, namentlich wenn homogene durch Differentiation und Elimination aus nicht homogenen hervorgehen; der dritte ähnliche Bemerkungen bei gewissen nicht linearen Coefficienten. Im 4. Abschnitt sind die Speciallösungen Differentialquotienten der Speciallösungen gegebener Differentiallösungen. H.

Technik.

Skizze einer Theorie der Elektromotoren und Elektromaschinen. Von Joh. A. Lissner, geprüfter Lehramtscandidat. Wien 1883. Selbstverlag. 58 S.

Diese Skizze soll einer vollständigeren und umfassenderen Bearbeitung der Theorie der Elektromotoren und Elektromaschinen vorausgehen, welche aus den hier angedeuteten Principien die sich ergebenden Schlüsse ziehen und zeigen wird, ob und wieweit die Resultate der Versuche mit denen der Rechnung übereinstimmen. Die Rechnung wird für den Fall durchgeführt, wo die Maschine in permanentem gleichem Gange ist, und zwar wird die vom Strome in der Gesammtschliessung erzeugte und die zur Erzeugung des Stromes aufgewandte Arbeit analytisch dargestellt. Aus der Formel ergibt sich, dass erstere kleiner ist als letztere und zwar um den Betrag, welcher durch die Veränderung des Potentials der Elemente des zweiten Productorteiles aus sich selbst infolge der Steuerungseingriffe repräsentirt wird, nämlich um die Arbeit des Stromes in der Leitung und um die in der Leitung bemerkbare Arbeit. Es wird dann weiter untersucht, nach welchen Principien die Constanten durch Versuche zu bestimmen sind. H.

Zeitschrift des elektrotechnischen Vereines in Wien. Redigirt von Josef Kareis, k. k. österr. Telegraphen-Official. Erster Jahrgang 1883. Wien 1883. R. Spies u. Co.

Jedes der 12 Hefte des Jahrgangs enthält zuerst Vereinsnachrichten, dann Abhandlungen, denen in einigen Vorträge vorhergehen, dann die 9 ersten Ausstellungszeitung. Die Vorträge und Abhandlungen haben grösstenteils Vorrichtungen und Maschinen, teils Pro-

ject, teils local, sowie die Anfertigung zum Gegenstand. Theoretische Vorträge und Aufsätze sind: Stefan: elektrische Kraftübertragung; Dischner: Gegensprechmethode; Waltenhofen: Wirkungsgrad von Motoren; Hissink: telephonische Uebertragung auf grosse Entfernungen; Dvořák: Unhaltbarkeit der Theorie der Spitzenwirkung der Flammen; Graufeld: Erdmagnetismus, Erdströmungen; Reinisch: Beweis des Joule'schen Gesetzes; Jueptner: Einfluss des Magnetismus auf das elektrolytische Verhalten der Metalle; Popper: physikalische Grundlagen der elektrischen Kraftübertragung; Mach: Grundbegriffe der Elektrostatik. Ueber elektrotechnischen Unterricht handelt ein Aufsatz von C. G. S. H.

Kalender für Elektrotechniker. Unter Mitwirkung der Herren Dr. W. A. Nippoldt und Postrath C. Grawinkel herausgegeben von F. Uppenborn, Ingenieur, Redakteur des Centralblattes für Elektrotechnik. Erster Jahrgang 1884. Mit 173 Abbildungen. München und Leipzig 1884. R. Oldenbourg.

Der Kalender enthält zuerst rein mathematische Tabellen und Formeln, dann Formeln nebst Tabellen für Mechanik, Akustik, Optik, Wärmelehre, Magnetismus und Elektricität und für Maschinen, dann für Elektrotechnik, dann gesetzliche Bestimmungen. Dann folgt der Kalender mit Raum für Notizen, zum Schluss Anzeigen. Die Redaction fordert zu Mitteilungen aus eigener Praxis auf.

Vermischte Schriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel X. Amsterdam 1884. J. F. Sikken.

Der Inhalt des Bandes ist folgender.

C. L. Landré: Der mittelbare Fehler bei Beobachtungen zur Bestimmung von mehr als einer Unbekannten. — Formeln zur Bestimmung der Verbindung zwischen der Genauigkeit der Sterblichkeitstabellen und der Zahlen für Lebensversicherung. — Ein besonderer Umstand zu beachten bei Zusammenstellung gegebener Zahlen zur Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit.

L. Jause Bz: Fortsetzung der Beantwortung der Preisfrage (s. litt. B. 276. S. 46).

P. H. Schoute: Ueber eine specielle Raumcurve 7. Grades.

J. De Vries: Ueber lineare partielle Differentialgleicsungen 3. Ordnung mit 3 Variabeln.

A. Benthem Gz: Die Schneckenlinie, Cochleoide.

C. Stolp: Entwickelung von Functionen durch teilweise Integration.

J. Cardinaal: Einige Eigenschaften eines speciellen Systems von Flächen 2. Ordnung. — Einige Eigenschaften von Flächen 2. Grades, die 4 gegebene Linien berühren.

H. J. Krantz: Ueber die Bestimmung der Abwickelung von ebenen Curven.

L. Van Zanten Jzn: Aufgabe (über Hauptträgsaxen eines Vierecks).

N. L. W. A. Gravelaar: Anwendung der Determinanten bei der Methode der kleinsten Quadrate.

F. W. Fischer: Ableitung einer Formel zur Construction der Schattenlinie eines Sonnenzeigers.

W. Kapteyn: Einiges über Integration rationaler Functionen. — Ueber einige Sätze aus der Determinatenlehre.

F. J. van den Berg: Ueber die näherungsweise Rectification des Kreisbogens (Fortsetzung). — Ueber eine unrichtige Ansicht in G. J. Verdam's Handbuch der sphärischen Trigonometrie. — Ueber eine arithmetische Aufgabe.

Es folgt ein nach Gegenständen geordnetes Register über einige mathematische Zeitschriften. H.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXX. 1882—83. Serie terza. Transunti. Volume VII. Roma 1882.

Mathematische Artikel sind folgende im 7. Bande enthalten.

C. Henry: Ueber einige noch nicht herausgegebene Sätze von Fermat.

L. Bianchi: Ueber eine Classe dreifach orthogonaler Flächensysteme.

G. Govi: Ueber die Einwirkung der Temperatur auf die Schallgeschwindigkeit in der Luft und über den Wert dieser Geschwindigkeiten nach Versuchen von G. L. Bianconi, gemacht 1740 in Bologna.

Jung: Neue Sätze zur Ergänzung der Guldin'schen Regel und eine Eigenschaft der Spirale $r = \frac{a}{\vartheta} \sin \vartheta$.

Brioschi: Die algebraischen Relationen zwischen den hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung.

Spottiswoode: Ueber die Invarianten und Covarianten einer durch quadratische Substitution transformirten Function.

Glaser: Verteilung der Masse auf der Oberfläche eines Ellipsoids, derart dass man im Innern des Körpers eine nach Grösse und Richtung gegebene constante Wirkung erhält.

Maisano: Einige Sätze über binäre Formen beliebigen Grades und deren Anwendung auf Untersuchung der mehrfachen Wurzeln der Gleichung 6. Grades.

Besso: Ueber eine hypergeometrische Differentialgleichung.

G. Morera: Ueber das Gleichgewicht der biegsamen und nicht dehnbaren Flächen.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

I.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1880. Dargest. v. d. physikal. Gesellsch. zu Berlin. 36. J. 2. Abth., enth.: Optik, Wärmelehre, Electricitätslehre. Red. v. Neesen. Berlin, G. Reimer. 17 Mk.

— dass. 3. Abth., enth.: Physik d. Erde. Red. v. B. Schwalbe. Ebd. 10 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann. 13. Bd. J. 1881. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 5 Mk.

Sartorius, M., die Entwicklg. d. Astronomie bei den Griechen bis Anaxagoras u. Empedokles, in bes. Auschluss an Theophrast dargestellt. Breslau, Koebner. 1 Mk. 20 Pf.

Weissenborn, H., die irration. Quadratwurzeln bei Archimedes u. Heron. Berlin, Calvary & Co. 3 Mk. 60 Pf.

Methode und Principien.

Cohen, H., das Princip der Infinitesimal-Methode u. seine Geschichte. Berlin, Dümmler. 3 Mk. 60 Pf.

Simony, O., üb. e. Reihe neuer mathemat. Erfahrungssätze. III. (Schluss.) Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, C., methodisch geordn. Aufgabensammlg., mehr als 8000 Aufgaben enth. über alle Theile der Elementar-Mathematik. 11. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Gauss, F. G., 5stell. logarithm. u. trigonometr. Tafeln. Kleine Ausg. Halle, Strien. 1 Mk. 25 Pf.

Heilermann, H., Sammlg. geometr. Aufgaben. 3. Afl. Essen, Bädeker. 80 Pf.

Kleyer, A., vollst. gelöste Auf.-Sammlg. a. allen Zweigen der Rechenkunst etc. 89—100. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Litterarischer Bericht.

II.

Lehrbücher.

Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler, Oberlehrer am Domgymnasium zu Naumburg a. S. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1. Heft. Kongruenz. Zweite, teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1883. Louis Nebert. 64. S.

Von der 1. Auflage des „Leitfadens für den Unterricht in der Geometrie an höheren Lehranstalten", dessen Identität mit dem gegenwärtigen Buche wegen abweichenden Titels fraglich erscheint, ist im 251. litt. Ber. S. 29 nur das 3. Heft besprochen, jedenfalls also der Gegenstand ein anderer. Das 1. Heft hat nun dadurch eine besondere Wichtigkeit, dass es die Grundlegung der geometrischen Begriffe bei Anfängern enthält. Berücksichtigt man, dass der Verfasser sich die grösstmögliche Kürze auferlegt hat, so muss man anerkennen, dass diese mit ausserordentlicher Präcision und in vollkommen genügendem Umfange ausgeführt ist: kein Wort das den Standpunkt der Anfänger überschreitet und keins das auf höherem Standpunkte einer Correction oder Ergänzung bedürfte, kein Umstand ausser Acht gelassen, der zur Bildung richtiger Vorstellungen und Begriffe Erklärung nötig macht. In Anbetracht der tadellosen Genauigkeit und Sorgfalt, die im allgemeinen hier waltet, ist es an seiner Stelle dessen zu erwähnen, was im einzelnen gefehlt ist. Der 1. Grundsatz S. 2 besteht aus 2 Sätzen, die nicht durch „oder", sondern durch „und" zu verbinden waren. Der Satz 39. war vor 38. zu stellen; denn er

erklärt erst die Addition der Winkel. Satz 38. ist, wie er hier steht, eine Tautologie; dass Summe das Ergebniss der Addition ist, soll doch kein Satz über Winkel sein; was aber nicht hätte fehlen sollen, war die geometrische Darstellung der Winkelsumme. Dass der Begriff der Richtung ohne besondere Erklärung aus der gemeinen Vorstellung entlehnt wird, ist zulässig; dass seine Exactstellung durch den Winkel, der den Unterschied der Richtung misst, und der seinerseits durch das Gesetz der Addition zu einem exacten Begriff wird, nicht besonders ausgesprochen ist, mag durch die Kürze der Abfassung des Leitfadens, der vieles dem mündlichen Unterricht überlässt, gerechtfertigt sein. Auf eins nur kommt es unter allen Umständen an: dass der Gebrauch des Begriffes stets exact richtig ist und weder zu falschen Vorstellungen noch zu falschen Consequenzen verleitet. Hiergegen fehlt der dem Parallelensatz 48. beigefügte falsche Beweis. Dessen Unrichtigkeit würde, wie allbekannt, sogleich zutage treten, wenn der Begriff der Richtung definirt wäre, was bei Ausgang von verschiedenen Punkten erst auf Grund des Parallelensatzes möglich ist. Der Begriff der Richtung ist also nur zur Verhüllung eines Betrugs im dunkeln gelassen. Die Berichtigung der Stelle ist leicht. Wo „Beweis" steht, ist statt dessen zu sagen: Der Satz behauptet, dass mit einer Geraden von einem Punkte aus nur eine Gerade in gleicher Richtung gehen kann, was selbstverständlich und keines Beweises fähig ist. Nach Erklärung 3. ist daher der Satz ein Grundsatz. Obgleich diese Erklärung nicht haltbar ist, so kann es genügen, dass nach dieser Correction weder intuitiv noch logisch ein Irrtum herbeigeführt wird. Die Anordnung des Lehrstoffes ist: Linie, Winkel, Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis, Kreis und Polygon, zwei Kreise. Jeder Abschnitt ist mit Uebungen reichlich versehen. Die Zusätze sind von den zur Theorie notwendigen Sätzen getrennt. Die Beweise sind kurz angedeutet, am Schlusse ein ausführlicher Beweis als Muster aufgestellt. Die 2. Auflage unterscheidet sich von der ersten durch Verbesserungen im einzelnen und erhebliche Vermehrungen, ausserdem dadurch, dass die Propädeutik weggefallen und besonders herausgegeben ist. H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Von Dr. E. Glinzer, Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Dritter Theil: Trigonometrie. Mit 118 Figuren und vielen Aufgaben. Hamburg 1883. F. H. Nestler u. Melle. 148 S.

Der 1. Teil, Planimetrie, und der 2. Teil, Stereometrie, sind im 258. und 266. litterarischen Bericht besprochen. Der Lehrgang im 3. Teil ist folgender. In der Einleitung wird die Bedeutung und Auf-

gabe der Trigonometrie, insbesondere hinsichtlich praktischer Zwecke, dargelegt; im 1. Buch die trigonometrischen Functionen spitzer Winkel erklärt, ihre Relationen und die Berechnung einiger Specialwerte gelehrt und für Anwendung von Tafeln ohne Logarithmen, deren Gebrauch hier und im 2. Buch vorausgesetzt wird, Beispiele gegeben; im 2. Buch die theoretischen Aufgaben für das rechtwinklige Dreieck, das Rechteck und Rhombus, das gleichschenklige Dreieck und regelmässige Vieleck gelöst mit Begleitung numerischer Aufgaben; im 3. Buch die Ausdehnung der Functionen auf grössere und negative Winkel gelehrt, und die Logarithmen der Functionen in Anwendung gebracht. Das 4. Buch behandelt die Relationen und Aufgaben am beliebigen Dreieck mit Anwendung auf Viereck und Vieleck; das 5. Buch die goniometrischen Relationen; das 6. Buch ist eine Sammlung technischer Aufgaben, es setzt die Kenntniss technischer Ausdrucksweise, mithin auch die der betreffenden Gegenstände voraus. Das 7. und 8. Buch behandeln das rechtwinklige und das beliebige sphärische Dreieck. Das Princip der Anordnung ist von selbst deutlich und bedarf keiner Motivirung. Die Bestimmung des Buchs für Techniker hat der theoretischen Vollständigkeit keinen Abbruch getan. H.

Lehrbuch der Physik nebst Anleitung zum Experimentiren. Für Präparandenanstalten, höhere Knaben- und Mädchenschulen, sowie für Stadtschulen und mehrklassige Volksschulen bearbeitet von A. P. L. Claussen, Königlichem Seminarlehrer in Bütow. Mit 140 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Potsdam 1883. Aug. Stein. 122 S.

Der Verfasser legt das Hauptgewicht beim physikalischen Unterricht auf das Experimentiren und macht Fertigkeit und Gewandtheit darin zur ersten Forderung für den Lehrer. Zweck des Experimentirens ist ihm die Anschaulichkeit, die Erläuterung der Naturerscheinungen und die Begründung der Naturgesetze. Er befürwortet die Einfachheit, beschränkt das Experimentiren nicht auf den Gebrauch von Apparaten, sondern gibt auch viele Versuche aus freier Hand an. Jede Andeutung derart würde man gern als einen wertvollen Beitrag anerkennen, wenn nur das Bestreben sichtlich wäre die Versuche ausreichend zur Begründung der ganz elementaren Lehren zu machen, die hier vorgetragen werden. Dieser Gesichtspunkt scheint ganz zu fehlen: die Erscheinung muss dartun, was der Lehrer hineinlegen will; eine Frage, was im Gegenfalle erfolgen müsste, wird nie gestellt. Es zeigt sich somit, dass eine weit notwendigere Fähigkeit als die genannte, ohne welche alles Experimentiren nutzlos ist, nicht darum, weil der Verfasser sie für selbstverständlich hielt, son-

dern weil sie ihm selbst so sehr mangelt, unter den Anforderungen an den Lehrer verschwiegen worden ist: nämlich die Fähigkeit sich klar und bestimmt auszudrücken und die Beziehung zwischen Theorie und Erscheinung zu beurteilen. Ein auffallendes Beispiel ist die, ohne Zweifel einer Publication des Breslauer physikalischen Vereins, den der Verfasser seltsamerweise für einen wissenschaftlichen gehalten haben muss, während er nur für Umsturz der wissenschaftlichen Grundlagen agitirt — entlehnte Aufstellung, die Schwerkraft sei keine Eigenschaft des Stoffes, beruhe nicht auf Anziehung der Erde, sei vielmehr „ein Massendruck aus der Ferne", ausgeübt vom Weltall. Diese Lehre, welche den gesamten Principien der Naturwissenschaft widerstreitet, indem sie Kräfte statuirt, die nicht ihren Sitz in bestimmten materiellen Objecten haben, ist keine blosse beiläufige Notiz, denn sie wird durch angeblich überzeugenden Versuch, den gefühlten Druck eines Steines auf die Hand, unterstützt, und es wird ihr insofern wesentlich Folge gegeben, als ein wichtiger Teil der Theorie der Schwere, die Proportionalität mit der Masse, die Abhängigkeit von der Entfernung, die Erklärung der Schwere durch allgemeine kosmische Attraction u. s. w. den Schülern vorenthalten bleibt, während der übrige Teil in gar keiner verständlichen Gedankenverbindung damit steht; denn bald soll die Schwere Ursache des Drucks, bald nichts weiter als der Druck selbst oder der Druck Ursache der Schwere sein. Solange ein solcher Beweis mangelnder Logik sich vorfindet, möchte es überflüssig sein von verfehltem Ausdruck, der sonst vorkommt, zu reden. Die meisten Sätze sind recht exact aufgestellt, gerade in Punkten wo es häufig nicht geschieht, auch sind die Experimente zur Erläuterung grossenteils passend gewählt; nur lernt man daraus nicht erkennen, was jede beobachtete Erscheinung dartut, und was sie nicht dartun kann: es bleibt stets der Eindruck eigenmächtiger Deutung. Die behandelten Gegenstände sind der Reihe nach: Mechanische Erscheinungen fester, tropfbar flüssiger, luftförmiger Körper; magnetische, elektrische Erscheinungen, Reibungs- und Berührungselektricität; Erscheinungen des Schalles, der Wärme, des Lichtes, Ausbreitung, Zurückwerfung, Brechung, Farbenzerstreuung; die neuesten Erfindungen. H.

Lehrbuch der Geometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Professor am Realgymnasium zu Potsdam. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Sechzehnte, verbesserte Auflage. Potsdam 1884. Aug. Stein. 326 S.

Die 6., 8., 13, 14. und 15. Auflage sind im 217., 222., 251., 265. und 268. litt. Bericht besprochen. Die wesentlichsten, verbessernden

Aenderungen sind in der vorigen Auflage vollzogen. Von der gegenwärtigen Auflage erwähnt das Vorwort ausser einer Anzahl Verbesserungen im einzelnen, dass die Quadratur und Rectification des Kreises auf die Grenzmethode gestützt sei. Auf die hiermit gegebene Anregung hin sei darüber bemerkt, dass der keine Schwierigkeit bietende Nachweis des Grenzwerts der eingeschriebenen Polygonfläche bei Verdoppelung der Seitenzahl recht ausführlich dargelegt ist, während über den höchst subtilen entsprechenden Nachweis für den Umfang sehr kurz hinweggegangen wird. Der angebliche „Beweis“ deutet im Grunde nur einen, in der Tat sinnreichen Weg an, sich dem Ziele so weit zu nähern, um überblicken zu können, was eigentlich bewiesen werden müsste. Dass der beständig wachsende Umfang einen Grenzwert haben muss, und warum: nämlich weil er kleiner bleibt als der constante Kreis, und warum dieses; dass auch dieser Grenzwert nur gleich oder kleiner sein kann als der Kreis, wird nicht ausgesprochen und würde noch manche Erklärung erfordern. Dass aber der Grenzwert durch eine Linie repräsentirt wird, die im letztern Falle innerhalb des Kreises liegt, wird als selbstverständlich vorausgesetzt und es ist doch, was zu beweisen bleibt. Noch kürzer wird die Annäherung von aussen abgefertigt, überhaupt also desto weniger Erklärung gegeben, je mehr sie von der Sache gefordert wird. Wäre es nicht instructiver, vor aller Kreismessungstheorie den unterscheidenden Umstand zu erörtern, dass die Flächen als Teile von einander dargestellt werden können, die Linien im allgemeinen nicht, so dass die Länge einer krummen Linie nur dadurch bestimmbar ist, dass sie von der Sehnensumme unendlich wenig differirt? H.

Repetitions-Compendium über alle Zweige der Elementar-Mathematik. Für Schüler der obersten Klasse der Gymnasien und Realgymnasien, sowie für Abiturienten, Studirende und Lehrer der Mathematik bearbeitet von F. J. Brockmann, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Cleve. Stuttgart 1884. Ferdinand Enke. 180 S.

Das Repetitionscompendium verfolgt, verschieden von dem continuirlich methodischen Fortschritt eines Lehrbuchs, den Zweck, das gesamte auf den Gymnasien zu erwerbende Wissen als ein Fertiges zusammenzustellen. Es umfasst in 5 Capiteln die Algebra und Arithmetik (d. i. Gleichungen und Combinatorik), die Planimetrie, ebene Trigonometrie, Stereometrie und einiges aus der mathematischen Physik, in der Ordnung dass die bedeutenderen Teile, die von grösster Anwendung, vorausgehen, die sporadischen Zweige nachfolgen. Die Anfänge werden teils übergangen, teils, wie in der Trigonometrie, durch Aufstellung der Formeln erledigt. Der Vortrag tritt stets so-

gleich mitten in die Theorie ein. Nach Massgabe ihrer Bedeutung für die Theorie werden alle Lehrgegenstände, Methoden und der Erörterung bedürfende Punkte recht eingehend vom Standpunkte des Lehrers oder reifen Schülers besprochen, dabei jedoch weniger die Bekanntschaft mit herkömmlichen Einführungen als vielmehr die freie Geistesentwickelung vorausgesetzt. Die Darstellungsweise ist einfach und leichtverständlich. Der Stoff ist in keine umfassende, erschöpfende Systematik eingepasst, die Bearbeitung beruht vielmehr auf Auswahl, die gut und ausreichend scheint, wiewol wir darin den Urteilen der Leser nicht vorgreifen dürfen. H.

Elemente der reinen Mechanik als Vorstudium für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und technischen Hochschulen sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. Jos. Finger, Professor an der k. k. technischen Hochschule und Docent an der k. k. Universität zu Wien. I. Lieferung. Wien 1884. Alfred Hölder. 128 S.

Das Werk soll in 5 oder 6 Lieferungen erscheinen. Es ist charakteristisch für die Bearbeitung, dass der empirische Ursprung der Begriffe, um welche es sich in den Principien der Mechanik handelt, enthüllt und zur Geltung gebracht wird. Die Wichtigkeit der Kenntniss desselben für die Logik der Forschung und der Didaktik ist nicht zu bestreiten. Dass dieser Ursprung in allen Punkten richtig erfasst und ans Licht gestellt ist, und dass sich darin keine blosse Wiedergabe fremder Ideen, sondern der eigene klare Blick des Verfassers kund gibt, ist anzuerkennen. Damit ist freilich der folgende Satz in der Vorrede, der im Gegenteil eine irrige Auffassung ausdrückt und einen Misgriff in der Darstellung erwarten lässt, nicht wol zu vereinen. „Der auf keine Erfahrung gestützte, undefinirbare und ganz und gar unfruchtbare Begriff der absoluten Ruhe und Bewegung wurde vom Verfasser ganz fallen gelassen, und es wird — den Tatsachen entsprechend — eine jede Bewegung stets nur als eine relative Bewegung betrachtet.“ Obgleich diesem nicht miszuverstehenden Grundsatz in der Bearbeitung keine Folge gegeben wird, so verdient er doch an sich eine eingehende Kritik. Undefinirbar ist die absolute Ruhe überhaupt, die absolute Bewegung zunächst rücksichtlich der Zeit- oder Geschwindigkeitseinheit, die völlig willkürlich bleibt. Von dieser Abhängigkeit ist offenbar hier nicht die Rede, und der willkürliche Factor in Linien- und Zeitmass ist wegen Homogeneität aller Gleichungen in Bezug auf dieselben von keinem Einfluss. Hiervon abgesehen ist die absolute Bewegung undefinirbar vom rein geometrischen, nur teilweise vom dynamischen Gesichtspunkt. Die empirischen Gesetze bestimmen die Bewegung bis auf 9 undefinirbare

Constanten, deren 6 die anfängliche Lage, 3 die anfängliche Translation der Körperwelt ausdrücken, vollständig. Hieraus ergibt sich zwar eine Relativität der Bewegung, nämlich zum Anfangszustand: doch pflegt man unter relativer Bewegung nur eine Bewegung des Teils relativ zum Ganzen, nie aber des Ganzen relativ zu einem Anfang zu verstehen, und ersteres kann auch hier nur gemeint sein. Die Bewegung bestimmt sich also empirisch absolut nicht nur unter Voraussetzung einer gegebenen Epoche, sondern auch teilweise unabhängig davon für jeden Zeitpunkt, nämlich nach Unterscheidung von Translation und Rotation, bezüglich auf letztere, die gar keiner Willkür unterliegt. Es würde z. B. den eclatantesten Widerspruch gegen die Wirklichkeit ergeben, wollte man eine als ruhend betrachtete Fundamentalaxe durch Sonnen- und Erdmittelpunkt legen; denn die Erde müsste dann nach der Sonne fallen. Da hiernach die absolute Bewegung ihrem Hauptteile nach massgebend für die Theorie ist, so kann man sie auch nicht schlechthin „fallen lassen"; damit würde eine wesentliche Lücke in der Theorie verbunden sein. Für jede consequente Theorie, nicht etwa bloss für bequemen Ausdruck, ist es notwendig, von der tatsächlich gegebenen relativen zur absoluten Bewegung überzugehen, und um deutlich zu sein, diesen Uebergang ausdrücklich auszusprechen. Dabei ist zu bemerken, dass in den Principien der Mechanik kein Anlass vorkommt das vorausgesetzte ruhende Axensystem zu bestimmen; die Bestimmung bleibt der angewandten Mechanik vorbehalten, welche erst die dazu nötigen Beobachtungsdata dazu bringt.

In dem citirten Satze der Vorrede ist demnach irrig, dass der Begriff absoluter Bewegung „auf keine Erfahrung gestützt", und dass er „unfruchtbar" sei; es ist aber auch ferner ganz unzutreffend, dass der Verfasser ihn habe „fallen lassen". Im Gegenteil vollzieht er schon auf 2. Seite erklärtermassen den Uebergang von der relativen zur absoluten Bewegung durch die Bestimmung, dass das Fundmental-Axensystem beständig dasselbe bleiben, und nur von Ruhe und Bewegung schlechthin die Rede sein soll, wo nicht ausdrücklich eine Relativität zu irgend einer Bewegung angegeben ist. Hiermit wird er in der Tat innerhalb der Grenzen des Buchs, die ja nur die reine Mechanik enthalten, also die Einführung von Datis aus der Wirklichkeit ausschliessen soll, der Forderung gerecht. Denn die Ruhe des Fundamental-Axensystems ist dadurch implicite zur Voraussetzung gemacht. Nun soll aber das Buch Vorstudium auch für die angewandte Mechanik sein, und, wenn dies nicht auf dem Titel stünde, selbstverständlich kann man von der reinen Theorie verlangen, dass sie sich nicht bei Anwendung auf die Wirklichkeit falsch erweist. Da zeigt sich denn doch die vom Verfasser getroffene Auskunft, das

Motiv der Anordnung, die Frage, ob dieselbe notwendig oder willkürlich sei, mit Stillschweigen zu übergehen, durchaus unzulässig. In der Tat ist die Voraussetzung absoluter Ruhe des Fundamental-Axensystems notwendig, und bei jeder Anwendung auf die Wirklichkeit muss gefragt werden, ob dasselbe wirklich ruht; denn dadurch ist die Gültigkeit der Resultate reiner Mechanik bedingt, wie z. B. der Fall des Foucault'schen Pendels zeigt. Spätere Bemerkungen scheinen das Versäumte im einzelnen nachholen zu sollen, doch ersetzen können sie es nicht, sie sind an unrechter Stelle angebracht undeutlich und lassen Begründung vermissen.

Die vorliegende Lieferung erstreckt sich auf Statik und Dynamik eines Punktes, woraus zu ersehen, dass zum obersten Einteilungsprincip die Unterscheidung des Kraftobjectes, Punkt und Körper oder Punktsystem, gewählt ist, während die nächste Untereinteilung in Statik und Dynamik wie sonst bestehen bleibt. Der Lehrgang unterscheidet sich nicht wesentlich von dem der gewöhnlichen analytischen Mechanik; wie dieser schreitet er in allgemeinster Form und Auffassung, wiewol mit Bevorzugung graphischer Darstellung fort — man müsste es denn als ein synthetisches Element ansehen, dass die Kräfte in der Ebene den Kräften im Raume vorhergehen. Hervortretend ist dagegen die ungemeine Ausführlichkeit und Gründlichkeit der Darstellung von Gegenständen, die sich nur wenig über die ersten Anfänge erheben. Was man sonst kurz zusammenzufassen pflegt, ist vielfach zerlegt und ausgebreitet. Der in der Dynamik unentbehrliche Grundsatz, dass die relative Wirkung jeder Kraft unabhängig von der Bewegung des Objects ist, ist zum Ausgangspunkt der Statik gemacht und wird beständig angewandt. Er enthält offenbar das Parallelogramm der Kräfte und die gesamte Theorie der Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte in einen Gedanken zusammengefasst, und es war leicht dieselbe sofort im ganzen daraus herzuleiten. Obwol auch hier die Begründung ganz darauf beruht, so wird doch das Ziel erst nach vielen Betrachtungen erreicht. Einer Rechtfertigung bedarf dies Zuwerkegehen nicht: es richtet sich nach dem besondern Bedürfniss der Lernenden. H.

Sammlungen.

Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen. Von Dr. Hermann Schubert, Oberlehrer an der Gelehrtenschule des

Johanneums in Hamburg. Erstes Heft: Für mittlere Klassen. Zweites Heft: Für obere Klassen. Potsdam 1883. Aug. Stein. 448 S.

Diese Aufgabensammlung zeichnet sich besonders durch Vielseitigkeit aus. Der Umfang der Operationen, auf deren Einübung sie eingerichtet ist, entspricht den gesetzlichen Anforderungen der Schulexamina. Doch sind ausser den Operationen noch mancherlei Gegenstände in den Kreis der Uebungen gezogen, namentlich die Algorithmen einschliesslich aller die Form der Schreibung und geordneten Ausführung betreffenden Regeln. Auch ist die auf Arithmetik bezügliche alte Geschichte der Griechen, Römer und andrer Völker viel berücksichtigt. Alle nötigen Erklärungen, Sätze und Regeln sind derart aufgeführt, dass der Gebrauch eines besonderen Lehrbuchs bei den Uebungen entbehrlich wird. Die Auswahl der Beispiele, die teils in Formel, teils in Worten und Einkleidung, woraus der Formelansatz zu finden ist, gegeben sind, ist vortrefflich. Sie beanspruchen im ganzen ziemlich viel Selbstdenken der Schüler. Die 7 Abschnitte sind: Einführung in die arithmetische Sprache; Operationen erster, zweiter Stufe, Anwendungen der Gesetze beider (Gleichungen 1. Grades), Quadratisches (Gleichungen 2. Grades), die 3 Operationen 3. Stufe, Combinatorik, Kettenbrüche, diophantische Gleichungen und einige Gegenstände höherer Arithmetik und Algebra. H.

Rechenbuch für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen, Realschulen, höhere Bürgerschulen, Seminare etc. Von Christ. Harms, Professor an der Realschule in Oldenburg, und Dr. Alb. Kallius, Oberlehrer am Königstädtischen Gymnasium in Berlin. Zehnte Auflage. Oldenburg 1883. Gerhard Stalling. 262 S.

Die 3. Auflage ist im 224. litt. Bericht S. 35, die 6te im 251. litt. B. S. 36 besprochen. Veränderungen haben nicht stattgefunden, nur in der 8ten betreffend die Orthographie. H.

Physikalische Aufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Von Dr. Karl Jansen, Ordentlichem Lehrer am Realgymnasium zu Düsseldorf. Freiburg im Breisgau 1883. Herder. 150 S.

Diese Sammlung von 558 Aufgaben ist zum Gebrauche der Schüler bestimmt und schliesst sich dem physikalischen Unterricht in Prima an, wie er etwa dem Lehrbuch von Münch entspricht. Die Aufgaben verlangen, mit einzelnen Ausnahmen, Ausrechnung aus Datis, die, namentlich in der Mechanik, die analytische Ausdrucksform (in Coordinaten u. s. w.) anwenden. Sie setzen die idealisirte Auffassung aus

der Wirklichkeit entnommener Gegenstände und Vorgänge, mithin Isolirung der Kraftwirkungen voraus, d. h. mit Ausschluss aller Correctionen. Der erste Teil umfasst die Mechanik, in grösster Ausdehnung die der starren Körper, doch sind Stoss, Reibung, Fluida und Gase gleichfalls berücksichtigt. Der zweite Teil betrifft die Akustik, Optik, Wärme, Magnetismus und Elektricität. Dann folgen die Resultate aller Aufgaben, endlich eine Anzahl physikalischer Tabellen. H.

Zur Nachricht für Mathematiker, besonders Freunde meiner Aufgabensammlung. Von E. Bardey. Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht, Bd. XV. Heft 3. 8 S.

Der Artikel ist Entgegnung auf Sinram's „Erwiderung betreffend Bardey's Aufgabensammlung", im 279. litt. Bericht S. 28. Sinram's Schrift ist hervorgerufen durch die darin citirte Aeusserung Bardey's, in welcher letzterer sich den Anschein gibt, als wenn ausser 3 genannten Aufgaben keine Entlehnung aus fremden Sammlungen stattgefunden hätte, womit Sinram indirect der Unwahrheit beschuldigt war — und begegnet der Beschuldigung durch Aufweisung einer hinreichenden Anzahl übereinstimmender Aufgaben. In Bardey's gegenwärtiger Schrift wird die factische Uebereinstimmung bei keinem der von Sinram angeführten Beispiele bestritten, ausserdem unter IV. erst im allgemeinen die Aehnlichkeit bei sehr vielen, dann die Aufnahme von 6 bestimmten, und unter III. die Aufnahme anderer, nur mit Zurückführung der Autorschaft von Heis auf M. Hirsch, eingeräumt. Hiermit ist die Angelegenheit, soweit sie den Artikel im Archiv betrifft, erledigt. Die Frage, ob eine neue Verwendung schon früher publicirter Aufgaben verwerflich sei, beschäftigt uns nicht, und würde überhaupt kein Interesse haben, wofern der Verfasser nicht sagt oder andeutet, dass er auf Originalität Anspruch macht. Auch auf sonstige Angaben über das Verhältniss zwischen den Sammlungen von Bardey und Heis und Andern gehen wir nicht ein, verweisen dagegen auf die Würdigung, welche der Verfasser in der ausführlicheren Brochüre herausgeg. von den Schulinspectoren J. Klein und J. Hoffmann unter dem Titel: „Antwort auf die Auslassungen Dr. Bardey's in dem 2. Hefte der Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht von J. C. V. Hoffmann 1883 über das von den Unterzeichneten herausgegebene Rechenbuch für Seminaristen und Lehrer. Düsseldorf 1883" — erfahren hat. Hoppe.

Tabellen.

Tables de logarithmes à six décimales construites sur un plan nouveau par Adolphe Benoist. Docteur en droit, Membre de la Société Mathématique de France. Sechsstellige Logarithmen-Tafeln. Nach einem neuen Plane zusammengestellt von Adolph Benoist. Paris. Ch. Delagrave (W. Hinrichsen). 391 S.

Auf die neue Anordnung legt der Verfasser als eigne Erfindung Gewicht. Die Entrees sind im Hauptteil dieselben wie bei den siebenstelligen Tafeln von Bremiker; von den 6 Stellen der Logarithmen sind die 2 ersten der je 5ten Zeile vorgedruckt. In den trigonometrischen Tafeln sind die Complementarfunctionen nicht neben einander gestellt, sondern die Winkel von 0 bis 90° durchgeführt; nur die Logarithmen der Sinus und Tangenten stehen auf den 2 zugleich sichtbaren Seiten neben einander; die Sechstel der Minuten gehen durch eine Zeile. Neu berechnet und hinzugefügt ist links vom Entree der Differenzentafeln die antilogarithmische Differenzentafel, d. h. die Angabe der Differenzen der Zahlen für die Einheiten der Differenzen der Logarithmen. Die bei Bremiker unter der Zahlentafel befindliche Ergänzungstafel für kleine Kreisbogen ist beibehalten.

H.

Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln nebst einer grösseren Anzahl von Hilfstafeln, herausgegeben von Dr. Adolf Greve, Oberlehrer am Karls-Gymnasium zu Bernburg. Bielefeld und Leipzig 1884. Velhagen u. Klasing. 171 S.

Die Tafel ist für den Gebrauch in der Schule und im gemeinen Leben bestimmt. Sie zeichnet sich durch sehr deutlichen Druck bei mässig grossen Ziffern aus und unterscheidet sich durch Angabe der Secunden-Differenzen und sehr viele Zugaben teils an Formeln, teils an kleineren Tafeln. Unter letztern sind zu nennen die Tafeln zur Berechnung 12stelliger Logarithmen, 7stelliger Logarithmen und 8-stelliger Antilogarithmen, die 8stelligen brigg'schen und natürlichen Logarithmen der Primzahlen < 1000, und Vielfache des Modulus, eine Factorentafel bis 1000; mehrere zur Ergänzung und Gebrauchserleichterung dienende Tafeln für trigonometrische Tafeln, 7stellige trigonometrische Zahlen für alle Grade, Quadrate bis 1000, Kuben bis 100, 4. 5 ... 9te Potenzen bis 30, Potenzen von 2, 3, 5, Quadratwurzeln bis 100, Binominalcoefficienten, 7stellige Producte, physikalische Tafeln, die Werte vieler Ausdrücke in π, u. a. m.

H.

Fünfstellige Logarithmen-Tafeln. Von Friedrich Wilhelm Rex. Erstes Heft. Die Logarithmen der Zahlen und der goniometrischen Formeln. Zweites Heft. Die Additions- und Subtractionslogarithmen der Werthe $\frac{1+x}{1-x}$, Neper'sche Logarithmen, natürliche Zahlenwerthe der goniometrischen Functionen und Bogenlängen, Sehnen und Pfeilhöhen; Potenzen- und Kreistafel; Quadrattafel, Reciprokentafel; Anhang. Stereotyp-Druck. Stuttgart 1884. J. B. Metzler. 174 + VIII S.

Das höhere Format hat der ersten Tafel den Vorteil gebracht, dass je 1000 Zahlen auf 2 Nebenseiten stehen. Am Schluss derselben folgen die 7stelligen Logithmen der ersten 1000 fünfziffrigen Zahlen, dann Werte einzelner Irrationalen, log n! etc., bernoullische Zahlen. Die trigonometrische Tafel geht in den 6 ersten Graden durch die Sechstel Minuten, mit Beifügung des Entrees in Secunden, dann von vorn beginnend durch die Minuten. Ihr folgt eine Tafel zum Uebergang von $\log \operatorname{tg} x$ auf $\log \cos x$, $\log \sin x$. Den Inhalt der übrigen Tafeln gibt der Titel. Ein Anhang enthält physikalische Tabellen.

H.

Vermischte Schriften.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 3. Stockholm 1884. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Herman.

Der Inhalt des 3. Bandes ist folgender.

L. Koenigsberger: Ueber die einer beliebigen Differentialgleichung 1. Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten.

H. Poincaré: Abhandlung über die Klein'schen Gruppen.

M. Krause: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen. — Ueber die Transformation der hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung. — Ueber den Multiplicator der hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung.

L. Lindelöf: Eine Frage über lebenslängliche Renten.

Hj. Mellin: Eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

Ueber gewisse durch die Γ Function ausdrückbare unendliche Producte.

C. de Sparre: Ueber die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left[2\nu\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x}+2\nu_1\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}-2\nu_2\frac{\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}\right]\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$=\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1)+\frac{\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)+\frac{k^2\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\cdot\right.$$

$$\left.(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)+k^2\mathrm{sn}^2 x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1)+h\right].$$

E. Beltrami: Ueber die elektromagnetischen Niveauschichten.

C. Le Paige: Ueber Flächen 3. Ordnung.

F. Prym: Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. — Ableitung einer allgemeinen Thetaformel.

A. Krazer und F. Prym: Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel.

A. Steen: Note über gewisse lineare Differentialgleichungen.

G. H. Halphen: Ueber die Invarianten der linearen Differentialgleichungen 4. Ordnung. H.

Bulletin de la Société Mathématique de France, publié par les secrétaires. Tome XI. Année 1882—83. Paris 1883. Au siège de la société.

Der 11. Band enthält folgende Abhandlungen.

E. Lemoine: Einige Wahrscheinlichkeitsaufgaben geometrisch gelöst.

E. Picard: Ueber die Reduction der Anzahl der Perioden der Abel'schen Integrale, insbesondere im Fall der Curven 2. Art.

Fouret: Ueber eine Eigentümlichkeit in Betreff zweier materieller Systeme aus gleichvielen Punkten von gleichen Massen.

Zeller: Doppeltes Fundamental-Kalender-Problem.

Perrin: Ueber den Fall der Lösbarkeit der Gleichung 5. Grades durch Wurzelausdrücke. — Note über die Residua der Invarianten und Covarianten der binären Formen.

Appell: Ueber gewisse Reihenentwickelungen von Potenzen.

E. Lucas: Beweis des Satzes von Clausen und Staudt über die Bernoulli'schen Zahlen.

David: Ueber 2 neue Reihenausdrücke für den sin und cos eines gegebenen Bogens.

N. Vaněček: Ueber die Ellipsen beschrieben durch die Punkte, welche unveränderlich an ein constantes Segment gebunden sind.

Poincaré: Ueber einen Satz aus der allgemeinen Theorie der Functionen. — Ueber die Functionen Θ. — Ueber die ganzen Functionen.

Bobek: Bemerkung über die Strictionslinie des einschaligen Hyperboloids.

D'Ocagne: Ueber den Krümmungsmittelpunkt der Verfolgungscurven.

Goursat: Ueber die Differentialgleichungen 4. Ordnung, deren Integrale eine homogenen Gleichung 2. Grades erfüllen.

Perrot: Ueber das Läufer-System.

Lucien Lévy: Ueber die abwickelbaren Flächen, welche durch Berechnung eines Büschels von parallel auf eine gegebene Curve fallenden Lichtstrahlen gebildet werden. H.

Litterarischer Bericht.

III.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Ueber Beta- und Gammafunctionen. Von Phil. Dr. J. Anton Schobloch. Halle 1884. Louis Nebert. 4°. 11 S.

Der Aufsatz enthält mannichfache Versuche in der Theorie der Euler'schen Functionen etwas neues zu finden. Die letzte Formel beweist, dass die Anstrengungen nicht ganz ohne Erfolg waren. Die Untersuchung beginnt mit dem ersten Euler'schen Integral, das gewöhnlich mit B bezeichnet wird, geht aber sehr bald unabänderlich auf den Fall über, wo das eine der 2 Argumente eine ganze Zahl ist. Hier ist B keine Transcendente mehr, sondern eine rationale Function des andern Arguments, die auch in Gl. (5) angegeben ist. Daher hat auch Gl. (7), die wol auch in der Theorie der bestimmten Integrale kein neues Resultat vorstellen soll, keine directe Beziehung zu jenen Transcendenten. Sie wird angeblich als Quelle neuer Sätze aufgestellt. Was daraus abgeleitet wird, ist die Gl. (11), mit welcher die Betrachtung der B überhaupt schliesst. Dieses Endergebniss ist nun eine reine Identität von Producten linearer Binome, deren Factoren alle einzeln auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, bedurfte also nicht der Rechnung mit bestimmten Integralen. Dieselbe wird in der Form (15) mit ΓFunctionen geschrieben, was eine unwesentliche Aenderung der Schreibart ist. Zu diesem Zwecke wollte der Verfasser an bekannte Beziehungen der B und Γ erinnern. Dass er aber die Gl. (13) und (14), deren erstere nicht einmal in Anwendung kommt, erst herleitet, überdies mit demselben ungerechtfertigten

Uebergang zur Grenze, den Gauss sich erlaubt, war jedenfalls sehr überflüssig und inconsequent, da er die eigentliche Relation der B und Γ unmittelbar als bekannt aufstellt. Nach Ausdruck der B in Γ erhält er die Gl. (20), welche nichts weiter ist als die Gauss'sche Relation der Γ nach Division zweier Werte beider Seiten der Gleichung, die jedoch, obwol sie allgemein gilt, hier nur für ganze Zahlen a und b bewiesen auftritt.. Bis dahin besteht also die ganze Leistung nur in Umschreibung selbstverständlicher oder bekannter Gleichungen. Solche Umschreibungen können sehr nützlich sein, wenn sie dem Zwecke einer Untersuchung durch veränderte Auffassungsform dienen. Hier ist es aber umgekehrt: ein längerer Transformationsweg führt nur zu einer Schreibweise, deren Anwendung schwerlich je vorkommt. Die folgende Untersuchung beginnt mit einer, absichtlich herbeigezogenen, gänzlich zwecklosen Umschreibung, mit der sie übrigens gar nichts zu tun hat. Der Verfasser nennt das Integral

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n} \partial x$$

welches jedermann für eine Γ Function mit dem Factor $\frac{1}{n}$ ansehen wird, eine „Verallgemeinerung der Γ Function“ und bezeichnet sie als Function zweier Variabeln, trotzdem er dessen Ausdruck in Γ bald findet, und der Factor $\frac{1}{n}$ in allen Formeln sichtlich ein unregelmässiges Element bildet. Von dieser capriciösen Schreibweise abgesehen ist der Untersuchungsgang derjenige, welchem die Herleitung der Gauss'schen Relation den Weg zeigt. Es wird $\log \Gamma(b)$ durch ein bestimmtes Integral dargestellt, für b eine arithmetische Reihe substituirt, und die Summation vollzogen. Nur ist bei jener das Intervall $= 1$, hier beliebig. Nach Subtraction zweier Ausdrücke derselben Form, aber beliebig verschiedener Gliederzahl gibt sich leicht ein Fall zu erkennen, in welchem das Integral in endlicher Form darstellbar ist, indem derjenige Teil der zu integrirenden Function, dessen Nenner 2 binomische Factoren hat, wegfällt. Die Specialisirung lässt die 2 ganzen Zahlen p, q unbeschränkt und reducirt nur die 2 Irrationalen auf eine. Um sichtbar zu machen, dass eine solche willkürlich bleibt, wollen wir im Schlussergebniss für n, k, m schreiben pv, qv, $pquv$; dann lautet die Gl. (31):

$$\prod_{h=0}^{h=p-1} \Gamma\left(qu + \frac{hq}{p}\right) : \prod_{h=0}^{h=q-1} \Gamma\left(pu + \frac{hp}{q}\right) = (2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{pqu + \frac{pq-p-q}{2}}$$

Hier ist zugleich ein Fehler berichtigt, der sich durch eine Reihe von Gleichungen hinzieht und dadurch entstanden ist, dass die Multiplication einer Gleichung bei einem Term vergessen worden ist;

statt des Exponenten $\frac{n-k}{2}$ muss stehen $p^{\frac{n-k}{2n}}$ Die gesamte Arbeit darf man wol für ein Specimen halten, durch welches der Verfasser seine Fertigkeit in der Behandlung bestimmter Integrale dartun wollte. In diesem Sinne wird freilich das Urteil von aller darin enthaltenen Mystification wenig berührt. H.

Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen. Von Dr. C. Reuschle, Professor an der technischen Hochschule in Stuttgart. Stuttgart 1884. J. B. Metzler. 64 S.

Das Princip in noch ziemlich specieller Gestalt, wie es jedoch nach Erfahrung des Verfassers für den Erfolg die günstigste ist, ist folgendes. Durch lineare Substitution kann man im voraus einen Coefficienten der Gleichung zu 0, zwei andre zu 1 machen. Sie laute alsdann:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + c_1x^{n-3} + \ldots + c_{n-6}x^4 + dx^3 + x^2 + 1 = 0$$

dann lässt sie sich zerlegen in

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$x^{n-2}y + c_1x^{n-3} + \ldots c_{n-6}x^4 + dx^3 + x^2 + 1 = 0$$

Betrachtet man x, y als Coordinaten, so geht die erstere Gleichung aus der der Parabel

$$y = ax^2$$

durch Verschiebung in der x und y Richtung ohne Drehung hervor. Zeichnet man nun auf ein in Millimeterquadrate geteiltes Blatt die der zweiten Gleichung entsprechende Curve und auf Pauspapier die Parabelschar $y = ax^2$ nebst Axen, so geben nach gehöriger Verschiebung des letzterem auf ersterem die Abscissen der Schnitte der Parabel a mit jener Curve sämtliche reelle Wurzeln der Gleichung. Die besondere Zeichnung der Curve für jeden neuen Fall wird erspart, wenn $n \overline{\overline{<}} 6$ ist. Bei Gleichungen 6. Grades hängt sie nur von einem Parameter d ab; diese werden daher gelöst durch Verschiebung einer Parabelschar auf einer einfach unendlichen Curvenschar, welche ein für allemal zu zeichnen ist und dann für alle Fälle ausreicht. Bei Gleichungen 5. Grades fällt auch d weg, und es ist statt der Curvenschar nur eine Curve zu zeichnen. Man hat dann überdies die Wahl, ob man lieber eine Parabel $y = x^2$ auf einer Curvenschar verschieben will, indem man bei Reduction der Gleichung $a = 1$ macht und den Coefficienten von x^2 stehen lässt. Beide Vorteile hat nun der Verfasser ausser Acht gelassen, es ist nicht zu verstehen

warum. Er reducirt nämlich anfangs nur einen Gleichungscoefficienten auf 1, den zweiten erst nachträglich bei der Gleichung 6. Grades, wo es als unentbehrliches Auskunftsmittel erscheint. Zur Auflösung der Gleichung 5. Grades, sagt er ausdrücklich, müsse eine Parabelschar auf einer „Hyperbelschar“ verschoben werden. Bei den Gleichungen niederer Grade treten weitere Vereinfachungen ein, die leicht zu finden sind. Die praktischen Fragen sind reichlich erwogen und auseinandergesetzt, viele Figuren dazu in den Text eingelegt. Ferner werden vielerlei Modificationen des Verfahrens besprochen. Da nun für die gesamte Anwendung nur einige völlig individuelle Figuren erfordert werden, die nur in der Ausdehnung und Linieneinheit variiren können, und für letztere der Verfasser 2 Centimeter als die günstigste Grösse betrachtet, so ist der Gedanke an die Hand gegeben, wiewol nicht ausgesprochen, die erforderlichen Zeichnungen gedruckt herauszugeben, wodurch die Anwendung des Verfahrens für den Einzelnen bedeutend erleichtert und seiner Aufnahme eine weit grössere Verbreitung verschafft sein würde. In einer Note empfiehlt der Verfasser, statt des Pauspapiers Gelatine-Papier zu nehmen. H.

Théorie des approximations numériques. Notions de calcul approximatif. Par Ch. Galopin-Schaub, Docteur ès sciences mathématiques (de la Faculté de Paris). Genève 1884. H. Georg. 50 S.

Das Buch ist zur Belehrung von Studenten bestimmt, bei denen der Verfasser die Kenntniss und Beachtung der Regeln approximativer Rechnung sehr vermisst hat. Es macht nicht den Anspruch vollständiger oder wissenschaftlicher zu sein als seine Vorgänger, bestrebt sich aber klare und leicht anwendbare Regeln in logischer Ordnung zu geben, mit denen Beispiele zur Unterstützung verbunden sind, wo es förderlich schien. Dies sind die Gesichtspunkte laut der Vorrede. In der Tat kann es bei einem Gegenstande, der für einen entwickelten Verstand kaum etwas unbekanntes enthalten kann, nur die Klarheit des Ausdrucks sein, was man an der Bearbeitung sucht. In dieser Hinsicht leistet der Vortrag etwas zu viel in Verschweigung alles zum Verständniss notwendigen. Ohne glückliche Conjectur wird man nirgends erraten, wovon der Verfasser spricht. Um welche Aufgabe es sich handelt, ist nirgends gesagt. Vielleicht hat der Verfasser Gewöhnung an gewisse familiäre Redeweisen bei seinen Lesern vorausgesetzt. In weiterem Kreise möchte jedenfalls das Buch von keiner Anwendung sein. H.

Observations relatives à une note précédente de M. Menabrea, concernant la série de Lagrange. Par A. Genocchi. Comptes Rendus.

Das Vorliegende berichtigt einen Artikel in den Comptes Rendus von Menabrea, worin dieser zu beweisen versucht, dass die zwei Kriterien der Convergenz der Lagrange'schen Reihe für die Auflösung der Gleichung $x = u + f(x)$, aufgestellt von Lagrange und von Cauchy, identisch seien. Beide stimmen nur überein, solange die Terme der Reihe für $f(x)$ positiv sind. Sind sie es nicht, so würde man zur Anwendung der Lagrange'schen Formel ihre absoluten Werte nehmen und die so entstehende Function für $f(x)$ substituiren müssen, während die Cauchy'sche Formel allgemein gilt. Chiò hat zuerst gezeigt, dass die Formel von Lagrange nicht allgemein ist. Ferner erklärt Genocchi die Behauptung für unrichtig, dass Lagrange mit seiner Convergenzregel die notwendige Bedingung habe geben wollen, unter der die Reihe die kleinste Wurzel ausdrückt. Es liegen hier zwei Schriften von Lagrange vor: in der ersten von 1768 unterscheidet er die kleinste Wurzel nicht, während er von der Convergenz handelt, in der zweiten von 1798 sucht er die Reihenentwickelung für die kleinste Wurzel ohne die Frage nach der Convergenz zu berühren. Schliesslich erklärt Genocchi den von Menabrea gegebenen Beweis, dass die Lagrange'sche Reihe, wenn sie convergirt, die kleinste Wurzel darstellt, für unzureichend, doch könne man ihn ergänzen mittelst eines Theorems von Chiò. H.

Intorno alla funzione $\Gamma(x)$ e alla serie dello Stirling che ne esprime il logaritmo memoria di Angelo Genocchi. Napoli 1883. Tipogr. d. R. Acc. d. scienze. 4⁰. — 18 S.

Ancora la serie dello Stirling, nota del Prof. Angelo Genocchi. Append. a. prec. mem. 4⁰. — 6 S.

Die Schrift hat Arbeiten aus älterer Zeit vom Verfasser und von einer grössern Anzahl Autoren, welche die approximative Berechnung von $\log \Gamma(x)$ untersucht haben, Euler, Gudermann, Binet, Liouville, Schaar, Poisson, Abel, Plana, Gauss, Mascheroni, Bidone, De Gasparis, Bourgnet, zum Gegenstand und gibt ausführliche Herleitungen und Beweise, welche die Resultate derselben in neue Verbindung bringen. H.

Ueber die quadratischen und kubischen Gleichungen mit besonderer Berücksichtigung des irreducibeln Falles bei den letzteren. Von

Professor C. Hellwig, Oberlehrer am Realgymnasium in Erfurt. Erfurt 1884. Carl Villaret. 41 S.

Das Buch ist so bearbeitet, dass ein mässig befähigter Schüler der mittleren Classen ohne weitere Hülfe die Theorie daraus erlernen kann. Die Vollständigkeit dieser Theorie geht aus dem hier folgenden Inhalt hervor: Entstehung der Gleichungen 2. Grades, Wurzeln derselben; Rechnungsverfahren bei der Auflösung quadratischer Gleichungen; die Arten derselben, imaginäre und complexe Wurzeln (Discriminante), Determination der Wurzeln; Bestimmung der Wurzeln durch trigonometrische Functionen; Verwandlung von Ausdrücken quadratischer Form in Producte von linearen Factoren; die Wurzeln der Gleichungen 3. Grades, im besonderen der binomischen; die Auflösung vollständiger kubischer Gleichungen; Vereinfachung der Ausdrücke für irrational erscheinende rationale, sowie für complex erscheinende reelle Wurzeln einer kubischen Gleichung (irreducibler Fall); Berechnung der irrationalen Wurzeln für letztern; andre Methode zur Herleitung der Wurzelformen einer kubischen Gleichung; allgemeine Betrachtung über deren Wurzeln; Auflösung der kubischen Gleichungen mit Hülfe trigonometrischer Functionen. Eigentümlich in der Behandlung ist zunächst die Vermeidung der Nenner. Da sie auch beim praktischen Rechnen von Nutzen sein kann, so mag sie für gerechtfertigt gelten. Die dadurch veranlasste Scheidung von Fällen ist im Grunde überflüssig, der erste immer ausreichend; doch kann man die übrigen als förderliche Zugabe ansehen. Eine Beschränkung der mit Buchstaben bezeichneten Gegebenen auf ganze Zahlen ist nicht ausgesprochen, obwol sie gewiss im Sinne des Verfassers lag. Dagegen ist die Beschränkung des Gebrauchs der Buchstaben auf positive Werte stillschweigende Voraussetzung; denn $\sqrt{-c}$ wird als imaginär betrachtet. Dies ist entschieden zu missbilligen. Wenn der Schüler bis dahin in der Gewohnheit befangen war, den Buchstaben als Zeichen für eine positive Zahl anzusehen, so setzt jedenfalls die Lehre von den Gleichungen den äussersten Termin von dieser Gewohnheit, der Quelle unklarer Begriffe für spätere Zeit, abzulassen; denn das gesuchte x muss doch jeder Art Zahlen bezeichnen können. Günstig für das Verständniss ist die Breite der Entfaltung des Stoffes und die Vielseitigkeit der Betrachtung. Unrichtig ist die auf erster Seite stehende Behauptung, die Wurzel einer quadratischen Gleichung befriedige „gleichzeitig“ zwei lineare Gleichungen. H.

Geometrie.

Die Elemente der projectivischen Geometrie. Von Dr. Emil Weyr, o. ö. Professor an der k. k. Universität in Wien. Erstes Heft. Theorie der projectivischen Grundgebilde erster Stufe und der quadratischen Involutionen. Mit 58 Holzschnitten. Wien 1883. Wilhelm Braumüller. 231 S.

Das Vorliegende behandelt nach einer erklärenden Einleitung: die Bestimmung der Elemente der Grundgebilde 1. Stufe; das Doppelverhältniss; vollständige Figuren; die Sätze von Carnot und Ceva; die perspectivische Raumansicht; das Reciprocitätsgesetz und die Elementenbestimmung in den Grundgebilden höherer Stufe; perspectivische Gebilde; projectivische Gebilde; ähnliche und congruente Gebilde; conlocale projectivische Gebilde, Doppelelemente; den Kreis; die Involutionen; eine allgemeinere Auffassung der Projectivität; die cyklische Projectivität; harmonische Mittelpunkte einesTripels; Rechnungsoperationen mit Teilverhältnissen. Die folgenden Hefte sollen die Lehre von den Curven und Flächen 2. Grades und die von den Raumcurven 3. Grades, das letztere einen Litteraturausweis, soweit er bei der elementaren Natur des behandelten Stoffes als notwendig erscheinen sollte, enthalten. Das Ganze ist zunächst dazu bestimmt, als Leitfaden für die Vorlesungen des Verfassers über neuere Geometrie an der Wiener Universität zu dienen. Es ist indes mit einer so musterhaften Klarheit und Leichtfasslichkeit abgefasst, dass es zum Gebrauch als Leitfaden in weiterem Kreise und zum Selbstunterricht empfohlen werden kann. H.

Apolarität und rationale Curven. Eine systematische Voruntersuchung zu einer allgemeinen Theorie der linearen Räume. Von Dr. W. Franz Meyer, Privatdocent an der Universität Tübingen. Tübingen 1883. Franz Fues. 406 S.

Das Werk ist eine Fortbildung der Apolaritätstheorie von Theodor Reye. Den Gegenstand kann man ebensowol als Ausdehnung einer gewissen Seite der Geometrie auf beliebig viele Dimensionen wie als algebraische Theorie mit Unterstützung und Leitung durch geometrische Begriffe auffassen. Ein Unterschied wird dadurch so wenig herbeigeführt, dass vielmehr beide Betrachtungsweisen für einander unentbehrlich scheinen und erst vereinigt die Gesichtspunkte und die Abgrenzung der gesamten Theorie ergeben. Auf das Wesen der Theorie können wir hier nicht wol eingehen, weil zu viele Einführungen erklärt werden müssten. Die Abfassung des Buchs selbst, auf das wir nur verweisen können, ist nicht leicht verständlich: es

setzt nicht bloss allgemeine Kenntnisse, sondern auch die Bekanntschaft mit Reye's Geometrie voraus, gibt demnach über viele Punkte keine unmittelbare Erklärung, wenn gleich die Angaben im ganzen zureichend sind, um den Sinn ziemlich mühevoll herauszufinden. Die Abschnitte sind: Die rationalen Curven. Die Reye'sche Apolarität und die Normcurven, und zwar: die Normcurven (speciell der Ebene und des Raumes); die binäre biquadratische Form f und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven 2., 3. und 4. Ordnung; die binäre Form 6. Grades f und die biquadratische Involution und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven 2., 3. und 4. Ordnung; die biquadratische Involution auf der kubischen Raumcurve (2. Teil). Verallgemeinerungen. Als Vorgänger in der Bearbeitung werden nach Reye genannt: H. H. Sylvester, Smith, Gordan, Brill, Sturm, Em. Weyr, G. Veronese und Stéphanos, und zwar sind die Arbeiten von Brill und Stéphanos in der Zwischenzeit erschienen. H.

C. H. Kummell. Alignment curves on any surface, with special application to the ellipsoid. Bulletin of the Philosophical Society of Washington VI. 123—132.

Das Motiv der Untersuchung geht zwar aus der Landesvermessung hervor, doch sind die behandelten Fragen rein analytisch geometrische. Die Aufgabe ist anfänglich sehr unbestimmt aufgestellt, die spätere Bestimmung im einzelnen beruht auf blosser Auswahl. Dem Wortlaut nach soll auf einer krummen Fläche eine Reihe von Punkten angegeben werden, in denen die Normalen gegeben sind. Letzteres trifft nicht zu; es ist wol nur gemeint, dass überhaupt eine gewisse Lotrichtung vorausgesetzt werde, die jedoch überall mit der Flächennormale identificirt wird. Dagegen ist nicht ausgesprochen, was doch factisch das Gemeinsame ist, dass die Punktreihe für die Vermessung die Stelle der geraden Linie vertreten soll. Es werden nun 3 Fälle unterschieden: je nachdem man von einem Punkte in beliebiger Richtung fortschreitet, oder einen zweiten Punkt zum Ziele nimmt, oder endlich vor und zurück visirt. Hieraus sollen angeblich eine gewisse Anzahl von Curven hervorgehen. Offenbar kann jede analytisch bestimmte Curve für den einen Fall auch für den andern dienen. Für den ersten wird allein der Normalschnitt aufgestellt, der für den zweiten nur nicht umkehrbar sein würde. Beim zweiten Falle wird ausser der Kürzesten und Loxodrome diejenige Curve genannt, längs welcher die Normalen durch die Sehne zwischen den zwei Endpunkten gehen. Hiervon wird Anwendung auf die Fläche 2. Grades gemacht, wo die von den genannten Normalen erzeugte Fläche ein Hyperboloid ist, dann insbesondere auf das Ellipsoid. H.



C. H. Kummell. The theory of errors practically tested by target-shooting. Bull. of the Phil. Soc. of Washington VI. 138—148.

Nach dieser Theorie bilden die Deviationen der Schüsse von gleicher Wahrscheinlichkeit nach allen Richtungen um den Zielpunkt Ellipsen, deren Axen horizontal und vertical durch den Zielpunkt gehen. Diese Ellipsen werden hier durch Substitution neuer Coordinaten auf Kreise reducirt. Ferner wird die Wahrscheinlichkeit des Treffens einer solchen Ellipse berechnet. Nach Reproduction dessen, was Herschel hierin in Ausführung gebracht, wird weiter untersucht die Ellipse, bei welcher „das Treffen und Nichttreffen gleiche Wahrscheinlichkeit hat", die Ellipse von grösster Wahrscheinlichkeit, und manche andere Fragen. H.

Analytische Geometrie der Kegelschnitte nach elementarer Methode für höhere Schulen. Von W. Fuhrmann, Oberlehrer am Realgymnasium auf der Burg in Königsberg i. Pr. Mit 27 Figuren im Text und 2 Tafeln. Berlin 1884. Winckelmann u. Söhne. 144 S.

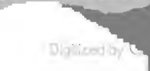
Gegenüber zahlreichen Lehrbüchern der speciellen Coordinatenlehre, die sich den Titel „Analytische Geometrie" ohne Erklärung des Wortsinns fälschlich beilegen, verdient es bemerkt zu werden, dass das gegenwärtige über den begrifflichen Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Methode eine Aufstellung macht, die wol neu sein möchte, jedenfalls aber nicht recht überlegt ist. Nach den Anfangsworten ist sie synthetisch oder analytisch, je nachdem die Grundgebilde, relativ zu welchen alle Bestimmungen gemacht werden, zur betrachteten Figur gehören oder davon unabhängig sind. Demgemäss müsste sie in die synthetische übergehen, sobald man z. B. die Axen des untersuchten Kegelschnitts zu Coordinatenaxen nähme. Letzteres ist hier mit Beginn der Kegelschnittslehre vom V. Cap. (das VIII. Cap. ausgenommen) geschehen, mithin ist der Hauptteil des Buches nach eigenem Begriff des Verfassers synthetisch. Dasselbe Urteil ergibt sich nach ursprünglichem und allein richtigem Begriff in Bezug auf das Ganze, wenn man nur die Anordnung der Teile betrachtet. Sie sind: Begriff des Coordinatensystems und der Punkt; die gerade Linie; Einführung einer abgekürzten Bezeichnung nebst einigen Anwendungen; der Kreis; die Parabel; die Ellipse; die Hyperbel; die allgemeine Gleichung des 2. Grades; Eigenschaften der Kegelschnitte von allgemeinem Charakter; Eigenschaften derselben, die sich besonders auf die Krümmungsradien und die Combination von Kegelschnitten beziehen. Anhang: Hülfssätze von den Determinanten. Das Ganze stellt sich also als eine ebene Coordinatenlehre mit der zum Zielpunkt genommenen Anwendung auf die Kegelschnitts-

satz, Anwendung desselben und der Polarentheorie auf die Untersuchung der Eigenschaften algebraischer Curven, Eigenschaften der Raumcurven und ihrer Projectionen. Allgemeine Theorie der krummen Flächen und Flächensysteme, und zwar allgemeine Eigenschaften algebraischer Flächen, lineare Flächensysteme 1. Stufe (Flächenbüschel) und deren Eigenschaften, lineare Flächensysteme 2. Stufe (Flächenbündel und Flächennetze), lineare Flächensysteme 3. Stufe, Sätze über die gemeinschaftlichen Curven zweier und über die gemeinschaftlichen Punkte dreier Flächen, projectivische Erzeugung algebraischer Flächen, Anwendung der Polarentheorie auf die Entwickelung projectivischer Eigenschaften algebraischer Flächen und ihrer Systeme, projectivische lineare Flächensysteme μter Stufe und symmetrische Flächencomplexe, Eigenschaften der Hessiana und Steineriana oder der conjugirten Kernflächen einer Fundamentalfläche $n$ter Ordnung, Bestimmung der Charaktere und Singularitäten einiger Flächen, welche sich aus gegebenen algebraischen Flächen ableiten lassen. Theorie der Flächen 2. Grades, und zwar Definitionen und Fundamentaleigenschaften. Constructive Theorie der Kegel- und Cylinderflächen im allgemeinen, Kegel- und Cylinderflächen 2. Grades, developpable Flächen, welche 2 gegebenen Curven und Flächen umschrieben sind, developpable Flächen, welche 2 Curven 2. Grades umschrieben sind.

H.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Walfried Marx, Professor an der k. technischen Hochschule in München. Erster Abschnitt. Die Methode der rechtwinkligen Projektionen und ihre Anwendung zur graphischen Bestimmung von Punkten, Geraden, Ebenen und der von ihnen begrenzten Körper, sowie zur Lösung von Aufgaben über die gegenseitige Lage dieser Objekte. Dritte, umgearbeitete und durch Beifügung von Aufgaben vermehrte Auflage des I. Bandes von F. A. Klingenfeld's Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Mit 11 lithographirten Tafeln. Nürnberg 1885. Friedr. Korn. 311 S.

Die 1. Auflage ist 1851 erschienen, die zweite (1871) unterschied sich nur wenig von ihr. Ueber der Vorbereitung zur dritten starb Klingenfeld 1880. Bei Bearbeitung der gegenwärtigen beabsichtigte Marx, die Bereicherungen, welche die darstellende Geometrie in den letzten Decennien erfahren, in Aufnahme zu bringen, hielt es jedoch nicht für angemessen, jene durch blosse Zusätze und Aenderungen im einzelnen zu berücksichtigen, sondern eine durchgehende Erneuerung für erforderlich. Die ersten zwei Capitel (Zweck und Methoden der darstellenden Geometrie, die rechtwinklige Projection in einer



Tafel) sind ganz neu. Die Grenzen des Lehrstoffs des 1. Bandes sind aus dem Titel bereits ersichtlich. Die 4 folgenden Capitel behandeln: die graphische Bestimmung von Punkten, Geraden und Ebenen durch ihre Risse in 2 Tafeln und Entscheidung ihrer gegenseitigen Lage; die Wahl neuer Tafeln und deren Anwendung zur Lösung von Aufgaben, in denen Entfernungen und Winkel gesucht oder gegeben sind, geometrische Oerter im Raume; das Drei- und das Vielkant; die Darstellung der von ebenen Flächen begrenzten Körper, die Bestimmung ihrer Risse aus gegebenen Stücken und ihrer Durchschnitte mit Geraden, Ebenen und unter sich. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

III.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bernoulli, Daniel, u. Leonhard Euler, die Basler Mathematiker. Hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert v. der Naturforschenden Gesellschaft. Basel, Georg. 1 Mk. 60 Pf.

Dühring, E., u. U. Dühring, neue Grundmittel u. Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung u. zugehörigen Geometrie etc. Leipzig, Fues. 12 Mk.

Fortschritte, die, der Astronomie. Nr. 9. 1883. Köln, Mayer. 2 Mk.

— die, der Meteorologie. Nr. 9. 1883. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

— die, der Physik. Nr. 7. 1882—1883. Ebd. 2 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im. J. 1878. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 34. J. Red. v. Neesen. 2. Abth., enth.: Optik, Wärmelehre, Elektricitätslehre. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Heller, A., Geschichte der Physik v. Aristoteles bis auf die neueste Zeit. 2. Bd. Von Descartes bis auf Rob. Mayer. Stuttgart Enke. 18 Mk.

Hoppe, E., Geschichte d. Elektrizität. Leipzig, Barth. 13 Mk. 50 Pf.

Lepsius, R., die Längenmasse der Alten. Berlin, Besser. 3 Mk.

Rosenberger, F., die Geschichte der Physik in Grundzügen. 2. Thl. Geschichte d. Physik in d. neueren Zeit. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk.

Methode und Principien.

Rethwisch, E., der Irrthum der Schwerkrafthypothese. Kritik u. Reformthesen. 2. Afl. Freiburg, Kiepert & v. B. 2 Mk.

Litterarischer Bericht.

IV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Alfred Girard, invention nouvelle en l'algebre. Reimpression par Dr. D. Bierens de Haan. L. L. D. Leiden 1884.

Der vollständige Titel dieses Buchs, welches bereits selten geworden ist, und einer neuen Ausgabe für wert gehalten wird, lautet: Invention nouvelle en l'algebre, par Albert Girard matematicien. Tant pour la solution des equations, que pour reconnoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science. A Amsterdam. Chez Guillaume Jansson Blaeuw. M. D C. XXIX. Wie schon der Titel verschiedene Gegenstände nennt, so lassen sich auch in der Schrift 3 Teile erkennen. Der Verfasser sagt davon in der Dedication: Diese 3 Schriften, deren erste nur eine kurze Einführung in die Arithmetik ist, während die beiden andern einige Neuheiten in der Algebra und Geometrie, unbekannt nicht nur den Heutigen, sondern auch den Alten, enthalten —. In der Tat ist der erste Teil betitelt: „Complement Mathematiqve" und handelt von einigen Partien der Arithmetik. Der 2. Teil, ohneSpecialtitel, handelt von den Wurzeln, von der Ausziehungder Wurzeln aus vielgliedrigen Ausdrücken, der algebraischen Construction einiger Aufgaben, von geordneten Gleichungen, von einigen Sätzen, namentlich dann von dem bekannten Girard'schen Satze, von den hintergestellten Grössen in der Algebra. Der 3. Teil hat den Titel: „De la mesure de la superfice des triangles et polygones sphericques, nouvellement inventée" und ist voll von interessanten Beobachtungen. Zuletzt handelt er von der Messung der körperlichen Winkel zwischen ebenen Seitenflächen. Beim Neudruck ist dafür gesorgt, dass Seiten und Zeilen dem Original gleich sind; die Figuren sind Facsimiles.

H.

Simon Stevin, „vande spiegeling der singkonst“ et „vande molens“, deux traités inédits. Reimpression par Dr. D. Bierens de Haan, L. L. D. Amsterdam 1884.

Aus einem Gemisch von Bruchstücken, welche sich in einer Handschriftensammlung der Akademie der Wissenschaften von Amsterdam vorfanden, hat der Herausgeber 3 Abhandlungen, wiewol mit manchen Lücken, zusammengestellt und hier publicirt. Die erste, unter dem Titel: „Deerde Deel der Gemengde stoffen vande Spiegeling der Singkonst. Beschreven door Simon Stevin — “ enthält Notenlehre, Gesangsregeln, musikalische Akustik in Hauptstücke und Sätze mit Erklärungen geordnet, jedoch mit Besprechung von mancherlei Einzelheiten untermischt. Der zweite hat den Titel: „Byvough der Singkonst.“ Von beiden ist die Authenticität zweifellos. Daneben aber findet sich ein Werk: „Spiegeling der Singkonst met Anhang“. Es werden die Gründe dargelegt, warum es demselben Verfasser zugeschrieben werden muss. Was das Verhältniss beider Bearbeitungen betrifft, so vermutet der Herausgeber, dass letztere die ältere sei. Die letzte Abhandlung ist betitelt: „Stevin vande Molens. Rerivieeert doorden Professor Golius. 1634.“ Sie enthält die Berechnung der verschieden construirten Mühlen. H.

Benedictus de Spinoza, „Stelkonstige reeckening van den regenboog“ and „Reeckening van kanssen“, two nearly unknown treatises. Reimpression by Dr. Bierens de Haan. Leiden 1884 20+8 S.

Das Vorliegende ist eine Festschrift zum 300jährigen Jubiläum der Universität Edinburg. Die 2 Schriften verschiedenen Inhalts algebraische Berechnung des Regenbogens und Wahrscheinlichkeitsrechnung sind vereinigt, weil sie sich vereinigt vorfanden. Der Verfasser der zweiten ist zweifelhaft, doch wird sie aus angeführten Gründen dem Spinoza zugeschrieben. Erstere setzt das Gesetz der Reflexion und Brechung als bekannt voraus und betrachtet den Regentropfen als Kugel; letztere enthält 5 Fragen über das Verhältniss der ungleichen Chancen mehrerer Spieler bei gegebenen Bedingungen, nebst Antworten. Die ausgeführte Rechnung folgt dann für die 2 ersten Fragen. H.

Histoire de l'Académie impériale et royale des sciences et belles lettres de Bruxelles, par Éd. Mailly, Membre de l'Académie royale de Belgique. Bruxelles 1883. F. Hayez. 720+426 S.

Das Werk erscheint in 2 Bänden, als Auszug aus den Mém. de l'Ac. roy. de Belg. t. XXXIV. und XXXV. Es beginnt mit einer Einleitung, welche die Umstände darlegt, die zur Stiftung der Société littéraire in den österreichischen Niederlanden führten. Das 1. Buch, zugleich der 1. Band, handelt von der Geschichte dieser Gesellschaft, vor und nach ihrer Erhebung zur Akademie; das 2te von den in den Sitzungen gelesenen oder vorgelegten Abhandlungen; das 3te von den Preisaufgaben. Zum Schluss folgt ein dictionnaire biographique über die Namen, Titel, Stellung und Wirksamkeit, den Geburts- und Todestag, Ort der Geburt und des Todes der Gründer, Mitglieder und Laureaten der Gesellschaft, überdies aller Personen, deren Spur in ihren Annalen aufbewahrt ist, die unbekannten Zeit- und Ortsbestimmungen zur Ergänzung leer gelassen. Der Act der Errichtung der Société littéraire führt zurück auf den 12. Januar 1769, die letzte Sitzung der Akademie fand statt den 12. Mai 1794. Der Verfasser hatte demnach ein Vierteljahrhundert ins Licht zu setzen, dessen Geschichte sehr wenig bekannt, nur von Zeitgenossen erzählt ist. Er hat dazu Documente fast sämtlich aus erster Hand, entliehen aus den Archiven der Akademie und des Staats benutzt. Er spricht sich dahin aus, dass die Arbeiten der Akademiker von ihren Collegen keineswegs mit gegenseitigem Lobe beurteilt sind, und sagt dann weiter: „die Preisaufgaben, von Anfang an als ein mächtiges Mittel des Wetteifers betrachtet, zeigen zugleich den Geist, welcher über den Arbeiten der Gesellschaft herrschte, und die intellectuelle Bewegung, wofür ihr das Land noch den Dank schuldet. Wenn es wahr ist, wie man behauptet (angeführt ist Ad. Quetelet). dass während des letzten Teils des 18. Jahrhunderts die Geschichte der Wissenschaften in Belgien so zu sagen ganz in der Geschichte der Arbeiten der alten Akademie von Brüssel liegt, so wird man mir verzeihen lang gewesen zu sein: ich wollte mit deren vagen Darstellungen und oberflächlichen Begriffen, die nichts lehren, ein Ende machen und den Menschen und Sachen die Stelle geben, auf die sie ein Recht haben." Was die Form der Abfassung betrifft, lässt die Schrift, obwol in zusammenhangender Erzählung, grösstenteils die Documente reden. H.

Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit. Von August Heller, Professor in Budapest. Zwei Bände. II Band: Von Descartes bis Robert Mayer. Stuttgart 1884. Ferdinand Enke. 753 S.

Der 1. Band ist im 273. litt. Ber. S. 1. besprochen. Die Aufgabe, die der Verfasser mit dem 2. Bande zu lösen unternimmt, ist eine wesentlich verschiedene. So gering der Stoff im vorausgehenden

Zeitraum war, so überwältigend gross ist er hier. Sollte die Darstellung auf den Umfang des Buches beschränkt sein, so war äusserste Kürze notwendig. Was den Plan der Bearbeitung betrifft, so erscheint die Biographie der Physiker als oberste Leitung; nur im Anschluss an diese wird die Litteratur aufgestellt, bloss zum Teil mit Angabe der Leistung der Schriften. Am wenigsten bedacht ist die Entwickelung der Wissenschaftszweige und ihrer Probleme; die einzelnen Entdeckungen und Erfindungen finden sich zerstreut in den Biographien. Im Contrast mit der sonstigen Kürze führt die Biographie von Guericke weit in die Kriegsbegebenheiten hinein, die hier gar nicht hingehören, doch kommen ähnliche Abschweife nicht weiter vor. Im ganzen vermisst man die Scheidung des Wichtigen und Unbedeutenden, wie sie aus einer klaren Auffassung der Ziele der Forschung hervorgehen würde. So viel aber auch der Arbeit an Vollendung fehlt, so ist ihr doch ein Wert zuzuerkennen, nicht sowol als Stoffsammlung für neue Bearbeitung — dazu würden Monographien tauglicher sein — sondern als Versuch einer universellen Bearbeitung, der vielleicht noch lange als Aushülfe dienen muss, wo ein Handbuch der Geschichte der Physik für Unterrichtszwecke Bedürfniss ist. H.

Johannes Kepler's Leben und Entdeckungen. Von F. Fischer Abhandlung zu dem Programm der Realschule II. Ord. zu Leipz[illegible]; für das Schuljahr 1883—1884. Leipzig 1884. 4°. 35 S.

Kepler's Lebensgeschichte, seine Schicksale und Tätigkeit nebst der Herausgabe seiner Schriften erzählen die 4 ersten Abschnitte in folgender Begrenzung: von der Geburt bis zur Uebersiedelung nach Prag, dann das Leben in Prag, dann in Linz, dann die letzten Lebensjahre. Die Angaben sind reichlich und werden ohne Umschweife in einfacher Weise so vorgetragen, dass Kepler's Ansichten und Denkweise daraus deutlich erhellen. Die folgenden 6 Abschnitte gehen näher auf seine Arbeiten ein. Sie sind überschrieben: Würdigung Kepler's (d. i. die, welche seine astronomischen Leistungen fanden), die Stereometrie der Fässer, die regulären Polygone und Polyeder, die Logarithmen, Kepler's optische Untersuchungen, die Gesetze der Planetenbewegung. Der letzte erklärt es, wie Kepler successive zur Annahme elliptischer Bahnen übergieng, die er anfangs nur der Rechnung wegen den empirisch gefundenen Ovalen substituirte. Quellen sind nirgends angeführt. H.

William Farr. Eine biographische Skizze von Franz Car Lukas in Wien. 12 S.

Dem Andenken des Genannten widmet der Verfasser diesen Artikel (Rundschau d. Verh. XXXIII. 1883. p. 401.) wegen seiner zahlreichen Schriften im medicinisch statistischen Fache. Er ist geboren 1807 in Kenley, gestorben den 19. April 1883. Von seinen Schriften werden angeführt 2 Artikel in den Schriften der Royal Society of London und 18 im Journal of Statistical Society of London. Noch mehr wird aber offenbar die Aufmerksamkeit auf ihn gelenkt durch seine Tätigkeit in den statistischen Congressen, welche zeigt, in wie hohem Ansehen er in seinem Fache stand. Von 1836 an war er Mitglied der Statist. Soc. Er vertrat die englische Regierung im ersten statistischen Congress in Brüssel, dann wieder in Paris, dann in Wien, ward in die Commission zur Aufstellung eines einheitlichen Münz-, Mass- und Gewichtssystems gewählt und war bei verschiedenen Veranstaltungen Berichterstatter. Seine Statistik bezog sich anfangs auf England, dehnte sich aber später auf die europäischen Hauptstaaten aus. H.

Het geboorte-jaar van Willebrordus Snellius. Door P. van Geer. Overgedrukt uit het Album der Natuur. 4 S.

Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius. Par P. van Geer. Extrait des Archives Néerlandaises, t. XVIII 16 S.

Erstere Schrift hat Bezug auf den frühern Artikel derselben Zeitschrift „Willebrordus Snellius“ (s. 280. litt. Ber. S. 38) und enthält die reichlichen Ergebnisse fernerer Nachforschungen des Verfassers, welche dessen Angaben berichtigen und vermehren. Nach übereinstimmenden Angaben in Siegenbeek: Geschiedenis der Leidsche hoogeschool; van Kempen: Geschiedenis der Letteren en Wetenschappen in de Nederlanden; van der Aa: Biographisch woordenboek der Nederlanden; Poggendorff: Biogr. Wörterb.; Montucla: Hist. des Math. war die Geburt in das Jahr 1591 gelegt. Weit ausführlichere Berichte führen indes, obwol die directe Aussage überall fehlt, auf das Geburtsjahr 1581, in welchem er bereits im Einwohnerregister von Leiden aufgeführt ist. Er war der älteste der 3 Söhne Willebrord, Jakob und Heinrich von Rudolf Sn. und seiner Frau Machteld Cornelisdr, und Jacob ist, wie feststeht, 1582 geboren. 1600 las er schon mit seinem Vater an der Universität. Letzterer wohnte anfangs am Kirchhof, wo er viele Studenten als Kostgänger bei sich hatte, kaufte aber später ein eigenes Haus, welches Willebrord nach seinem Tode inne hatte. Willebrord heiratete den 1. Aug. 1608 Maria de Langhe, Tochter des Burgemeisters von Schoonhoven, und hatte 3 Kinder, Rudolf (Mediciner), Jannette und Lorenz (Jurist), die

keine Berühmtheit erlangt haben. Er starb den 30. Oct. 1626, seine Frau den 11. Nov. 1627. Alles, was in dieser und der frühern Schrift als Entdeckung aufgezeichnet ist, hat nun der Verfasser in den Arch. Néerl. zu einer vollständigen Lebensgeschichte verarbeitet.

H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XVI. Roma 1883. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt ist folgender. A. Favaro: Einige ungedruckte Schriften von Galileo Galilei aus den Manuscripten der Biblioteca Nazionale von Florenz ausgezogen und illustrirt. — Leben des Leon Battista Alberti di Girolamo Mancini in Florenz, herausgegeben von G. C. Sansoni 1882. — Nicolaus Coppernicus von Leopold Prowe. Erster Band: Das Leben. 1 und 2. Teil. Berlin 1882. Weidmann. — Ueber einen Vortrag über die Magnetnadel von P. D. Benedetto Castelli. — Ungedrucker Vortrag über die Magnetnadel von P. D. Benedetto Castelli, publicirt nach dem Codex der Nationalbibliothek von Florenz, Sezione Palatina: „Die Schüler von Galileo“. Band I. Castelli Benedetto, Notizen und Schriften. — Litterargeschichtliche Studien über Euklid von J. L. Heiberg. Leipzig 1882. B. G. Teubner.

A. Genocchi: Bruchstück eines Briefes an D. B. Boncompagni (über Pepin's Herleitung eines Satzes von Fermat).

S. Realis: Ueber eine unbestimmte Gleichung.

A. Sparagna: Brief von C. G. Gauss an Heinrich Wilhelm Matthias Olbers. Uebersetzung ins Italienische. (Der deutsche Text folgt).

Ch. Henry: Ueber das Leben und die mathematischen Schriften von Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet. Es folgt das Verzeichniss seiner Arbeiten, ein Bericht über die ungedruckten und unter diesen vollständig herausgegeben: Des méthodes d'approximation pour les équations différentielles lorsqu'on connaît une première valeur approchée. — Probleme der praktischen Geometrie von Mydorge und Lösungen, zum erstenmal publicirt.

D. Bierens de Haan: Historisch wissenschaftliche niederländische Bibliographie.

F. Jacobi: Ueber das Problem „le noeud de cravate“ und einige Werke von Urbano d'Aviso Romano.

M. Steinschneider: Studien über Zarkali. 2. Artikel. — Ergänzung zu der Notiz (XIV. 721.) über ein ungedrucktes astronomisches Werk von Jbn Haitham.

L. Rodet: Lösungen der Probleme von Mydorge entnommen aus orientalischen Werken.

G. Uzielli: Untersuchungen über Paolo dal Pozzo Toscanelli.

A. Stiatesi: Ueber das Leben und die Arbeiten von Sebastiano Purgotti.

B. Boncompagni: Ueber 2 in der Zeitschrift „Giorn. degli eruditi e curiosi" gestellte Aufgaben.

Publicationsverzeichnisse im 2. 4. 6. 8. 10. 12. Heft.

Erd- und Himmelskunde.

Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. Von Dr. Siegmund Günther, Professor am Gymnasium zu Ansbach. Zwei Bände. I. Band. Mit 77 in den Text gedruckten Abbildungen. Stuttgart 1884. Ferdinand Enke. 416 S.

Das Interesse an allen Fragen über die Natur der Weltkörper hat sich wol zu allen Zeiten weit über die Gelehrtenkreise hinaus erstreckt, tritt aber in neuester Zeit besonders lebhaft hervor. Wer bisher im einzelnen über solche Fragen nachgedacht oder von fremden Ansichten Kenntniss genommen hat, wird bei Durchlesung des vorliegenden Buchs staunen, bis zu welcher Grösse einerseits die Menge dieser grösstenteils ungelösten Fragen, andrerseits die Menge der Lösungsversuche und Meinungen, mithin auch die betreffende Litteratur angewachsen ist. Dies gesamte Material übersichtlich zusammengestellt zu haben ist unstreitig eine höchst dankenswerte Leistung. Auch wird der Erfolg des Unternehmens durch die bekannte Begabung des Verfassers in populärer Darstellung sehr unterstützt. Doch hat das Buch nichts gemein mit den Schriften derer, welche um der Popularität willen den Reiz des Wunderbaren vor der Belehrung bevorzugen. Die Tendenz ist vielmehr durchweg eine wissenschaftliche. Daher sind auch die zahlreichen Kosmophantasien der Neuzeit fast unberücksichtigt geblieben: die dahin gehörige Erklärung der Schwerkraft, die der Verfasser freilich viel zu günstig beurteilt, wird nur kurz erwähnt. Trotz einiger Aehnlichkeit dieser rückschrittlichen Bestrebungen mit den Erklärungsversuchen der Alten

hinsichtlich ihrer Aufstellungen sind doch letztere als Anfänge eines stabilen Entwickelungsganges ganz verschieden zu beurteilen. Es ist entschieden wesentlich für die Aufgabe des Buchs, dass es allen Nachrichten über dieselben, die zu uns gelangt sind, mit gleicher Aufmerksamkeit nachgeht. Ein Zweifel kann eher darüber erhoben werden, ob die auf höheren Rechnungen beruhenden Leistungen der Neuzeit zweckentsprechend behandelt sind. Eine genügende Einführung in deren Verständniss wird und darf man nicht von dem Buche erwarten. Der Verfasser hat versucht, den Lesern, welche die Originalwerke nicht studiren, wiewol nicht ohne Anwendung von Rechnung, die Doctrinen zum Teil zugänglich zu machen. Mag jeder selbst aussagen, ob er dadurch belehrt worden ist. Die behandelten Gegenstände sind in folgender Weise geordnet: Die kosmische Stellung der Erde, und zwar die Kant-Laplace'sche Hypothese, die physische Constitution der Körper des Sonnensystems, die der Erde ähnlichen Planeten und der Mond; allgemeine mathematische und physikalische Verhältnisse des Erdkörpers und zwar die Erde als Kugel und Rotationssphäroid, die Attractionsphänomene und deren Anwendung zur Bestimmung der Gestalt und Dichte der Erde, das Geoid, die Bewegung der Erde im Raume, die Graphik im Dienste der physischen Erdkunde; Geophysik im engern Sinne, dynamische Geologie, und zwar die Wärmeverhältnisse des Erdinnern, der innere Zustand der Erde, die vulcanischen Erscheinungen, Erdbeben. Auf jeden Abschnitt folgt das Litteraturverzeichniss mit Verweisung auf die Stellen, wo Erwähnung des Einzelnen geschehen ist. H.

Die mathematische Geographie in Verbindung mit der Landkarten-Projektion. Für Schulen und zum Selbstunterricht bearbeitet von Gustav Wenz. Mit 187 in den Text eingedruckten Figuren. München und Leipzig 1883. R. Oldenbourg. 297 S.

Der Verfasser hat es für gut befunden in das Lehrbuch der mathematischen Geographie allgemeine Mathematik in beträchtlichem Umfange aufzunehmen. Diese Auskunft würde man als natürliche leicht anerkennen, wenn es sich z. B. darum handelte, zur Vermeidung von Unterbrechungen die in Anwendung kommenden Sätze vorher in Erinnerung zu bringen. Anders aber lautet die Motivirung. Der Verfasser schliesst den Gedanken geradezu aus, dass die Schüler der mathematischen Geographie von Mathematik die geringste Kenntniss bereits besitzen, und befürwortet nur überhaupt gegen die (seiner Aussage nach) verbreitete Scheu vor der Mathematik die selbstverständliche Sache, dass man ihnen diese sicherste Stütze zuteil werden lasse. Hiernach muss es also wirklich Schulpläne ohne Mathematik, und doch mit mathematischer Geographie geben! In der Bearbeitung

des allgemein mathematischen Lehrstoffs ist ein leitender Gedanke schwer zu erkennen. Zu bemerken ist eine eigentümlich familiäre, nicht sonderlich präcise, oft bildliche Sprache. Während aber einerseits der Vortrag ganz bekannter Sätze aus den Anfangsgründen den Standpunkt sehr niedrig zu stellen scheint, ist doch andrerseits durch Auswahl, Anordnung, Erklärung und Herleitung so wenig für Einführung in ein leidliches Verständniss geschehen, dass man jene Beigabe eher für blosse Repetition halten möchte. Am wenigsten ausreichend aber ist sie zur Vorbildung für das Verständniss der darauf folgenden mathematischen Geographie in gegenwärtiger Abfassung, welche gleich anfangs ziemlich complicirte Raumvorstellungen in Anspruch nimmt. Es wäre gewiss möglich gewesen, diese Partien einfacher und dem Anfänger zugänglicher zu gestalten. In gegenwärtiger Bearbeitung kann das Buch nicht als Muster der Darstellung gelten. Die Abschnitte des Hauptteils sind: Mathematische Geographie, und zwar Gestalt und Grösse der Erde; Kugelbilder, und zwar die perspectiven Projectionen, Polar- und Aequatorial-, Meridian-, Horizontalprojection, die nicht perspectivischen Projectionen; Zonenbilder; Terrainbilder; dann astronomisch-mathematische Geographie, und zwar die Erde im Weltraum, der Mond, Ebbe und Flut, das Planetensystem, die Sonne und das Sonnensystem, Kometen und Asteroiden, Zodiakallicht, Arten der Sterne, das Weltall. Dann folgen 24 Tabellen und 3 Nachträge. H.

Neue exacte Methode für die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen nebst einer neuen Störungstheorie. Von M. Vodusék, Professor am k. k. Gymnasium in Laibach. Laibach 1883. Jg. v. Kleinmayr u. Fed. Bamberg. 162 S.

Die Schrift ist keine blosse Mitteilung dessen, was die Erfindung des Verfassers an der Methode gebessert hat, sondern ein Vortrag der gesamten Lehre der Bahnbestimmung von Anfang an, indem der 1. Abschnitt die geometrischen Beziehungen, namentlich zwischen geocentrischen und heliocentrischen Coordinaten, der zweite die Dynamik der Planetenbewegung behandelt. Gerade über die Punkte der Neuheit spricht das Buch nichts aus. In der Vorrede legt der Verfasser den Fortschritt gegen die bisherigen Methoden darin, dass nicht allein die Auflösung der sogenannten Fundamentalgleichungen, sondern auch die Bestimmung der darin vorkommenden Dreieckverhältnisse sowol bei Planeten als auch bei Kometen eine sehr einfache und elegante Gestalt angenommen habe. Das würde sich im 3. Abschnitt, Bahnbestimmung aus 3 Beobachtungen, auszuweisen haben. Hier werden zuerst die Verhältnisse der Dreiecke zwischen

Sonne und 3 Oertern des Planeten dargestellt, dann unter Annahme einer Bewegung im Kreise, bzhw. in der Parabel für Kometen, die angenäherten Werte von Unbekannten durch Probiren ermittelt, dann die Coordinaten in die taylor'sche Reihe entwickelt und die Coefficienten durch die Bewegungsgleichungen bestimmt. Wenn man nun einräumt, dass die hier gegebenen Relationen und dadurch gewonnenen Controlen einfacher sind als die gewöhnlichen, so ist doch die fernere Behauptung des Verfassers in der Vorrede nicht wol zu verstehen, er hätte eine Controle geschaffen, deren Schärfe die Beobachtungen oft kaum vertragen würden; dafür fielen die Methode der kleinsten Quadrate, Variation der Constanten u. s. w. als überflüssige Surrogate ganz weg, denn es wäre einleuchtend, dass eine aus wenigen guten Beobachtungen vermittelst einer richtigen Methode durchgeführte Bahnbestimmung mehr leisten müsste, als alle andern secundären Hülfsmittel zusammengenommen, wenn ihnen die richtige Basis fehlte. Nun ist aber nirgends gesagt, was die für überflüssig erklärte Ausgleichungsrechnung ersetzen soll. Die aufgestellten Controlen zeigen nur an, dass mehr oder weniger fehlerhafte Elemente überhaupt vorhanden sind. Von deren Ermittelung spricht das Buch gar nicht; ja es werden nicht einmal die Fehler der Hypothesen, nämlich der Isolirung des Planeten und der Kreisbewegung, und die Beobachtungsfehler begrifflich unterschieden. Hierdurch wird es erklärlich, dass die Mondbahn auf 5, die Störungsrechnung auf 21 Seiten behandelt werden konnte. Die Bahnbestimmung aus 4 Beobachtungen ist nur rücksichtlich der Kometen untersucht und im 4 Abschnitt hinzugefügt werden. H.

Die Fixsterne. Von Dr. C. F. W. Peters, Professor an der Universität zu Kiel. Mit 9 Figuren in Holzstich. Leipzig 1883. G. Freytag. Prag: F. Tempsky. 163 S.

Die Sonne und die Planeten. Populär-wissenschaftlich dargestellt von E. Becker, Dr. phil. und 1. Observator an der Sternwarte zu Berlin. Mit 68 Abbildungen. Leipzig 1883. G. Freytag. Prag: F. Tempsky. 296 S.

Die Kometen und Meteore. In allgemein fasslicher Form dargestellt von Prof. Dr. W. Valentiner. Vorstand der grossherzoglichen Sternwarte in Karlsruhe. Mit 62 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig 1884. G. Freytag. Prag: F. Tempsky. 240 S.

Diese 3 Schriften bilden bzhw. den 16., 10. und 27. Band der „Deutschen Universal-Bibliothek für Gebildete“, von welcher der

12. Band, enthaltend die Lehre von der Wärme, im 278. litterarischen Bericht besprochen worden ist. Die darin gegebene allgemeine Charakteristik der Behandlungsweise gilt auch von dem Vorliegenden, so dass nur die besondern Gegenstände näher anzugeben sind.

Das erste Buch behandelt nach einander: die äusseren Erscheinungen der Fixsterne, ihre Entfernungen, ihre Eigenbewegungen, die Doppelsterne, veränderlichen Sterne, Sternhaufen und Nebelflecke, die physische Beschaffenheit der Fixsterne.

Das zweite: die scheinbaren Bewegungen der Sonne und der Planeten, die Weltsysteme der Alten, die Koppernikanische Lehre, die Keplerschen Gesetze, die allgemeine Attraction, die Entfernung der Erde von der Sonne, das Sonnen- und Planetensystem, die Sonne, die einzelnen Planeten nebst ihren Trabanten, mit Beigabe einer Tabelle der Elemente der grossen und kleinen Planeten.

Das dritte: die Natur der Bahnen der Kometen, viele einzelne Kometen, die Natur der Sternschnuppen, Berichte über Beobachtungen derselben. H.

Die Zunahme der Wärme mit der Tiefe ist eine Wirkung der Schwerkraft. Von Gotthold Landenberger. Stuttgart 1883. J. G. Cotta. 28 S.

Der Satz, welcher als Titel der Schrift vorangestellt wird, ist nur einer der Gegenstände, von denen sie handelt, doch darf man wol daraus schliessen, dass der Verfasser auf ihn hauptsächlich Wert legt. Gerade dieser Satz aber ist nicht neu, sondern bereits 1860 in Poggendorff's Annalen, Bd. CX. p. 598 hergeleitet, und die Zunahme unter 2 verschiedenen extremen Hypothesen, zwischen denen das actuelle Verhalten liegen muss, berechnet worden. Nicht erst bei der Krönig'schen Hypothese über die Constitution der Gase, auf welche sich das Gegenwärtige stützt, sondern unter der blossen Voraussetzung, dass die Wärme in der lebendigen Kraft von Körperatomen besteht, ist ersichtlich, dass ein bewegtes Atom, sofern nur seine Höhe variirt, nach unten zu eine grössere lebendige Kraft, mithin auch Wärme, mitbringt und an ein andres Atom übertragen kann als nach oben zu, dass daher in Bezug auf Wärmeleitung Gleichgewicht der Temperatur stattfindet, wo dieselbe nach unten zunimmt. Dies ist der in Rede stehende Satz. Er schliesst nicht aus, einerseits dass durch Strahlung im Innern beständige Ausgleichung der Temperaturdifferenz, durch Strahlung nach aussen beständige Abkühlung der Erde stattfindet, andrerseits dass die Temperaturdifferenz, soweit sie überschüssig vorhanden ist, mit Abkühlung durch Leitung verbunden auf-

tritt. Nach Begründung jenes Satzes untersucht die Schrift noch eine Reihe weiterer Fragen. Die Geschwindigkeit der Luftmolecüle findet sie = 970 Meter, die Höhe der Atmosphäre = 48000 Meter, die Geschwindigkeit verschiedener Gase bei gleicher Temperatur soll sich wie die Quadratwurzeln aus dem specifischen Gewicht verhalten. Ferner entwickelt der Verfasser seine Ansicht über die Temperatur der Atmosphäre an ihrer Grenze, nach ihr besteht die oberste Schicht aus Wasserstoff. Weil die Berge auf ihre Basis stärker drücken als die Luft von gleicher Höhe, soll die Temperaturdifferenz in ihnen grösser, mithin ihre Gipfel kälter als die umgebende Luft sein, wodurch sich die Nebelbildung erklärt. Gründe findet der Verfasser für alle seine Aufstellungen, vermöge deren Originalität haben letztere etwas anregendes. H.

Wie erklären sich Erdmagnetismus und Erdbeben? Eine naturwissenschaftliche Studie von Hermann Gringmuth. Dresden 1883. E. Pierson. 15 S.

Der Verfasser nimmt an, dass die Erde von gewisser Tiefe an im liquiden, von grösserer Tiefe an im gasförmigen Zustande sei, die innere Kugel aus Gas der schwersten Stoffe bestehe. Zwischen der Gaskugel und der festen Hohlkugel soll nun elektrische Spannung stattfinden. Dass die liquide Zwischenschicht isolirend wirkt, ist nicht ausgesprochen, scheint aber hiernach Voraussetzung zu sein. Ueber die Erzeugung des Erdmagnetismus spricht nur der kurze Satz: „Aus den Aeusserungen der durch die Axenrotation des Gascentrums hervorgerufenen elektrischen Tätigkeit und Umlaufes der elektrisirten innerirdischen flüssigen Masse erkläre ich die Erscheinungen des Erdmagnetismus.“ Das Weitere bezieht sich nur auf Unregelmässigkeiten. Hiermit hat der Verfasser einen neuen Motor hingestellt; die Erklärung mag sich daraus der Leser, wenn es ihm gelingt, selbst bilden. Die magnetischen Pole sollen durch die absolute Rotation der Erde im ganzen bedingt sein. Dann würden sie offenbar unabhängig von der Entstehung des Magnetismus zu demselben hinzukommen. Von solchen Fehlern des Ausdrucks (wie schon oben „Rotation des Centrums“) wollen wir gern absehen, da die Darstellung sachlich soviel vermissen lässt. Näher geht die Schrift auf Erklärung der Erdbeben ein. Sie entstehen durch Entladungen der genannten elektrischen Spannung; doch können manche auch andre Ursachen haben. Auf Verschiedenheit der Ursachen deutet der Umstand, dass öfters Erdbeben in der Nähe von Vulcanen stattgefunden haben, die dabei ruhig blieben. Es werden viele Fälle angeführt, wo

Erdbeben mit elektrischen Erscheinungen verbunden auftraten. Der Nachtrag, betreffend die Sonnenflecken, steht in keiner ersichtlichen Beziehung zur neuen Hypothese. H.

Astronomischer Kalender für 1884. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neue Folge. Dritter Jahrgang. Wien 1884. Carl Gerold's Sohn.

Die beiden ersten Jahrgänge sind im 271. und 276. litt. Bericht, bzhw. S. 33 und 45 besprochen. Die gegenwärtigen Beilagen enthalten: die grossen Kometen der Jahre 1843, 1880 und 1882; neue Planeten und Kometen; Uebersicht des Planetensystems; alphabetisches Verzeichniss der Asteroiden; Verzeichniss der Asteroiden nach der Zeit ihrer Entdeckung; Bahnelemente der grossen Planeten, der Satelliten, der Asteroiden; Gebührenscala. H.

Meteorologische Zeitschrift, herausgegeben von der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft, redigirt von Dr. W. Köppen, Hamburg, Seewarte. Erster Jahrgang 1884. Berlin, A. Asher u. Co.

Von dieser neuen Zeitschrift erscheint monatlich ein Heft, enthaltend Abhandlungen, Correspondenzen und Notizen, Vereinsnachrichten und Bibliographie. Das 1. Heft gibt einige Nachrichten über die Gründung der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft, welche am 17. November 1883 nach Vorgang und Vorbild der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie auf Anregung des Directors der Seewarte, Geh. Admir.-Rats Prof. Dr. Neumayer stattgefunden hat, neben ihr besteht, und im Anfang dieses Jahres bereits 296 Mitglieder zählte. Ueber die Statuten und die Ordnung der Vereinstätigkeit finden sich darin keine Mitteilungen. Zweigvereine haben sich nach einander gebildet in Magdeburg, Berlin, München und Rudolstadt. H.



Mathematische und physikalische Bibliographie.

IV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Prowe, L., Nicolaus Copernicus. 2. Bd. Urkunden. Berlin, Weidmann. 15 Mk.

Weyr, E., üb. d. Geometrie der alten Aegypter. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Methode und Principien.

Alth, G. R. v., üb. d. absolute Masssystem u. die Theorie der Dimensionen. Wien, Hölder. 1 Mk.

Dellingshausen, Baron N. v., die Schwere od. das Wirksamwerden der potentiellen Energie. Stuttgart, Schweizerbart. 1 Mk. 60 Pf.

Flammerion, C., das bewohnte Welten-All. Astronom. u. philosoph. Betrachtgn. 2. Afl. bearb. v. A. Drechsler. Leipzig, Weber. 4 Mk.; geb. 5 Mk.

Killing, W., Erweiterg. d. Raumbegriffes. Mathemat. Abhandlung. Braunsberg, Huye. 1 Mk. 60 Pf.

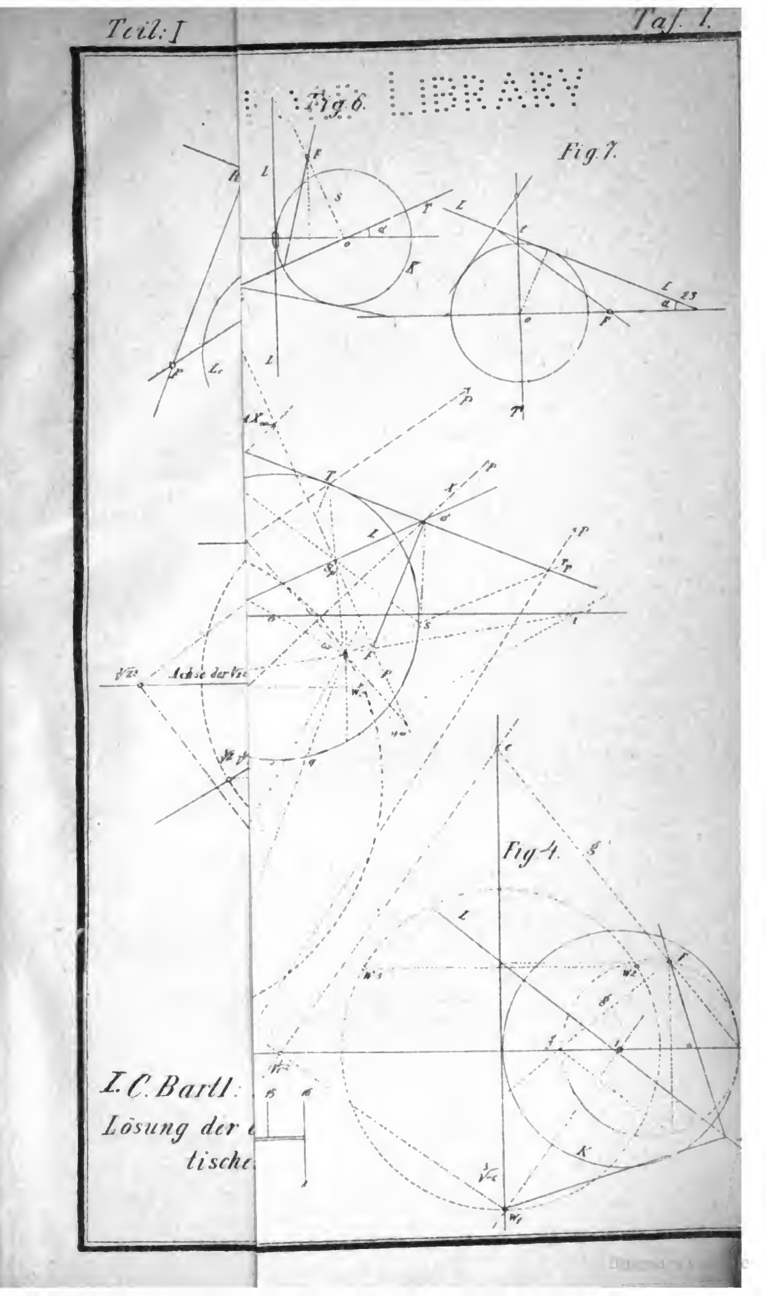
Schneider, G., die platon. Metaphysik, auf Grund d. im Philebus gegeb. Principien in ihren wesentl. Zügen dargest. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Secchi, A., die Einheit d. Naturkräfte. Ein Beitr. zur Naturphilosophie. Uebers. v. R. L. Schulze. 2. Afl. 3. u. 4. Lfg. Leipzig, Frohberg. à 2 Mk.

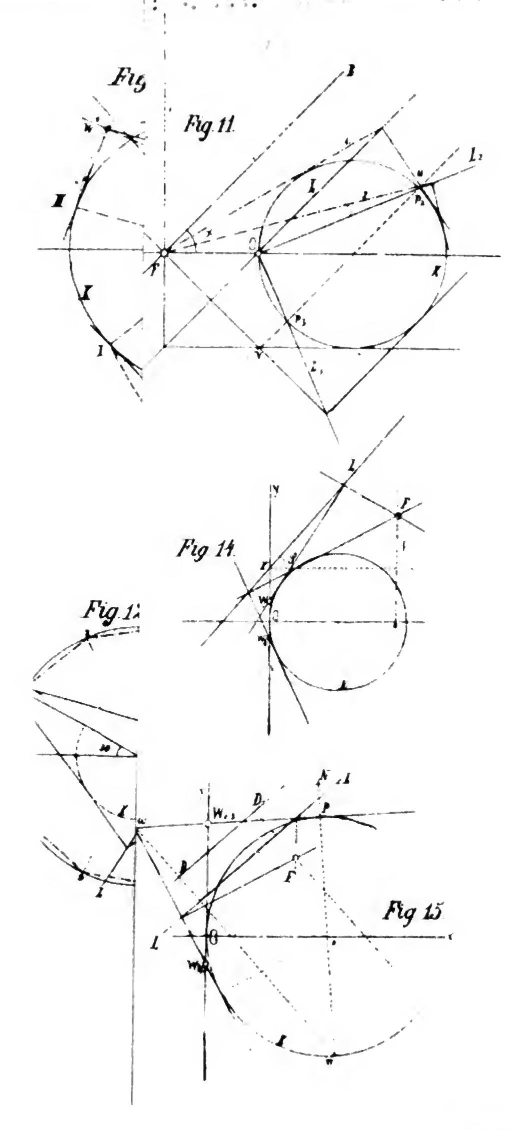
Veyder-Malberg, A. Frhr. v., üb. d. Einheit aller Kraft. Eine Abhandlg. Wien, Seidel & S. 5 Mk.

Sammlungen.

Grosse, F., Antworten u. Lösgn. zu d. Rechenbuch f. Seminare, Mittelschulen u. d. mittl. Klassen höh. Lehranstalten. Münster, Nasse. 1 Mk.


Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 4.
Achse der
I. C. Bartl:
Lösung der
tische




Fig.
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig. 12.
Fig. 15.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

Geschichte der Mathematik und Physik.

[illegible] Trauungen. Berlin, [illegible]

W[illegible], E., üb. d. Geometrie der alten Aegypter. Wien, Gerold. [illegible]

Methode und Principien.

[illegible] d. absolute Masssystem u. die Theorie der Dimensionen. Wien, [illegible]. 2 Mk.

D[illegible]ngshausen, Baron N. v., die Schwere od. das Wirksamwerden der potentiellen Energie. Stuttgart, Schweizerbart. 1 Mk. 60 Pf.

Flammarion, C., das bewohnte Welten-All. Astronom. u. philosoph. Betrachtgn. 2 Afl. bearb. v. A. Drechsler. Leipzig. Weber. 6 Mk.; geb. [illegible] Mk.

K[illegible]ng, W., Erweiterg. d. Raumbegriffes. Mathemat. Abhandlung. Braunsberg, Huye. 1 Mk. 60 Pf.

Schneider, G., die platon. Metaphysik auf Grund d. im Philebus gegeb. Principien in ihren wesentl. Zügen dargest. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Secchi, A., die Einheit d. Naturkräfte. Ein Beitr. zur Naturphilosophie. Uebers. v. R. L. Schulze. 2. Afl. 3. u. 4. Lfg. Leipzig, Frohberg. à 2 Mk.

Weyder-Malberg, A. Frhr. v., üb. d. Einheit aller Kraft. Eine Abhandlg. Wien, Seidel & S. 5 Mk.

Sammlungen.

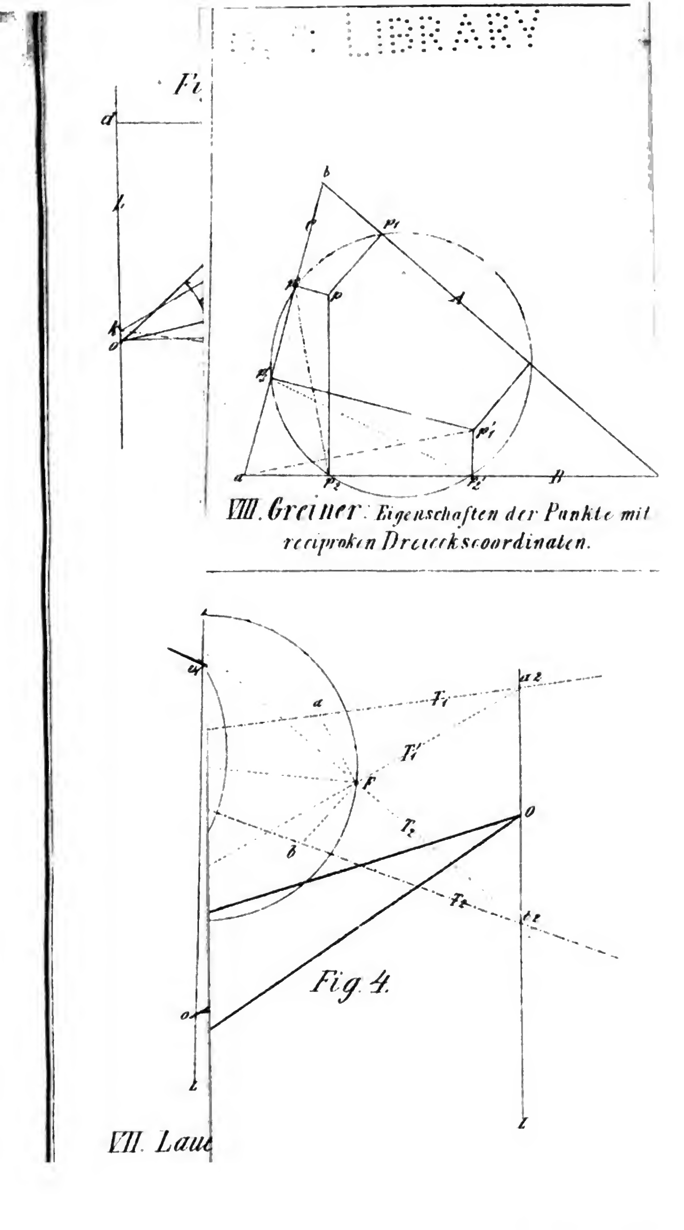
Grosse, F., Antworten u. Lösgn. zu d. Rechenbuch f. Seminare, Mittelschulen u. d. mittl. Klassen höh. Lehranstalten. Münster, Nasse. 1 Mk.

Fig. 6.

Fig. 7.

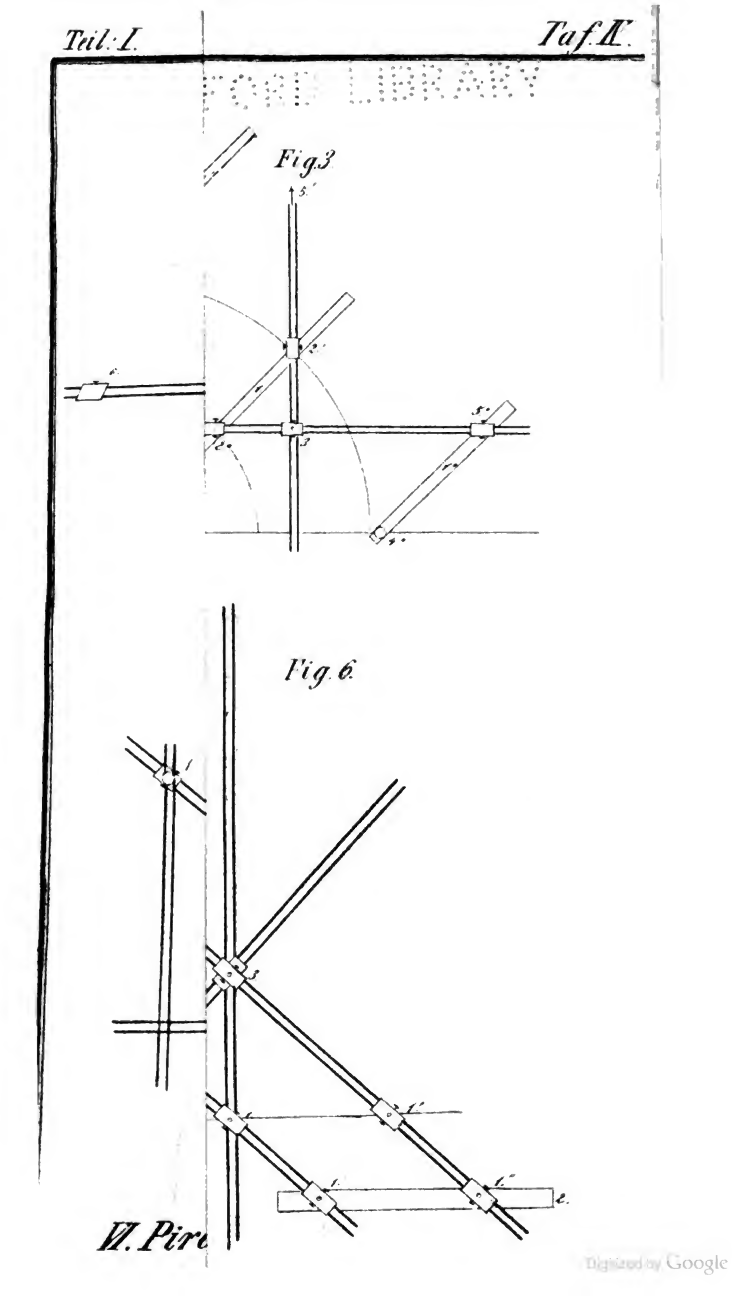
Fig. 4.

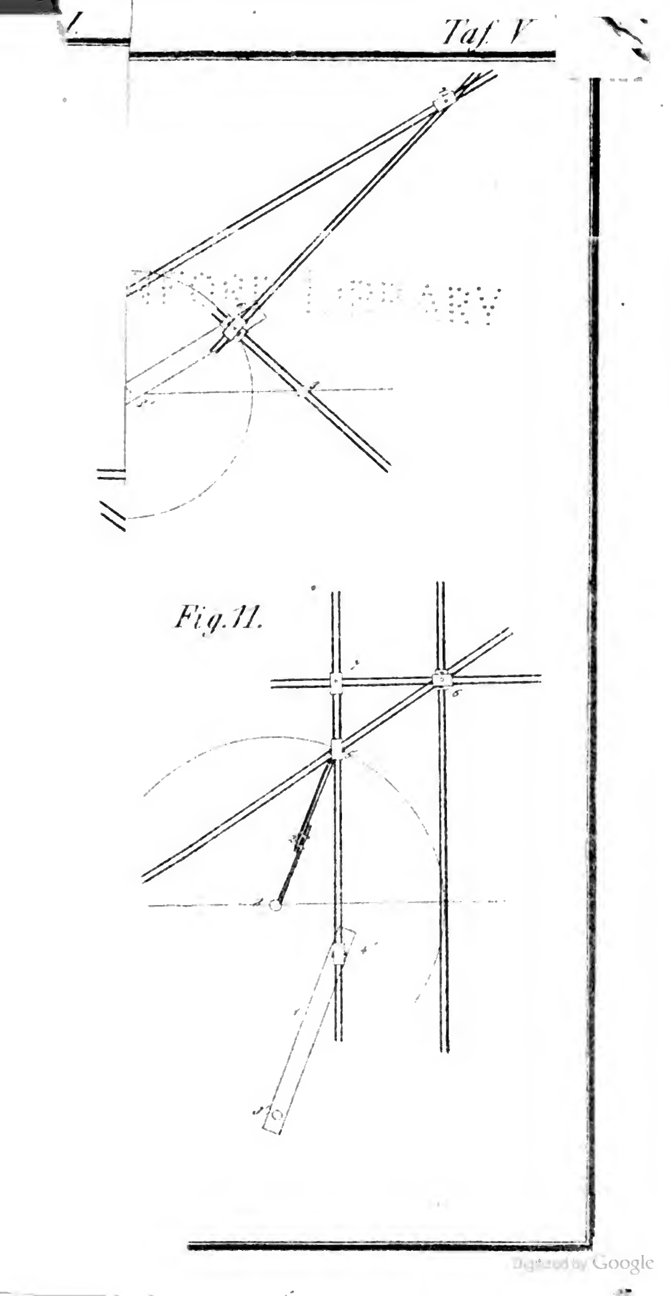
I. C. Bartl:
Lösung der
tische



VIII. Greiner: Eigenschaften der Punkte mit reciproken Dreieckscoordinaten.

VII. Lau


Teil: I.
Taf. IX.
Fig. 3
Fig. 6.
VI. Pir


Fig. 11.

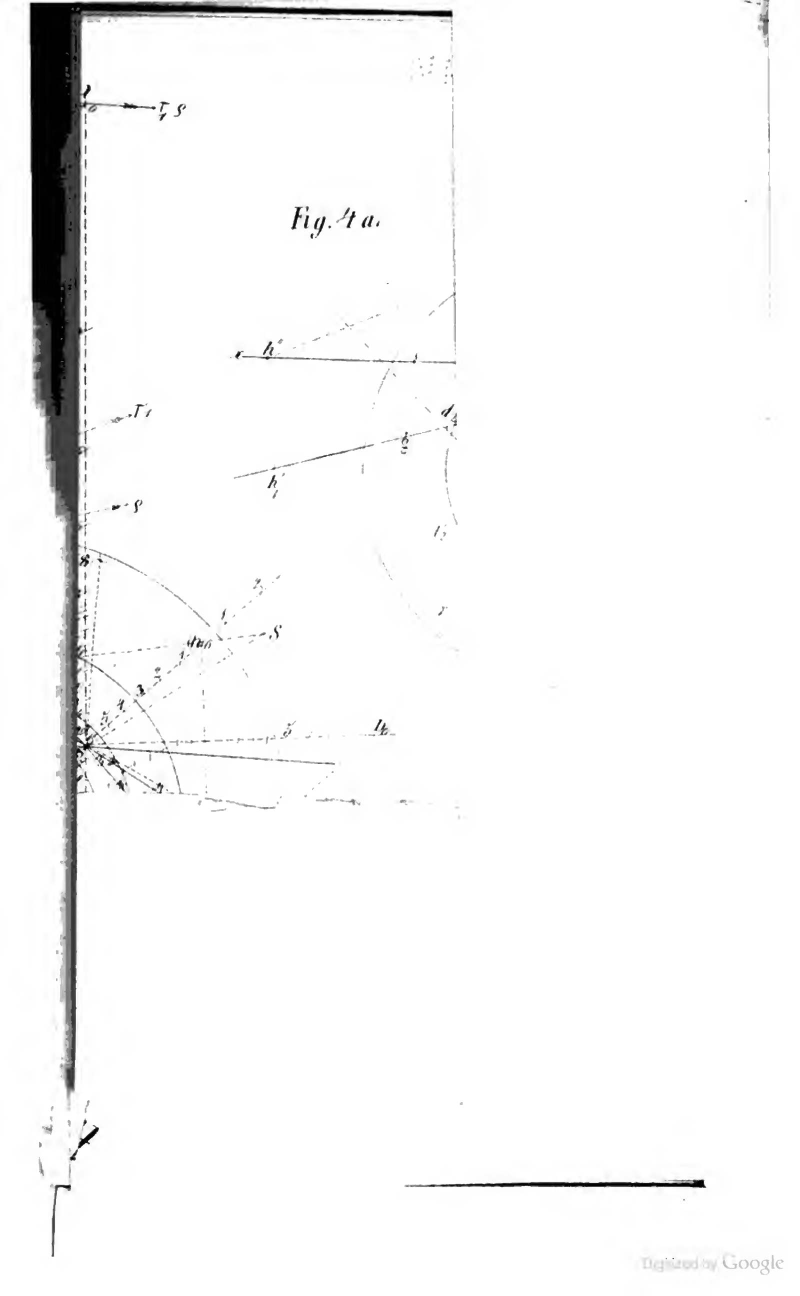


Fig. 4 a.

